This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

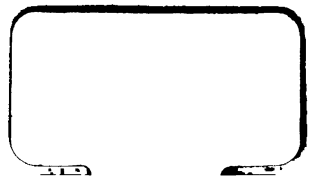
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06910492 9



OHY
Cauchy

Cancel
OHY.

OHY.

Calculus-Applications
(I. C.)

Vorlesungen

über

die Anwendungen

der

Infinitesimalrechnung

auf die

Geometrie

von

A. L. Cauchy,

Professor der Analysis an der polytechnischen Schule zu Paris, sowie an der Facultät der Wissenschaften und Mitgliede der Academie der Wissenschaften daselbst, Ritter des Ordens der Ehrenlegion, Mitgliede der königlichen Societät der Wissenschaft zu London, u. s. w.

Deutsch bearbeitet

von

Dr. C. H. Schnuse.

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

ASTOR LIBRARY NEW-YORK

Braunschweig,

Verlag von G. C. E. Meyer sen.

1840.

Braunschweig,
gedruckt bei Fr. Krampe.

Vorwort des Ueberſetzers.

Das vorliegende Werk bildet eine Fortſetzung von Cauchy's Vorleſungen über Differenzialrechnung und für den Werth und Gehalt deſſelben leiſtet der Name des Verfaſſers hinreichende Bürgſchaft. Aber ungeachtet des allgemein anerkannten Werthes der Cauchyſchen mathematiſchen Schriften hat ſich doch ein ungenannter Recſ. in der Jenaſchen Literaturzeitung Nro. 187 — 189 für das Jahr 1838 erfrecht, gegen die Differenzialrechnung von Cauchy allerlei nichtige und nur Unwiſſenheit beurkundende Ausſtellungen zu machen. Das zu Anfange dieſer Recenſion über das genannte Werk ausgeſprochene, ſehr günſtige allgemeine Urtheil enthält zwar nichts anders, als was in der Vorrede des Ueberſetzers geſagt iſt, und was anerkannte Mathematiker bei verſchiedenen Gelegenheiten geſagt haben; allein die im Verlaufe der Recenſion gemachten einzelnen Ausſtellungen nöthigen mich wegen ihrer Grundloſigkeit und Unwahrheit zu einer Erwiederung in folgenden Hauptpunkten.

Die Ausſtellungen, welche Recſ. gegen Cauchy's Darſtellung in der Einleitung macht und die Ergänzungen und ſogar Verbeſſerungen (?), welche ich ſeiner Meinung nach hätte hinzufügen müſſen, ſind in der That höchſt ſonderbar und zeigen zur Genüge, daß Recſ. nicht weiß, was man unter Eleganz in der Analyſis verſteht. Ich würde mich ſchämen, wenn ich zu einem Werke, wie das Cauchyſche, Zuſätze und Bemerkungen der Art machen ſollte, wie ſie Recſ. anführt. Was für ein Labyrinth würde aus einem ſolchen elegant geſchriebenen Werke werden, wenn man alle leichten Zwiſchenreductionen und Transformationen anführen wollte, die jedem Anfänger bei einiger Aufmerkſamkeit in die Augen fallen. Vielmehr muß es als ein weſentlicher Vorzug des Cauchyſchen Werkes angeſehen werden, daß der Lernende bei dem Studium deſſelben ſelbſtthätig ſein muß. Uebrigens iſt das Buch nicht für Anfänger,

wie sie Recs. sich denkt, sondern für Studirende auf Universitäten oder höhern polytechnischen Lehranstalten zunächst bestimmt, und an diese kann man gottlob heut zu Tage solche Forderungen machen, wie sie Cauchy macht. Auch weiß ich zu gut aus Erfahrung, daß unnöthige Zusätze, wie die vom Recs. angeführten, bei deutschen Uebersetzungen nie von Kennern gebilligt worden sind. Recs. hätte wohl gar noch den Zusatz gemacht, daß $+a$ mit $-b$ multiplicirt $-ab$ gibt, und dergl.! Auch Cauchy's Vortrag ist dem Recs. nicht wortreich genug und er scheint schwülstigen Darstellungen sehr gewogen zu sein. Allein die Darstellung in andern klassischen mathematischen Schriften, z. B. in Gauß disquisitiones arithmeticae, Legendre's Geometrie, Lagrange's mathematischen Werken, Poisson's Mechanik, u. s. w. beweist, daß Kürze und Bestimmtheit des Ausdruckes, aber nicht unnützer Wortschwall die wesentlichen Erfordernisse des gediegenen mathematischen Vortrages sind. Der Einwurf des Recs., goniometrische und nicht trigonometrische Functionen zu sagen, ist nichtig; denn der eine Ausdruck ist so gebräuchlich als der andere, aber lächerlich ist es, wenn Recs. hinterher selbst von trigonometrischen Functionen spricht.

Was Recs. über die Mängel der Ableitung von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sagt, zeigt, daß er von analytischer Eleganz keine Vorstellung hat. — Aber nichts zeigt deutlicher, mit welcher Begierde Recs. nach Einwürfen hascht, und wenn sie auch nur Zeugnisse seiner eigenen Unwissenheit sein sollten, als die Behauptung, daß in der Formel $\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = m x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} i + \ldots$ das Glied $m x^{m-1}$ den Factor i haben müsse, was offenbarer Unsinn ist, wie jeder Anfänger sieht, der eben den binomischen Lehrsatz kennen gelernt hat; und doch verlangt Recs., ich hätte diesen Fehler (?), so wie viele andere derselben Art verbessern und die unverständlichen Entwickelungen (?) in besondern Noten ergänzen sollen. Recs. bemerkt nämlich, es sei unklar, wie aus $y = f(x)$ für $\Delta x = i$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ und aus $y = x^m$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+i)^m - x^m}{i}$ folge.

Was soll man aus einer solchen Kritik schließen? Natürlich nichts anders, als daß Recs. unfähig ist, den Werth des Werkes

zu beurtheilen; denn alle seine Einwürfe beweisen nur seine Unwissenheit.

Wahrhaft lächerlich ist der Entwurf, daß $\frac{dy}{dx}$ nicht Differenzialcoefficient, sondern Differenzialquotient heiße, da doch bekanntlich der eine Ausdruck so gebräuchlich ist, als der andere und sich auf gleiche Weise motiviren läßt. Was Recs. für ein Analyst ist, gibt er wieder dadurch deutlich zu erkennen, daß er nicht begreifen kann, daß für

$$y = \frac{a}{x}, \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{a}{(x+i)} - \frac{a}{x}}{i} = -\frac{a}{x(x+i)}, \text{ also } \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x^2}$$

und für

$$y = A^x, \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{A^{x+i} - A^x}{i} = \frac{A^i - 1}{i} A^x = \frac{I}{L(1+I)} A^x$$

ist, wenn man $A^i = 1 + I$, also, indem man die Logarithmen in dem Systeme von der Basis A nimmt, $i = L(1+I)$ setzt.

Solche elegante Entwickelungen Cauchy's, wodurch sich sein Werk besonders auszeichnet, sind nach des Recs. Meinung sehr der Ergänzung (?) und Verbesserung (?) bedürftig, welche er mit namentlich wieder zur Pflicht macht. — Daß

$$\sin(x+i) - \sin x = 2 \sin \frac{i}{2} \cos\left(x + \frac{i}{2}\right)$$

und $\cos(x+i) - \cos x = -2 \sin \frac{i}{2} \sin\left(x + \frac{i}{2}\right)$

ist, ist bereits Seite 9 bemerkt und außerdem jedem Anfänger, der auch nur die ersten Grundlehren der Trigonometrie kennt, bekannt; also dieser bedeutende Zusatz (?) des Recs. höchst unnütz.

Ein wahrhaft wunderlicher Einwurf des Recs. ist es, wenn er verlangt, daß Cauchy die Differenziale aller nur denkbaren Functionen anführen soll. Daß aber Recs. den Cauchy nicht verstanden hat, geht daraus unzweideutig hervor, wenn er behauptet, nach dem von Cauchy über das Differenziren der Functionen von Functionen Mitgetheilten lerne man nicht Functionen wie $\frac{a^{bx}}{x}$, $a^{\sin x}$, x. differenziren. Denn Cauchy zeigt, daß wenn $y = f(x)$ und $z = F(y)$ ist, man hat:

$\frac{dz}{dy} = F'(y)$ oder $dz = F'(y)\,dy = F'(y)\,df(x) = F'(y)f'(x)\,dx$

oder $z' = y'\,F'(y) = f'(x)\,F'[f(x)]$,

wornach die Differenziation von $a^{\sin x}$ einleuchtend ist. Die Differenzirung der übrigen vom Recs. angeführten Functionen gehört aber nicht hierher, sondern in die 2te Vorlesung, und wenn Recs. nach dem daselbst von Cauchy Mitgetheilten nicht einsieht, wie die fraglichen Functionen zu differenziren sind, so ist er wahrlich zu bedauern. Wenn Recs. von Mängeln und Lücken in der 2ten Vorlesung spricht, so muß man dieses ebenfalls seiner Unkunde zuschreiben; denn von der Differenzirung der imaginären Functionen wird erst in der 12ten Vorlesung umständlicher gehandelt, und ein ebenso offenbarer Beweis seiner Unwissenheit ist es, wenn er sagt, daß eben soviel hinsichtlich des Differenzirens der Functionen mit mehrere Veränderlichen zu ergänzen sei; denn Cauchy handelt in der 2ten Vorlesung von der Bestimmung der Differenziale der Summe, Differenz, des Productes und Quotienten mehrer Functionen von ein und derselben Veränderlichen, aber nicht, wie Recs. sagt, von der Differenzirung der Functionen mit mehrern Veränderlichen; von dieser ist erst in der 16ten Vorlesung die Rede. Es ist in der That empörend, wenn ein Recs., der nicht einmal das System des Verfassers kennt und begreift, auf eine unverschämte und freche Weise Einwürfe macht, die nur in seiner eigenen Unwissenheit ihren Grund haben.

Es ist eine völlige Unwissenheit oder Unwahrheit von Seiten des Recs., wenn er behauptet, aus Cauchy's Darstellung in der 3ten Vorlesung gehe nicht hervor, daß das $(n+1)$te (oder $n$te) Differenzial der ursprünglichen Function das 1ste Differenzial des $n$ten (oder $(n-1)$ten) Differenziales sei, und daß nicht gezeigt werde, wie die höhern Differenziale von $y = x^n$, $y = a^x$, $y = \log x$ und von den trigonometrischen Functionen gefunden werden; denn Cauchy sagt Seite 30: »Hiernach ist y' oder $f'(x)$ die abgeleitete Function der ersten Ordnung von der gegebenen Function $y = f(x)$, y'' oder $f''(x)$ die abgeleitete Function der zweiten Ordnung von y und zugleich die abgeleitete Function der ersten Ordnung von y', ꝛc. Endlich ist $y^{(n)}$ oder $f^{(n)}(x)$ die abgeleitete Function der $n$ten Ordnung von y, und zu gleicher Zeit die der 1sten Ordnung von $y^{(n-1)}$, ...«, worauf alsdann die gegenseitige Abhängigkeit der successiven Differenziale von einander und von den entsprechenden abgeleiteten Functionen sehr klar angegeben wird, und für

die angeführten Functionen, so wie für mehrere trigonometrische Functionen, werden die successiven abgeleiteten Functionen und höhern Differenziale allerdings eben so zweckmäßig, als lichtvoll angegeben.

Was Recs. gegen Cauchy's Beweise der Lehrsätze über die Relationen zwischen den ursprünglichen reellen Functionen und ihren abgeleiteten Functionen (nicht abgeleiteten Differenzialen, wie Recs. sich falsch ausdrückt) in der 4ten Vorlesung sagt, ist wieder offenbarer Unsinn; denn er meint, Cauchy hätte näher zeigen sollen, daß eine Größe C, welche in Absicht auf ihren Werth zwischen zwei Größen A und B liegt (wo $A<B$) größer sei, als A und kleiner, als B, und daß eine zwischen zwei gleichen Größen $A=A$ liegende Größe diesen Größen selbst gleich sei, oder wie sich Recs. noch unsinniger ausdrückt, daß die Größe C **nicht kleiner als die kleinste und nicht größer, als die größte der zwischen A und B liegenden Größen sei** (???).

Was Recs. über das Ende der 4ten und über die 8te Vorlesung sagt, ist eben so ungegründet und lächerlich, als alle seine bisher gemachten Einwürfe; denn er meint, daß das Wichtigste von dem in der 8ten Vorlesung über die Convergenz der Reihen Mitgetheilte am Ende der 4ten Vorlesung hätte gesagt werden sollen. Es ist in der 8ten Vorlesung von der Convergenz der Reihen aber keine Rede, sondern lediglich von der Entwickelung der Functionen in Reihen, und überhaupt steht das in der 4ten Vorlesung Erörterte mit der Convergenz der Reihen in gar keiner Verbindung; wohl aber steht das in der 6ten und 7ten Vorlesung Mitgetheilte mit dem in der 4ten Vorlesung Vorgetragenen in engem Zusammenhange und bietet wichtige Anwendungen davon dar. Hieraus erhellet, wie unvernünftig und ungegründet dieser Einwurf hinsichtlich des von Cauchy gewählten Systemes ist, und daß Recs. die Vorzüge desselben nicht einzusehen vermag. Mit den Zusätzen und Verbesserungen, welche Recs., wie er sagt, in meiner Stelle hier beigefügt haben würde, hat es dieselbe Bewandniß, wie mit den bereits früher erwähnten vermeintlichen Verbesserungen. — Hinsichtlich der 7ten Vorlesung macht Recs. ebenfalls die ganz ungegründete, lediglich auf seiner Unkenntniß beruhende Bemerkung, daß aus Cauchy's Vortrage nicht erhelle, ob eine und dieselbe Function mehrere Maxima oder Minima, oder beide zugleich haben könne, und man entnehme daraus nicht, wie die Werthe von x gefunden werden, für welche z. B. die Functionen:

$y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$ oder $y = \frac{x^3 + x}{x^4 - x_2 + 1}$

Maxima oder Minima werden. Die Nichtigkeit dieses Einwurfes ergibt sich aus Cauchy's eigenen Worten, indem er zur Bestimmung der Maxima und Minima folgende Regel gibt:

»Es sei $f(x)$ die gegebene Function. Man suche zuerst die Werthe von x, für welche diese Function aufhört, stetig zu sein, so wird jedem dieser Werthe, wenn es solche gibt, ein Werth der Function entsprechen, welcher im Allgemeinen entweder eine unendliche Größe, ein Maximum oder ein Minimum sein wird.

Dann suche man die Wurzeln der Gleichung:

(1) $$f'(x) = 0,$$

nebst den Werthen von x, welche die Function $f'(x)$ discontinuirlich machen, wozu besonders die zu rechnen sind, welche sich aus der Gleichung:

(2) $$f'(x) = \pm\infty \text{ oder } \frac{1}{f'(x)} = 0$$

ergeben.

Es sei $x = x_0$ einer dieser Werthe, so ist der correspondirende Werth von $f(x)$, d. h. $f(x_0)$ ein Maximum, wenn die abgeleitete Function $f'(x)$ in der Nähe von $x = x_0$ positiv ist für $x < x_0$ und negativ für $x > x_0$. Im Gegentheil ist $f(x_0)$ ein Minimum, wenn die abgeleitete Function $f'(x)$ für $x < x_0$ negativ und für $x > x_0$ positiv ist. Wenn endlich die abgeleitete Function $f'(x)$ in der Nähe von $x = x_0$ beständig positiv oder beständig negativ wäre, so würde $f(x_0)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum sein.....«, worauf Cauchy Seite 63 und 64 das Unterscheidungsmerkmal der Maxima und Minima näher erörtert.

Die Unwissenheit und Frechheit des Recs. überschreitet wirklich allen Glauben. (Ueber die wesentlichen Vorzüge von Cauchy's Darstellung der Lehre von den Maximis und Minimis vergl. man weiter unten Dirksen's Urtheil).

Ueber Vorlesung 8 macht Recs. mehrere Bemerkungen, welche wieder ein sprechender Beweis für seine Unwissenheit und Unverschämtheit sind. Recs. sagt nämlich: 1) der in der Formel (2) enthaltene Satz beruhe auf der Maclaurin'schen und Taylor'schen Reihe; allein die Sache verhält sich gerade umgekehrt; denn die Maclaurin'sche und Taylor'sche Reihe beruht auf diesem Satze

und wird in Vorlesung 9 daraus abgeleitet; und 2) sagt Recs.: »Für die Entwickelung der Functionen $(1+x)^\mu$, $l(1+x)$ und andern vermißt man die Kenntniß des Maclaurinschen Satzes, welchen der Verfasser erst in der 9ten Vorlesung mittheilt.« Recs. will hier wieder Cauchy einer Inconsequenz beschuldigen, die aber eine bloße Unwissenheit von seiner Seite ist; denn die aus der in der 4ten Vorlesung bewiesenen Formel:

$$(2) \qquad f(x)=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(\theta x)$$

abgeleitete allgemeine Entwickelung:

$$f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1}+f''(0)\frac{x^2}{1.2}+\ldots$$

$$+f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots n-1}+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(\theta x),$$

und woraus sich wieder die Entwickelungen von $(1+x)^\mu$, $l(1+x)$, ... ergeben, ist von der Maclaurinschen Reihe:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots,$$

welche allerdings erst in der 9ten Vorlesung vorkommt, wesentlich verschieden.

Es ist eine offenbare Unwahrheit, wenn Recs. sagt, in der 9ten Vorlesung werde der Maclaurinsche Lehrsatz auf die Entwickelung der Functionen in Reihen angewandt, aber nicht erörtert; denn Cauchy sagt S. 80 ausdrücklich, daß in der Gleichung:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots$$

der Maclaurinsche Lehrsatz bestehe. Es ist ferner eine grundfalsche Behauptung des Recs., wenn er sagt, die Reihe *arc tang* $x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$ könne nicht convergiren, wenn vor dem vierten Gliede das Zeichen + statt — steht, wie es durch einen Druckfehler geschehen ist. Man sieht hieraus, daß Recs. nicht weiß, was man unter convergirenden Reihen versteht, und die S. 10 von Cauchy gegebene Definition einer convergirenden oder divergirenden Reihe nicht verstanden hat. Denn die Reihe mit dem Druckfehler convergirt offenbar für dieselben Werthe von x, als die richtige, nur ist ihre Summe um den doppelten Werth des 4ten

Gliedes größer, als die der letztern, und eine ähnliche Erwiederung gilt in Beziehung auf die Reihe (29). Lächerlich ist der Einwurf gegen die Schreibart $\cos x + \sqrt{-1}\sin x$ statt $\cos x + \sin x\sqrt{-1}$, denn die Cauchysche Bezeichnung ist offenbar richtiger, als die des Recs. Die ferneren Bemerkungen des Recs. über Vorles. 9 sind voreilig und unnütz, weil später alles Erforderliche zur Sprache gebracht wird.

Die Bemerkungen des Recs. über die 10te Vorlesung sind ebenfalls Zeugnisse seiner Unwissenheit; denn es ist allerdings nach Cauchy's Definition auf Seite 10, ax^n das allgemeine Glied der geometrischen Reihe und nicht ax^{n-1}, wie Recs. unrichtig behauptet, indem Cauchy, wie viele andere Mathematiker, der Symmetrie wegen das Glied a das 0te, das Glied ax das 1te u. s. f. nennt. Der Tadel der Bezeichnung $(p+q\sqrt{-1})^n = p_n + q_n\sqrt{-1}$ ist ganz unstatthaft; denn gerade weil n auf der einen Seite Exponent und auf der andern Index ist, ist diese Bezeichnung nicht blos zulässig, sondern sogar sehr zweckmäßig. Es wäre höchst nachtheilig gewesen, wenn wie Recs. will, Cauchy die 9te und 11te Vorlesung zusammengeworfen hätte, wie auch der Unwissendste bei der Verschiedenheit der in beiden Vorlesungen behandelten Gegenstände leicht einsieht. Nicht deswegen sind imaginäre Ausdrücke wie $p+q\sqrt{-1}$ nicht ohne alle reelle Bedeutung, weil, wie Recs. sagt, sich ein solcher Ausdruck für $q=0$ auf die reelle Größe p reducirt; denn alsdann ist er kein imaginärer Ausdruck mehr, sondern aus ganz andern Gründen, welche Gauß zuerst erörtert hat, und was ich in einer Anmerkung ausdrücklich bemerkt habe.

Die unsinnigen Einwürfe und lächerlichen Bemerkungen des Recs. kommen immer besser; denn jetzt sagt er gar: »Durch eine sorgfältigere Vergleichung der Materien und ihres gegenseitigen Begründens würden sich freilich viele Angaben haben bedeutend verkürzen lassen. So würde die Ableitung der Formel (153) sich aus (67) einfach ergeben haben, weil dort $\sin x$ und $\cos x$ bestimmt und $\mathrm{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ist. Uebrigens läßt sich die Formel (153) mittelst ihrer Multiplication mit $-\sqrt{-1}$ gefälliger (?) darstellen....«

Hat denn Cauchy die Formel (153) nicht auf diese Weise abgeleitet, und auf welche andere Weise sollte dieses denn überhaupt möglich sein? Grundfalsch ist die Behauptung des Recs., daß der für $\mathrm{tang}\, z$ erhaltene Ausdruck (153) durch Multiplication mit $-\sqrt{-1}$

gefälliger ($\frac{0}{0}$) wird; denn hoffentlich wird Recs. wissen, daß diese Multiplication im Zähler und Nenner zugleich vorgenommen werden muß, wenn der Werth des Ausdruckes nicht geändert werden soll; aber alsdann wird durch die Multiplication mit $-\sqrt{-1}$ nichts weiter bewirkt, als daß $\sqrt{-1}$ aus den Nenner verschwindet und $-\sqrt{-1}$ im Zähler dafür an die Stelle tritt. Worin besteht denn aber nun die Verbesserung des Recs.? — Ueberhaupt möchte es dem Recs. ungemein schlecht bekommen, wenn er einem Analysten der ersten Ordnung, wie Cauchy, analytische Kunstgriffe beibringen wollte. Wie der Ausdruck für $cotx$ aus denen für $sinx$ oder $cosx$ oder $tangx$ erhalten wird, hat Cauchy allerdings angegeben und sogar auch für $secx$ und $cosecx$, was nicht einmal nöthig gewesen wäre, weil dergleichen Transformationen auch dem ersten Anfänger bekannt sind. Die Schreibart $sinx.dx$ ist mindestens üblicher, als die vom Recs. vorgeschlagene $dx.sinx$, weil das Differenzial der unabhängigen Veränderlichen bekanntlich immer zuletzt gesetzt wird.

Was Recs. über die 14te Vorlesung sagt, gibt wieder die sprechendsten Beweise für seine Ignoranz; denn Cauchy müßte ein eben so unwissender Analyst sein, wie Recs., wenn er jede algebraische Function in reelle Factoren des »ersten« und »dritten« Grades zerlegen wollte, wie Recs. anführt, weil, wie jeder Anfänger weiß, die imaginären Wurzeln immer paarweise in den Gleichungen vorkommen. Wenn aber Recs. behauptet, der Lehrsatz 1 Seite 154 sei mehr eine »Erklärung« so gibt er dadurch deutlich zu erkennen, daß er nicht weiß, was man unter einem Lehrsatze versteht.

Da die übrigen Einwürfe, welche Recs. über den folgenden Theil des in Rede stehenden Werkes macht, eben so ungegründet und theils dieselben sind, wie die bereits widerlegten, so wollen wir es hinsichtlich der speciellen Nachweisung ihrer Absurdität der Kürze wegen dabei bewenden lassen und nur im Allgemeinen bemerken, daß alle noch folgenden Tadel des Recs. entweder seiner Unwissenheit oder Unwahrheit zugeschrieben werden müssen, so wie die ganze Recension ein Beweis einer unverzeihlichen Frechheit und einer großen Unwissenheit ist, wovon die erste wahrscheinlich ihren Grund darin hat, daß es Recs. ungeachtet der letztern durch der Wissenschaft fremdartige Hülfsmittel dennoch gelungen ist, sich in seiner Sphäre unter

Laien oder Anfängern ein gewisses Ansehen von wissenschaftlich mathematischer Bildung zu geben, und seine Umgebung durch inhaltsleeres Gewäsch zu täuschen; denn wer das Raisonnement des Recs. nicht näher prüft, prüfen will oder prüfen kann, der sollte glauben, der Mann hätte bei aller seiner Unwissenheit Recht.

Es scheint Hauptzweck des Recs. gewesen zu sein, namentlich den Uebersetzer in ein schlechtes Licht zu stellen, weil er fortwährend nur von Druckfehlern, Ergänzungen und Verbesserungen spricht. Die wesentlichen Druckfehler sind aber angegeben und die nicht angegebenen fallen auch dem ungeübtesten Anfänger in die Augen, wozu namentlich die vom Recs. angeführten gehören. Was aber die vom Recs. erwähnten Ergänzungen und Verbesserungen (?) anlangt, so habe ich schon eben ausdrücklich bemerkt, daß ich mich schämen würde, wenn ich das Cauchy'sche Werk mit solchen Zusätzen ausgestattet hätte. — Von der Sturm'schen Bestimmungsmethode der reellen Wurzeln der Gleichungen, welche ich, wie ich gewiß weiß, eher gekannt habe, wie Recs., habe ich absichtlich nicht mehr, als das Wesentlichste, den Hauptlehrsatz und dessen Beweis hinzugefügt, weil theils die dabei erforderlichen Operationen mehr in die eigentliche Algebra gehören und theils, weil diese Methode in der Ausübung fast denselben Schwierigkeiten unterliegt, wie die Langrange'sche Auflösungsmethode der Gleichungen. Recs. hat also auch hier wieder ein schiefes Urtheil gefällt. Ja, wenn es sich der Mühe lohnte und hier nicht zu weit führte, so ließe sich leicht zeigen, daß jede Bemerkung des Recs., welche er aus sich selbst geschöpft, entweder unsinniges, oder nichtssagendes Raisonnement ist. Wer aber eine gediegene und gehaltvolle Recension von Cauchy's Differenzialrechnung sucht, der findet sie in den Berliner Jahrbüchern für wissenschaftliche Kritik vom Jahre 1827 Nro. 153—158, und um die Richtigkeit des Urtheiles unsers Recs. über das in Rede stehende Werk unabhängig von unserer Meinung darzuthun, wollen wir nur einige Worte aus der eben erwähnten Recension eines der ausgezeichnetsten deutschen Analysten, des Herrn Professors Dirksen in Berlin, hersetzen: »Der Verfasser schreitet nun zur Ermittelung der Regeln für das Differenziren einer Function von einer veränderlichen Größe; nicht ermüdend, stets auf die Bedingungen aufmerksam zu machen, unter denen die erhaltenen Resultate nur ihre Gültigkeit haben. Nicht, wie solches so oft zu geschehen pflegt, unterwirft er die imaginären Functionen derselben Operation, sondern kraft einer

besondern Definiton. Auf diese Weise stets mit dem klarsten Bewußtsein und der größten Sicherheit vorwärts schreitend, dürfte der Verfasser hier ein der Nachahmung nicht unwerthes Beispiel gegeben haben. Um die Umsicht und die durchgreifende Behandlungsweise des Verfassers näher zu bezeichnen, mag hier die Regel folgen, welche in der 6ten Vorlesung für die Bestimmung der Maxima und Minima gegeben wird (siehe oben)« .....

»Es muß eingeräumt werden, daß der Verfasser sich durchgängig Formen und Auffassungsweisen bedient, die sich, vermöge der sie durchdringenden Bestimmtheit, von dem gedankenlosen Zeichenspiele und den mechanischen Verrichtungen, welche man wohl hin und wieder als Basis der Analysis bezeichnet findet, auf das Vortheilhafteste unterscheiden.« ..... »Ein Anhang bildet den Beschluß dieses, in Hinsicht des Strebens nach Allgemeinheit eben so sehr, als des nach Gründlichkeit ausgezeichneten, sehr gehaltreichen, dem gegenwärtigen Zustande der mathematischen Wissenschaften besonders angemessenen Werkes.«

Vorlesungen

über

die Anwendungen

der

Infinitesimalrechnung

auf die

Geometrie.

Vorlesungen

über

die Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie.

Vorerinnerungen.

Ableitung einiger Formeln der analytischen Geometrie.

Ehe wir die geometrischen Anwendungen der Infinitesimalrechnung erörtern, wird es zweckmäßig sein, einige vorläufige Begriffe und Formeln aufzustellen. Dieses soll daher der Gegenstand sein, womit wir uns zunächst beschäftigen wollen.

Wir werden die Lage eines Punktes im Raume gewöhnlich vermittelst dreier geradliniger Coordinaten x, y, z in Beziehung auf die drei Axen der x, der y und der z, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen und durch die gegenseitigen Durchschnitte der drei Coordinatenebenen der yz, der zx und der xy gebildet werden, bestimmen. Diese Coordinaten sind rechtwinklig, wenn die drei Axen auf einander senkrecht sind. Eine durch einen beliebigen Punkt des Raumes gezogene und nach beiden Seiten unbestimmt verlängerte gerade Linie wollen wir eine Axe nennen, und sagen, daß eine solche Axe in zwei, an den betrachteten Punkt stoßende Halbaxen, wovon jede als nach einer Richtung unbestimmt verlängert angesehen wird, getheilt wird. Jede dieser beiden Halbaxen hat also immer eine bestimmte Richtung. Betrachtet man z. B. die drei Axen der x, y und z, so wird jede derselben im Anfangspunkte in zwei Halbaxen getheilt, wovon auf der einen die positiven und auf der andern die negativen Coordinaten genommen werden.

Hiernach ist einleuchtend, daß zwei Axen oder zwei gerade Linien, welche so gezogen sind, daß sie sich schneiden, immer zwei Winkel, einen spitzen und einen stumpfen, mit einander bilden, wenn man nur Winkel von höchstens 180^0 in Betracht zieht, während zwei Richtungen oder zwei Halbaxen, welche an einen gegebenen Punkt grenzen, nur einen Winkel mit einander bilden, welcher bald spitz und bald stumpf ist. Wenn zwei Richtungen oder zwei Halbaxen von zwei verschiedenen Punkten des Raumes ausgehen, so werden sie als denselben Winkel mit einander bildend angesehen, wel-

chen zwei von einem und demselben Punkte zu ihnen parallel gezogene und nach demselben Sinne verlängerte Halbaren mit einander bilden. Der Winkel, welchen zwei Richtungen mit einander bilden, ist daher immer völlig bestimmt und dasselbe gilt von den Winkeln, welche eine bestimmte Richtung mit den Halbaren der positiven Coordinaten bildet.

Denken wir uns nun, daß durch einen willkührlich im Raume genommenen Punkt (O) zwei Halbaren OA, OB gezogen seien und daß ein um diesen Punkt (O) beweglicher Halbmesser von einer unbestimmten Länge in der Ebene dieser beiden Halbaren eine drehende Bewegung annimmt, vermöge welcher er den Winkel AOB beschreibt, wenn er von der Lage OA zu der Lage OB übergeht. Ferner wollen wir annehmen, daß durch den Punkt (O) eine dritte, außerhalb der Ebene AOB liegende Halbare gezogen sei. Ein Beobachter, dessen Füße so auf der Ebene stehen, daß er sich gegen die letzte Halbare stützt, sieht den beweglichen Radius von seiner Rechten gegen die Linke, oder von seiner Linken gegen die Rechte vorübergehen, welches wir dadurch ausdrücken wollen, daß wir sagen: die drehende Bewegung finde von der Rechten gegen die Linke oder von der Linken gegen die Rechte statt. *) Für eine auf der andern Seite der Ebene AOB liegende, durch den Punkt O gezogene Halbare würde dieselbe Rotationsbewegung offenbar nach entgegengesetztem Sinne stattfinden.

Betrachten wir nun einen dreiseitigen körperlichen Winkel, dessen Kanten die drei an den Punkt (O) stoßenden Halbaren OA, OB, OC sind, und denken wir uns, daß ein, durch den Punkt (O) gezogener beweglicher Halbmesser von einer unbestimmten Länge den Umfang des körperlichen Winkels durchläuft, so daß er successive auf den drei Flächen AOB, BOC, COA liegt; so ist seine Rotationsbewegung auf jeder dieser Flächen eine Rotationsbewegung von der Rechten gegen die Linke, oder von der Linken gegen die Rechte um die außerhalb dieser Fläche liegende Kante. Ferner sieht man leicht ein, daß die drei Bewegungen auf den drei Flächen von einerlei Art sind. Wir wollen z. B. annehmen, daß sich die drei in Rede stehenden Halbaren auf die Halbaren der positiven Coordinaten reduciren und mit den Richtungen OX, OY, OZ zusammenfallen. Wenn diese Halbaren die Lage haben, welche man gewöhnlich annimmt, so finden die drei Rotationsbewegungen um diese drei Halbaren von der Rechten gegen die Linke statt, wenn der bewegliche Halbmesser, indem er den Umfang des körperlichen Winkels durchläuft, successive von der Lage OX zu der Lage OY und von dieser zu der Lage OZ übergeht. Wenn die Halbare der positiven z auf der andern Seite der Ebene der xy läge, so würde die Rotationsbewegung von der Rechten gegen die Linke statt finden, wenn der bewegliche Radius successive die drei Lagen:

*) Dieses Mittel, durch welches sich die beiden Arten der Rotationsbewegungen, welche eine, um einen gegebenen Punkt sich drehende Ebene annehmen kann, leicht unterscheiden lassen, hat Ampère in seiner Theorie de l'electricité dynamique angewandt.

OX, OZ, OY

annähme, um alsdann direct von der Lage OY zu der Lage OX überzugehen.

Um die beiden Arten der Bewegung genau unterscheiden zu können, welche ein beweglicher Halbmesser annehmen kann, der durch den Anfangspunkt geht und successive die drei Flächen des körperlichen Winkels $OXYZ$ durchläuft, wollen wir sagen, daß dieser bewegliche Halbmesser in jeder der Coordinatenebenen eine directe (rechtläufige) Rotationsbewegung habe, wenn er successive von der Lage OX zu der Lage OY und von dieser zu der Lage OZ übergeht. Dagegen werden wir im entgegengesetzten Falle sagen, daß dieser Halbmesser eine retrograde (rückläufige) Bewegung habe. Wenn man also die gewöhnliche Lage der Halbaxen der positiven Coordinaten annimmt, so finden die directen Rotationsbewegungen um diese Halbaxen von der Rechten gegen die Linke und die retrograden von der Linken gegen die Rechte statt.

Eine, von einem als fest betrachteten Punkte (A) nach einem als beweglich angenommenen Punkte (B) gezogene gerade Linie AB wird im Allgemeinen mit dem Namen Radiusvector bezeichnet. Nennen wir diesen Radiusvector R,

$$x_0, y_0, z_0$$

die Coordinaten des Punktes (A),

$$x, y, z$$

die des Punktes (B) und

$$a, b, c$$

die Winkel, welche die Richtung AB mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet; so sind

$$\pi - a, \pi - b, \pi - c$$

die Winkel, welche derselbe Radiusvector mit den Halbaxen der negativen Coordinaten bildet. Ferner ist die Orthogonalprojection des Radiusvectors auf die Axe der x nach einem bekannten Lehrsatze der Trigonometrie dem Producte aus diesem Radiusvector und dem Cosinus des spitzen Winkels gleich, welchen derselbe mit der, in einem gewissen Sinne verlängerten Axe der x bildet. Diese Projection wird folglich, wenn der Winkel a spitz ist, durch das Product:

$$R \cos a$$

ausgedrückt und durch das Product:

$$R \cos (\pi - a) = - R \cos a,$$

wenn der Winkel a stumpf ist, d. h. ihr Zahlenwerth ist in beiden Fällen dem des Productes:

$$R \cos a$$

gleich. Ueberdies ist einleuchtend, 1) daß der projicirte Radiusvector, wenn man ihm die Projection des Punktes A zum Anfangspunkte gibt, nach dem Sinne der positiven oder der negativen x gerichtet ist, je nachdem der Winkel a spitz oder stumpf ist; und 2) daß das

Product $R \cos a$ im ersten Falle positiv und im zweiten negativ ist. Folglich ist das Product $R \cos a$ der mit dem Zeichen + oder — genommenen Projection des Radiusvectors R auf die Axe der x gleich, jenachdem diese Projection nach dem Sinne der positiven oder der negativen x gerichtet ist.

Eben so sind die Producte $R \cos b$, $R \cos c$ resp. den Orthogonalprojectionen des Radiusvectors R auf die Axen der y und z gleich, indem sie bald mit dem Zeichen + und bald mit dem Zeichen — genommen werden, jenachdem jede dieser Projectionen nach dem Sinne der positiven oder negativen Coordinaten gerichtet ist.

Die drei mit dem eben angeführten Zeichen genommenen Orthogonalprojectionen des Radiusvectors wollen wir in Zukunft seine algebraischen Projectionen auf die Axen der x, der y und der z nennen. Sie sind nach dem Vorhergehenden den drei Producten:

$$R \cos a,\ R \cos b,\ R \cos c$$

gleich. Ferner überzeugt man sich leicht, daß sie den drei Differenzen:

$$x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0$$

gleich sind, wenn die Coordinatenaxen auf einander senkrecht sind. Man hat folglich alsdann:

$$(1)\quad x - x_0 = R \cos a,\ y - y_0 = R \cos b,\ z - z_0 = R \cos c.$$

Da endlich der Radiusvector und seine drei Orthogonalprojectionen resp. die Diagonale und die Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipedums bilden, so ist das Quadrat des Radiusvectors der Summe der Quadrate seiner drei Projectionen gleich, und man hat folglich in der gemachten Voraussetzung:

$$(2)\quad R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

oder:

$$(3)\quad R = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}.$$

Aus den Gleichungen (1) folgt nun:

$$(4)\quad \begin{cases} \cos a = \dfrac{x - x_0}{R} = \dfrac{x - x_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}}, \\ \cos b = \dfrac{y - y_0}{R} = \dfrac{y - y_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}}, \\ \cos c = \dfrac{z - z_0}{R} = \dfrac{z - z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z - z_0)^2]^{1/2}}, \end{cases}$$

und folglich:

$$(5)\quad \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1.$$

Die Gleichungen (4) sind zur Bestimmung der Winkel a, b, c, welche der von dem Punkte (x_0, y_0, z_0) nach dem Punkte (x, y, z)

gezogene Radiusvector mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet, hinreichend. Sie können durch die eine Formel:

$$(6) \qquad \frac{x-x_0}{\cos a} = \frac{y-y_0}{\cos b} = \frac{z-z_0}{\cos c} = R.$$

ersetzt werden.

Die Formel (5) drückt die Relation aus, welche immer zwischen den drei Winkeln stattfindet, die eine, nach einem beliebigen Sinne verlängerte Gerade mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet.

Wir wollen nun annehmen, daß der Punkt (x_0, y_0, z_0) der Anfangspunkt der Coordinaten selbst wird. Wenn man den von diesem Anfangspunkte nach dem Punkte (x, y, z) gezogenen Radiusvector mit r und die Winkel, welche derselbe mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet, durch α, β, γ bezeichnet; so erhält man für die Formeln (1), (2), (4) die folgenden:

$$(7) \qquad x = r\cos\alpha,\ y = r\cos\beta,\ z = r\cos\gamma,$$

$$(8) \qquad r = [x^2+y^2+z^2]^{1/2},$$

$$(9) \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r},\ \cos\beta = \frac{y}{r},\ \cos\gamma = \frac{z}{r},$$

und es findet auch zwischen den Winkeln α, β, γ die Relation:

$$(10) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

statt.

Wenn der Punkt (A) in der Ebene der xy liegt, so ist $z = 0$, und die Gleichungen (8) und (9) verwandeln sich in:

$$(11) \qquad r = [x^2+y^2]^{1/2},$$

$$(12) \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r},\ \cos\beta = \frac{y}{r},\ \cos\gamma = 0.$$

Da sich ferner alsdann die Formel (10) auf:

$$(13) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$$

reducirt, so folgt daraus:

$$(14) \qquad \cos\beta = \pm\sqrt{(1-\cos^2\alpha)} = \pm\sin\alpha.$$

Wir wollen uns nun in derselben Voraussetzung einen beweglichen Radiusvector denken, welcher von der Lage OX, worin er mit der Halbaxe der positiven x zusammenfällt, sich um den Anfangspunkt in der Ebene der xy mit einer directen Rotationsbewegung drehet, und nachdem er um diesen Anfangspunkt mehrere Umdrehungen gemacht hat, in die Lage OA kommt. Wenn man den Winkel, welchen er beschrieben hat, und welcher größer als 360° sein kann, p nennt, so sind r und p die sogenannten Polarcoordinaten des Punktes (A). Nun sieht man aber leicht ein, daß allgemein:

$$(15) \qquad x = r\cos p,\ y = r\sin p,$$

und folglich:

$$\cos p = \frac{x}{r}, \quad \sin p = \frac{y}{r} \tag{16}$$

ist.

Vergleicht man diese letzten Gleichungen mit den Gleichungen (12), so ergibt sich:

$$\cos p = \cos \alpha, \quad \sin p = \cos \beta. \tag{17}$$

Hieraus folgt nicht, daß die Winkel α und β nothwendig dem Winkel p und seinem Supplemente gleich sind; denn die Winkel α und β müssen immer kleiner als 180^0 bleiben, während der Winkel p über jede Grenze hinaus wachsen kann. Man muß sogar bemerken, daß einem einzigen Punkte (A) unendlich viele Werthe von p entsprechen, welche um Vielfache der Zahl $2\pi = 360^0$ von einander verschieden sind. Endlich kann man auch annehmen, daß der bewegliche Radiusvector den Winkel p mit einer retrograden Bewegung beschrieben habe, um von der Lage OX zu der Lage OA überzugehen, und man kann folglich diesem Winkel einen negativen Werth beilegen, während die Winkel α und β nach der Annahme nothwendig positive, zwischen den Grenzen o und π liegende Größen sind.

Wir wollen nun einige Aufgaben in der Kürze durchgehen, welche sich leicht vermittelst des Vorhergehenden auflösen lassen.

Aufgabe 1. Die Gleichungen der geraden Linie zu finden, welche durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) geht und, nach einem gewissen Sinne verlängert, mit den Halbaxen der positiven Coordinaten die Winkel a, b, c bildet.

Auflösung. Die gesuchten Gleichungen sind in einer Formel enthalten, welche sich aus den Gleichungen (1) ergibt, nämlich:

$$\frac{x - x_0}{\cos a} = \frac{y - y_0}{\cos b} = \frac{z - z_0}{\cos c}. \tag{18}$$

Diese Formel drückt aus, daß die algebraischen Projectionen eines auf der gesuchten Gevaden genommenen Radiusvectors resp. den Cosinus der Winkel proportional sind, welche dieser Radiusvector mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet. Sie gibt die drei Gleichungen:

$$\frac{y - y_0}{\cos b} = \frac{z - z_0}{\cos c}, \quad \frac{z - z_0}{\cos c} = \frac{x - x_0}{\cos a}, \quad \frac{x - x_0}{\cos a} = \frac{y - y_0}{\cos b}, \tag{19}$$

welche zu den Projectionen der gesuchten Geraden auf die drei Coordinatenebenen gehören und wovon die letzte eine Folgerung aus den beiden ersten ist. Da ferner nach einem Lehrsatze der Analysis (s. algebr. Analys. Note II, Lehrsatz 14.) die Formel:

$$\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} = \frac{u''}{v''} = \text{etc.}\ldots$$

immer die folgende:

$$\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} = \frac{u''}{v''} = \text{etc.} \ldots = \pm \frac{\sqrt{(u^2 + u'^2 + u''^2 + \ldots)}}{\sqrt{(v^2 + v'^2 + v''^2 + \ldots)}}$$

nach sich zieht, so ergibt sich aus der Formel (18) und der Gleichung (5):

$$(20) \qquad \frac{x - x_0}{\cos a} = \frac{y - y_0}{\cos b} = \frac{z - z_0}{\cos c}$$
$$= \pm [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}.$$

Im zweiten Theile dieser letzten Gleichung muß man das Zeichen + nehmen, wenn, wie vorausgesetzt wird, der Radiusvector, welcher mit den Axen die Winkel a, b, c bildet, von dem Punkte (x_0, y_0, z_0) gegen den Punkt (x, y, z) gerichtet ist, weil alsdann jeder der Brüche:

$$\frac{x - x_0}{\cos a}, \quad \frac{y - y_0}{\cos b}, \quad \frac{z - z_0}{\cos c}$$

eine positive Größe ist. Dagegen müßte man das Zeichen — nehmen, wenn der Radiusvector als von dem Punkte (x, y, z) nach dem Punkte (x_0, y_0, z_0) gehend angesehen wird. Im ersten Falle, wo man das Zeichen + nimmt, fällt offenbar die Formel (20) mit der Gleichung (6) zusammen.

Zusatz. Wenn der Punkt (x_0, y_0, z_0) der Anfangspunkt der Coordinaten ist, so reduciren sich die Formeln (18) und (19) auf:

$$(21) \qquad \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\cos \beta} = \frac{z}{\cos \gamma},$$

$$(22) \qquad \frac{y}{\cos \beta} = \frac{z}{\cos \gamma}, \quad \frac{z}{\cos \gamma} = \frac{x}{\cos \alpha}, \quad \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\cos \beta}.$$

Wenn man ferner $\gamma = \frac{\pi}{2}$ oder $\cos \gamma = 0$ setzte, so läge die gesuchte Gerade in der Ebene der xy und die Gleichungen (22) gäben:

$$(23) \qquad z = 0, \quad y = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} x = x \, tang \, p = \pm x \, tang \, \alpha.$$

Aufgabe 2. Den Winkel zu finden, welchen zwei in der Ebene der xy vom Anfangspunkte resp. nach den Punkten (x_0, y_0), (x, y) gezogene Radienvectoren mit einander bilden, sowie die Fläche des zwischen denselben liegenden Dreieckes.

Auflösung. Es seien (A), (B) die beiden betrachteten Punkte und (O) der Anfangspunkt der Coordinaten. Außerdem seien p_0, r_0 die Polarcoordinaten des Punktes (A), und p, r die des Punktes (B). Durch α_0 und α wollen wir die Winkel bezeichnen, welche die Radienvectoren OA, OB mit der Halbaxe der positiven x bilden und durch β_0, β die Winkel, welche sie mit der Halbaxe der positiven y bilden. Endlich wollen wir den von den beiden Radienvectoren gebildeten Winkel $AOB = \delta$ setzen. Ein beweglicher Ra-

diusvector, welcher dieſen Winkel, der nothwendig kleiner iſt, als 180°, beſchreibt, indem er von der Lage OA zu der Lage OB übergeht, hat nothwendig in der Ebene der xy eine beſtimmte directe oder retrograde Rotationsbewegung. Denken wir uns nun, daß der bewegliche Radiusvector, ehe er in die Lage OA kommt, indem er von der Lage OX ausgeht, vermöge einer directen Rotationsbewegung einen beliebigen Winkel beſchrieben habe, welcher größer ſein kann, als die Summe von vier rechten Winkeln; ſo iſt dieſer Winkel einer von den Werthen, welche man der Polarcoordinate p_0 beilegen kann. Ferner, wenn der Radiusvector, indem er von der Lage OA zu der Lage OB übergeht, ſeine Bewegung in demſelben Sinne fortſetzt; ſo iſt der Winkel $p_0+\delta$, welchen er beſchrieben hat, wenn er in die Lage OB gekommen iſt, einer von den Werthen, welche man der Polarcoordinate p beilegen kann. Man hat alſo in dieſer Vorausſetzung:

$$p=p_0+\delta. \tag{24}$$

Wenn dagegen der Radiusvector eine retrograde Bewegung annehmen muß, um von der Lage OA in die Lage OB zu kommen, ſo iſt einer der Werthe von p offenbar:

$$p=p_0-\delta, \tag{25}$$

und man kann folglich ſetzen:

$$p-p_0=\pm\delta, \tag{26}$$

wo das Zeichen + oder − genommen werden muß, jenachdem die Rotationsbewegung des Radiusvectors, indem er von der Lage OA zu der Lage OB übergeht, und den Winkel OAB beſchreibt, eine directe oder retrograde iſt. Nun folgt aber aus der Formel (26):

$$\cos\delta=\cos(p-p_0)=\cos p_0\cos p+\sin p_0\sin p, \tag{27}$$

$$\pm\sin\delta=\sin(p-p_0)=\cos p_0\sin p-\cos p\sin p_0, \tag{28}$$

und da überdies vermöge der Formeln (17)

$$\begin{cases}\cos p=\cos\alpha, & \sin p=\cos\beta,\\ \cos p_0=\cos\alpha_0, & \sin p_0=\cos\beta_0\end{cases} \tag{29}$$

iſt, ſo erhält man endlich:

$$\cos\delta=\cos\alpha_0\cos\alpha+\cos\beta_0\cos\beta, \tag{30}$$

$$\pm\sin\delta=\cos\alpha_0\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta_0. \tag{31}$$

Wenn man für die Formeln (29) die folgenden:

$$\begin{cases}\cos p=\dfrac{x}{r}, & \sin p=\dfrac{y}{r},\\ \cos p_0=\dfrac{x_0}{r_0}, & \sin p_0=\dfrac{y_0}{r_0}\end{cases} \tag{32}$$

ſubſtituirte, ſo verwandelten ſich die Gleichungen (30) und (31) reſp. in:

(33) $$\cos\delta = \frac{x_0 x + y_0 y}{r_0 r},$$

(34) $$\pm \sin\delta = \frac{x_0 y - x y_0}{r_0 r}.$$

Zur Bestimmung des Winkels δ, welcher immer als positiv und kleiner als π angesehen wird, braucht man sich also nur der Formel (30) oder (33) zu bedienen. Was die Fläche des zwischen den beiden Radienvectoren r_0, r liegenden Dreieckes betrifft, so ist sie nach einem bekannten Lehrsatze der Trigonometrie der Hälfte des Productes:

(35) $$r_0 r \sin\delta = \pm (x_0 y - x y_0)$$

gleich. Es ist wohl zu bemerken, daß die Differenz $x_0 y - x y_0$ im zweiten Theile der Gleichung (35) dasselbe Zeichen haben muß, als der Winkel δ im zweiten Theile der Gleichung (26). Folglich drückt:

(36) $$\pm \tfrac{1}{2}(x_0 y - x y_0)$$

die Fläche des Dreieckes AOB, oder dieselbe Fläche, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, aus, jenachdem die Rotationsbewegung eines beweglichen, von der Lage OA zu der Lage OB übergehenden Radiusvectors eine directe oder retrograde ist.

Zusatz 1. Wenn die Radienvectoren OA, OB Theile derselben Geraden sind, so hat man:

(37) $$\delta = o \text{ oder } \delta = \pi \text{ und } \sin\delta = o.$$

Alsdann folgt aus den Gleichungen (28), (31) und (34):

(38) $$tang\, p = tang\, p_0,$$

(39) $$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_0} = \frac{\cos\beta}{\cos\beta_0} = \pm \frac{\sqrt{(\cos^2\alpha + \cos^2\beta)}}{\sqrt{(\cos^2\alpha_0 + \cos^2\beta_0)}} = \pm 1,$$

(40) $$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \pm \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{\sqrt{(x_0^2 + y_0^2)}} = \pm \frac{r}{r_0}.$$

Die doppelten Zeichen in den Formeln (39) und (40) müssen sich auf das Zeichen + reduciren, wenn die Radienvectoren r_0, r nach demselben Sinne gerichtet sind, und auf das Zeichen —, wenn diese Radienvectoren nach entgegengesetztem Sinne gerichtet sind.

Zusatz 2. Wenn die Radienvectoren OA, OB auf einander senkrecht sind, so hat man:

(41) $$\delta = \frac{\pi}{2} \text{ und } \cos\delta = o.$$

Alsdann folgt aus den Formeln (27), (30) und (33):

(42) $$1 + tang\, p \cdot tang\, p_0 = o,$$

(43) $$\cos\alpha_0 \cos\alpha + \cos\beta_0 \cos\beta = o,$$

(44) $$x_0 x + y_0 y = o.$$

Dieſe drei letzten Gleichungen können leicht in einander umgewandelt werden.

Aufgabe 3. Den Winkel zwiſchen zwei, von dem Anfangspunkte nach den im Raume liegenden Punkten (x_0, y_0, z_0) und (x, y, z) gezogenen Radienvectoren, ſowie die Fläche des zwiſchen dieſen liegenden Dreieckes zu finden.

Auflöſung. Es ſeien (A) und (B) wieder die beiden betrachteten Punkte, r_0, r die Radienvectoren OA, OB und δ der Winkel, welchen ſie mit einander bilden. Ferner ſeien α_0, β_0, γ_0 und α, β, γ die Winkel, welche dieſe Radienvectoren mit den, nach dem Sinne der poſitiven Coordinaten verlängerten Halbaren der x, der y und der z bilden, und endlich wollen wir die Entfernung $AB = R$ ſetzen; ſo iſt nach bereits abgeleiteten Formeln:

$$(45)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{r},\ \cos\beta = \dfrac{y}{r},\ \cos\gamma = \dfrac{z}{r}, \\ \cos\alpha_0 = \dfrac{x_0}{r_0},\ \cos\beta_0 = \dfrac{y_0}{r_0},\ \cos\gamma_0 = \dfrac{z_0}{r_0}; \end{cases}$$

$$(46)\quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2; \end{cases}$$

$$(47)\quad \begin{aligned} R^2 &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \\ &= r^2 + r_0^2 - 2(x_0 x + y_0 y + z_0 z) \\ &= r^2 + r_0^2 - 2 r_0 r\,(\cos\alpha_0 \cos\alpha + \cos\beta_0 \cos\beta \\ &\qquad + \cos\gamma_0 \cos\gamma). \end{aligned}$$

Ferner iſt nach einem bekannten Lehrſatze der Trigonometrie in dem Dreiecke OAB, deſſen Seiten r, r_0 und R ſind:

$$(48)\quad \begin{aligned} \cos\delta &= \frac{r^2 + r_0^2 - R^2}{2 r_0 r} = \frac{x_0 x + y_0 y + z_0 z}{r_0 r} \\ &= \cos\alpha_0 \cos\alpha + \cos\beta_0 \cos\beta + \cos\gamma_0 \cos\gamma. \end{aligned}$$

Dieſe letzte Formel iſt zur Beſtimmung des zwiſchen den Grenzen o und π liegenden Winkels δ hinreichend. Aus derſelben ergibt ſich leicht der Werth von

$$\sin\delta = \sqrt{(1 - \cos^2\delta)},$$

und man findet:

$$(49)\quad \begin{aligned} \sin\delta &= \frac{[(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (x_0 x + y_0 y + z_0 z)^2]^{1/2}}{r_0 r} \\ &= \frac{[(y_0 z - y z_0)^2 + (z_0 x - z x_0)^2 + (x_0 y - x y_0)^2]^{1/2}}{r_0 r} \\ &= \left\{ \begin{matrix} (\cos\beta_0 \cos\gamma - \cos\beta \cos\gamma_0)^2 \\ + (\cos\gamma_0 \cos\alpha - \cos\gamma \cos\alpha_0)^2 \\ + (\cos\alpha_0 \cos\beta - \cos\alpha \cos\beta_0)^2 \end{matrix} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Multiplicirt man nun das Product der Radienvectoren r_0 und r durch den Sinus des Winkels δ, so erhält man:

$$(50) \quad r_0 r \sin\delta = [(y_0 z - y z_0)^2 + (z_0 x - z x_0)^2 + (x_0 y - x y_0)^2]^{1/2},$$

wovon die Hälfte, nämlich:

$$(51) \quad \tfrac{1}{2} r_0 r \sin\delta = \left[\left(\frac{y_0 z - y z_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{z_0 x - z x_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_0 y - x y_0}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

genau die Fläche des Dreieckes OAB ausdrückt.

Zusatz 1. Wenn die Radienvectoren OA, OB Theile derselben geraden Linie sind, so hat man:

$$(37) \quad \delta = o \text{ oder } \delta = \pi \text{ und } \sin\delta = o.$$

Alsdann folgt aus der Formel (49):

$$(52) \quad y_0 z - y z_0 = 0,\ z_0 x - z x_0 = 0,\ x_0 y - x y_0 = 0,$$

$$(53) \quad \begin{aligned} &\cos\beta_0 \cos\gamma - \cos\beta \cos\gamma_0 = 0, \\ &\cos\gamma_0 \cos\alpha - \cos\gamma \cos\alpha_0 = 0, \\ &\cos\alpha_0 \cos\beta - \cos\alpha \cos\beta_0 = 0 \end{aligned}$$

und folglich:

$$(54) \quad \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0} = \pm\frac{r}{r_0},$$

$$(55) \quad \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_0} = \frac{\cos\beta}{\cos\beta_0} = \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma_0} = \pm 1.$$

Für das doppelte Zeichen in den Formeln (54) und (55) muß das Zeichen + genommen werden, wenn die Radienvectoren r_0, r nach demselben Sinne gerichtet sind, und das Zeichen —, wenn sie nach entgegengesetztem Sinne gerichtet sind.

Zusatz 2. Wenn die Radienvectoren OA, OB auf einander senkrecht sind, so hat man:

$$(41) \quad \delta = \frac{\pi}{2} \text{ und } \cos\delta = 0$$

und aus der Gleichung (48) folgt:

$$(56) \quad x_0 x + y_0 y + z_0 z = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$(57) \quad \cos\alpha_0 \cos\alpha + \cos\beta_0 \cos\beta + \cos\gamma_0 \cos\gamma = 0.$$

Umgekehrt, wenn die Bedingung (57) erfüllt wird, so ist der Winkel δ ein rechter und die Radienvectoren r_0, r sind auf einander senkrecht.

Zusatz 3. Die Projectionen des Dreieckes OAB auf die Coordinatenebenen sind resp. den Zahlenwerthen der Größen:

$$(58) \qquad \frac{y_0 z - y z_0}{2}, \quad \frac{z_0 x - z x_0}{2}, \quad \frac{x_0 y - x y_0}{2}$$

gleich (siehe Aufgabe 2.) Hiernach folgt aber aus der Formel (51) offenbar, daß die ebene Fläche OAB der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate ihrer Projectionen gleich ist, und da dieser Lehrsatz für den Flächeninhalt eines Dreieckes bewiesen ist, so läßt er sich leicht auf den einer beliebigen ebenen Fläche ausdehnen.

Zusatz 4. Betrachten wir nun zwei Halbaren, welche nicht mehr von dem Anfangspunkte der Coordinaten, sondern von zwei verschiedenen Punkten des Raumes ausgehen und mit den, nach dem Sinne der positiven Coordinaten verlängerten Aren der x, y und z wieder Winkel bilden, welche durch die Buchstaben $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, α, β, γ bezeichnet werden. Diese beiden Halbaren bilden einen Winkel mit einander, welcher dem gleich ist, welchen zwei, vom Anfangspunkte der Coordinaten aus nach demselben Sinne zu ihnen parallel gezogene Halbaren mit einander bilden. Wenn man also den Winkel der beiden betrachteten Halbaren mit δ bezeichnet, so hat man wieder:

$$(48) \qquad \cos\delta = \cos\alpha_0 \cos\alpha + \cos\beta_0 \cos\beta + \cos\gamma_0 \cos\gamma, \text{ und}$$

$$(49) \qquad \sin\delta = [(\cos\beta_0 \cos\gamma - \cos\beta \cos\gamma_0)^2 + (\cos\gamma_0 \cos\alpha - \cos\alpha \cos\gamma_0)^2 + (\cos\alpha_0 \cos\beta - \cos\alpha \cos\beta_0)^2]^{1/2}$$

Wenn sich der Winkel δ auf 0^0 oder 180^0 reducirt, so werden die beiden Halbaren zu einander parallel und man hat:

$$(55) \qquad \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_0} = \frac{\cos\beta}{\cos\beta_0} = \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma_0} = \pm 1,$$

wo das Zeichen + oder — genommen werden muß, jenachdem die beiden Halbaren nach demselben oder nach entgegengesetztem Sinne verlängert sind. Wenn der Winkel δ ein rechter wird, so kann man durch eine der Halbaren eine, auf der andern senkrechte Ebene legen und man findet:

$$(57) \qquad \cos\alpha_0 \cos\alpha + \cos\beta_0 \cos\beta + \cos\gamma_0 \cos\gamma = 0.$$

Zusatz 5. Stützt man sich auf die Formel (48), so kann man die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z leicht in andere rechtwinklige Coordinaten ξ, η, ζ verwandeln, welche auf den, wieder durch den Punkt (O) gehenden Aren gezählt, und nach dem Sinne der positiven Coordinaten verlängert sind und mit den Halbaren der positiven x, y, z resp. die Winkel $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ bilden. Denn es sei r wieder der vom Anfangspunkte nach dem Punkte (x, y, z) gezogene Radiusvector, so hat man:

$$(59) \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Da ferner die Cosinus der Winkel, welche einer Seits dieser Radiusvector und anderer Seits die Halbaxe der positiven ξ mit den Halbaxen der positiven x, y, z bildet, resp. durch:

$$\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r};$$

$$\cos\alpha_0, \cos\beta_0, \cos\gamma_0$$

ausgedrückt werden; so drückt die Summe der Producte, welche man erhält, wenn man diese Cosinus paarweise mit einander multiplicirt, nämlich:

$$\frac{x\cos\alpha_0 + y\cos\beta_0 + z\cos\gamma_0}{r} \tag{60}$$

vermöge der Formel (48) den Cosinus des Winkels aus, welchen die Halbaxe der positiven ξ und der Radiusvector r mit einander bilden. Da dieser letzte Cosinus auch durch das Verhältniß $\frac{\xi}{r}$ ausgedrückt werden kann, so hat man nothwendig:

$$\frac{\xi}{r} = \frac{x\cos\alpha_0 + y\cos\beta_0 + z\cos\gamma_0}{r},$$

und folglich:

$$\begin{cases} \xi = x\cos\alpha_0 + y\cos\beta_0 + z\cos\gamma_0, \text{ und eben so findet man:} \\ \eta = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1, \\ \xi = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2. \end{cases} \tag{61}$$

Die Gleichungen (61) sind zur Bestimmung der Winkel ξ, η, ζ, als Functionen von x, y, z, und umgekehrt, hinreichend. Man kann darin die Coordinaten ξ, η, ζ mit den Coordinaten x, y, z vertauschen, wenn man zugleich α_1 mit β_0, α_2 mit γ_0 und β_2 mit γ_1 vertauscht. Auf diese Weise findet man:

$$\begin{cases} x = \xi\cos\alpha_0 + \eta\cos\alpha_1 + \zeta\cos\alpha_2, \\ y = \xi\cos\beta_0 + \eta\cos\beta_1 + \zeta\cos\beta_2, \\ z = \xi\cos\gamma_0 + \eta\cos\gamma_1 + \zeta\cos\gamma_2. \end{cases} \tag{62}$$

Da endlich die neuen Coordinatenaxen auf einander senkrecht sind, so leisten die Cosinus der Winkel, welche sie mit den Axen der x, y, z bilden, nicht blos den Bedingungen:

$$\begin{cases} \cos^2\alpha_0 + \cos^2\beta_0 + \cos^2\gamma_0 = 1, \\ \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1, \\ \cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1, \end{cases} \tag{63}$$

sondern auch den folgenden:

$$(64)\quad \begin{cases} \cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0, \\ \cos\alpha_2\cos\alpha_0+\cos\beta_2\cos\beta_0+\cos\gamma_2\cos\gamma_0=0, \\ \cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1=0 \end{cases}$$

Genüge. Dieſelben Bedingungsgleichungen würde man erhalten, wenn man die durch die Formeln (61) gegebenen Werthe von ξ, η, ζ in die Gleichung:

$$(59)\qquad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=x^2+y^2+z^2$$

ſubſtituirte und in beiden Theilen der Gleichung die Coefficienten der Quadrate x^2, y^2, z^2 und der doppelten Producte $2yz$, $2zx$, $2xy$ einander gleich ſetzte. Auch wollen wir bemerken, daß man mit Hülfe der Bedingungsgleichungen (63) und (64) leicht die Formeln (61) aus den Formeln (62) ableiten kann.

Aufgabe 4. Die Gleichungen einer Ebene zu finden, welche durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) geht und auf der Geraden ſenkrecht iſt, welche mit den Halbaxen der poſitiven Coordinaten die Winkel λ, μ, ν bildet.

Auflöſung. Es ſeien x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes der geſuchten Ebene und R der von dem Punkte (x_0, y_0, z_0) nach dem Punkte (x, y, z) gezogene Radiusvector, ſo ſind die Coſinus der Winkel, welche dieſer Radiusvector mit den Halbaxen der poſitiven Coordinaten bildet, reſp.:

$$\frac{x-x_0}{R},\ \frac{y-y_0}{R},\ \frac{z-z_0}{R}$$

und der Coſinus des Winkels, welchen dieſer Radiusvector mit der gegebenen Geraden bildet, iſt vermöge der Formel (48):

$$(65)\quad \frac{(x-x_0)\cos\lambda+(y-y_0)\cos\mu+(z-z_0)\cos\nu}{R}$$

Da ferner der Radiusvector R in der geſuchten Ebene liegt, ſo kann er als mit jeder auf dieſer Ebene ſenkrechten Geraden einen rechten Winkel bildend angeſehen werden. Folglich iſt der durch die Formel (65) ausgedrückte Coſinus Null, und man erhält als die geſuchte Gleichung folgende:

$$(66)\quad (x-x_0)\cos\lambda+(y-y_0)\cos\mu+(z-z_0)\cos\nu=0.$$

Zuſatz 1. Wir wollen das von dem Anfangspunkte der Coordinaten auf die betrachtete Ebene gefällte Perpendikel durch k bezeichnen und annehmen, daß λ, μ, ν die Winkel bezeichnen, welche dieſes Perpendikel mit den Halbaxen der poſitiven Coordinaten bildet. Endlich wollen wir durch r den vom Anfangspunkte nach dem Punkte (x, y, z) gezogenen Radiusvector bezeichnen, ſo iſt der Coſinus des ſpitzen Winkels zwiſchen dieſem Radiusvector und dem Perpendikel k offenbar:

$$\frac{x}{r}\cos\lambda+\frac{y}{r}\cos\mu+\frac{z}{r}\cos\nu$$

$$=\frac{x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu}{r}.$$

Da derselbe Cosinus auch durch $\frac{k}{r}$ ausgedrückt werden kann, so hat man folglich:

$$\frac{x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu}{r}=\frac{k}{r},$$

und hieraus folgt:

(67) $$x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu=k.$$

Dieses ist die Form, unter welcher die Gleichung der Ebene erscheint, wenn statt der Coordinaten x_0, y_0, z_0 die Constante k in dieselbe eingeführt wird. Um übrigens von der Gleichung (67) zu der Gleichung (66) zurückzugehen, braucht man nur den Größen x, y, z die besondern Werthe x_0, y_0, z_0 beizulegen und dann die Constante k zwischen der so erhaltenen Gleichung, nämlich:

(68) $$x_0\cos\lambda+y_0\cos\mu+z_0\cos\nu=k,$$

und der Gleichung (67) zu eliminiren.

Zusatz 2. Setzt man der Kürze wegen:

(69) $$\frac{\cos\lambda}{k}=A,\ \frac{\cos\mu}{k}=B,\ \frac{\cos\nu}{k}=C,$$

so ergibt sich, wenn die Constante k immer positiv gesetzt wird:

(70) $$k=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

(71) $$\cos\lambda=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\mu=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\nu=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

und die Formel (67) verwandelt sich in:

(72) $$Ax+By+Cz=1.$$

Diese letzte Gleichung ist folglich die einer Ebene, welche auf einer so gezogenen Halbare senkrecht ist, daß diese mit den Halbaren der positiven Coordinaten die durch die Formeln (71) bestimmten Winkel λ, μ, ν bildet, und welche diese Halbare in einer Entfernung k vom Anfangspunkte schneidet, wo der Werth von k durch die Formel (70) gegeben wird.

Zusatz 3. Wenn man

(73) $$\frac{\cos\lambda}{k}=\frac{A}{D},\ \frac{\cos\mu}{k}=\frac{B}{D},\ \frac{\cos\nu}{k}=\frac{C}{D}$$

setzte, so erhielte man für die Formeln (70) und (71) die folgenden:

$$(74) \qquad k = \pm \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$(75) \quad \cos\lambda = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\mu = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\nu = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

in welchen man das Zeichen + oder — nehmen muß, jenachdem die Größe D positiv oder negativ ist. Ferner wäre die auf die Form

$$(76) \qquad Ax + By + Cz = D$$

zurückgeführte Gleichung (67) die Gleichung der durch den Endpunkt des Radiusvectors k, welcher mit den Halbaxen der positiven Coordinaten die Winkel λ, μ, ν bildet, auf diesen Radiusvector senkrecht gelegten Ebene.

Aufgabe 5. Wenn die Winkel α_0, β_0, γ_0 und α, β, γ, welche zwei vom Anfangspunkte nach den Punkten (A) und (B) gezogene Radienvectoren OA, OB mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bilden, gegeben sind, die Winkel λ, μ, ν zu bestimmen, welche das im Anfangspunkte auf der Ebene des Dreieckes AOB errichtete Perpendikel OP mit denselben Halbaxen bildet.

Auflösung. Da die Gerade OP auf jeder der Halbaxen OA, OB senkrecht sein muß, so hat man vermöge der Formel (57):

$$(77) \quad \begin{cases} \cos\alpha_0\cos\lambda + \cos\beta_0\cos\mu + \cos\gamma_0\cos\nu = 0, \\ \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0. \end{cases}$$

Ferner müssen die Winkel λ, μ, ν der Bedingungsgleichung:

$$(78) \qquad \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

Genüge leisten. Die Formeln (77) und (78) sind zur Bestimmung der Werthe der Größen $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, ohne Rücksicht auf ihre Zeichen, hinreichend. Wenn man zwischen den Gleichungen (77) successive diese drei Größen eliminirt, so erhält man folgende Gleichungen:

$$(79) \quad \frac{\cos\lambda}{\cos\beta_0\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma_0} = \frac{\cos\mu}{\cos\gamma_0\cos\alpha - \cos\gamma\cos\alpha_0} = \frac{\cos\nu}{\cos\alpha_0\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta_0}.$$

Es seien nun x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Punktes (A), x, y, z die des Punktes (B), r_0, r die Radienvectoren OA, OB und δ der Winkel, welchen sie mit einander bilden; so ergibt sich aus der Formel (79) mit Berücksichtigung der Gleichungen (49) und (78):

$$(80)\quad \frac{\cos\lambda}{\cos\beta_0\cos\gamma-\cos\beta\cos\gamma_0}=\frac{\cos\mu}{\cos\gamma_0\cos\alpha-\cos\gamma\cos\alpha_0}$$

$$=\frac{\cos\nu}{\cos\alpha_0\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta_0}.$$

$$=\pm\frac{\sqrt{(\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu)}}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(\cos\beta_0\cos\gamma-\cos\beta\cos\gamma_0)^2\\+(\cos\gamma_0\cos\alpha-\cos\gamma\cos\alpha_0)^2\\+(\cos\alpha_0\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta_0)^2\end{array}\right\}}}=\pm\frac{1}{\sin\delta},$$

und folglich:

$$(81)\quad \frac{\cos\lambda}{y_0z-yz_0}=\frac{\cos\mu}{z_0x-zx_0}=\frac{\cos\nu}{x_0y-xy_0}=\pm\frac{1}{r_0r\sin\delta}.$$

Das doppelte Zeichen im letzten Theile der Gleichungen (80) und (81) drückt aus, daß es zwei Systeme von Werthen der Winkel λ, μ, ν gibt, welche den beiden Richtungen entsprechen, in welchen man die Gerade OP vom Punkte (O) aus verlängern kann. Wenn diese Gerade nach einer bestimmten Richtung gezogen ist, so muß das doppelte Zeichen auf das Zeichen + reducirt werden, und aus den Gleichungen (80) und (81) folgt alsdann

$$(82)\quad \left\{\begin{array}{l}\cos\lambda=\dfrac{\cos\beta_0\cos\gamma-\cos\beta\cos\gamma_0}{\sin\delta}=\dfrac{y_0z-yz_0}{r_0r\sin\delta},\\[2ex]\cos\mu=\dfrac{\cos\gamma_0\cos\alpha-\cos\gamma\cos\alpha_0}{\sin\delta}=\dfrac{z_0x-zx_0}{r_0r\sin\delta},\\[2ex]\cos\nu=\dfrac{\cos\alpha_0\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta_0}{\sin\delta}=\dfrac{x_0y-xy_0}{r_0r\sin\delta}.\end{array}\right.$$

Wenn die Gerade OP in entgegengesetztem Sinne verlängert wird, so verändern die Cosinus der Winkel λ, μ, ν das Zeichen und es treten für sie ihre Supplemente an die Stelle. Es bleibt blos noch die Richtung zu bestimmen, nach welcher die Gerade OP gezogen werden muß, damit die Gleichungen (82) erfüllt werden, oder was noch einfacher ist, damit jeder der drei Brüche:

$$(83)\quad \frac{\cos\lambda}{y_0z-yz_0},\quad \frac{\cos\mu}{z_0x-zx_0},\quad \frac{\cos\nu}{x_0y-xy_0},$$

und folglich der letzte derselben einen positiven Werth bekommt. Nun kann man sich aber leicht überzeugen, daß diese Bedingung erfüllt wird, wenn das Perpendikel OP nach einem solchen Sinne verlängert ist, daß ein beweglicher Radiusvector, welcher sich um den Punkt (O) drehen und die drei Flächen des körperlichen Winkels $OABP$ nach einander mit einer directen Rotationsbewegung durchlaufen muß, genöthigt ist, von der Lage OA zu der Lage OB überzugehen, um den Winkel AOB zu beschreiben. Denn wir wollen diese Voraussetzung annehmen, so hat der bewegliche Radiusvector,

wenn er von der Lage OA zu der Lage OB übergeht, nicht blos um die Halbare OP, sondern auch um die Halbare der positiven z offenbar eine directe Rotationsbewegung, wenn diese beiden Halbaren auf derselben Seite der Ebene AOB liegen, d. h. wenn sie einen spitzen Winkel mit einander bilden, oder was dasselbe ist, wenn der Cosinus dieses Winkels, nämlich $\cos v$, positiv ist. Wenn dagegen $\cos v$ negativ oder der Winkel v stumpf ist, so ist die Bewegung des beweglichen Radius um die Halbare der positiven z eine retrograde, weil die beiden Halbaren nicht mehr auf derselben Seite der Ebene OAB liegen. Es seien ferner OA', OB' die Projectionen der Radienvectoren OA, OB auf die Ebene der xy oder die in dieser Ebene von dem Anfangspunkte der Coordinaten nach den Punkten (x_0, y_0) und (x, y) gezogenen Radienvectoren. Während der bewegliche Radius in der Ebene OAB von der Lage OA zu der Lage OB übergeht, geht seine Projection in der Ebene der xy von der Lage OA' zu der Lage OB' über, und die Bewegung dieser Projection um die Axe der z ist offenbar von derselben Art, als die des beweglichen Radius, d. h. eine directe, oder retrograde, jenachdem die Größe $\cos v$ einen positiven oder negativen Werth hat. Ferner folgt aus den obigen Bemerkungen (s. Aufg. 2), daß die Differenz:

$$x_0 y - x y_0$$

im ersten Falle positiv und zweiten negativ ist. Folglich sind diese Differenz und Cosinus v in der gemachten Voraussetzung Größen von demselben Zeichen, oder mit andern Worten, der Bruch:

$$\frac{\cos v}{x_0 y - x y_0}$$

ist positiv, was bewiesen werden sollte.

Aufgabe 6. Wenn die Winkel $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ gegeben sind, welche drei vom Anfangspunkte resp. nach den Punkten (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) gezogene Radienvectoren mit den Halbaren der positiven Coordinaten bilden, den Winkel zu bestimmen, welchen jeder Radiusvector mit der Ebene der beiden andern bildet, so wie das Volumen der zwischen diesen Radienvectoren liegenden dreiseitigen Pyramide.

Auflösung. Es seien (A), (B), (C) die drei betrachteten Punkte, und wir wollen die Radienvectoren OA, OB, OC mit r_0, r_1, r_2 bezeichnen. Außerdem seien δ_0, δ_1, δ_2 die Winkel, welche resp. die Radienvectoren r_1 und r_2, r_2 und r_0, r_0 und r_1 mit einander bilden. Endlich wollen wir durch ε_0, ε_1, ε_2 die Winkel bezeichnen, welche jeder der Radienvectoren r_0, r_1, r_2 mit der Ebene der beiden andern bildet und annehmen, daß ein beweglicher Radius, welcher sich um den Punkt (O) dreht, und die drei Flächen des körperlichen Winkels $OABC$ mit einer directen Rotationsbewegung durchläuft, nach der Ordnung, welche die Indices 0, 1, 2 angeben, wenn sie die drei ersten Glieder einer steigenden arithmetischen Progression bilden, mit den Radienvectoren r_0, r_1, r_2 zusam-

menfällt. Bezeichnet man in dieſer Vorausſetzung die Winkel, welche eine auf der Ebene des Dreieckes AOB ſenkrechte Halbare OP, die auf derſelben Seite dieſer Ebene liegt als der Radiusvector r_2, mit den Halbaren der poſitiven Coordinaten bildet, mit λ, μ, ν; ſo findet man (ſ. vorherg. Aufg.):

$$(84)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\beta_1\cos\gamma_0}{\sin\delta_2} = \dfrac{y_0x_1 - y_1x_0}{r_0r_1\sin\delta_2}, \\ \cos\mu = \dfrac{\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\gamma_1\cos\alpha_0}{\sin\delta_2} = \dfrac{z_0x_1 - z_1x_0}{r_0r_1\sin\delta_2}, \\ \cos\nu = \dfrac{\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_0}{\sin\delta_2} = \dfrac{x_0y_1 - x_1y_0}{r_0r_1\sin\delta_2}. \end{cases}$$

Da ferner der Winkel COP zwiſchen dem Radiusvector r_2 und der Halbare OP ein ſpitzer iſt, ſo iſt ſein Coſinus poſitiv und folglich dem Sinus des ſpitzen oder ſtumpfen Winkels ε_2 zwiſchen demſelben Radiusvector und der auf der Halbare OP ſenkrechten Ebene OAB gleich. Man hat folglich:

$$\sin\varepsilon_2 = \cos(COP) = \cos\alpha_2\cos\lambda + \cos\beta_2\cos\mu + \cos\gamma_2\cos\nu,$$

und wenn man für die Größen $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ ihre aus den Gleichungen (84) gezogenen Werthe ſubſtituirt; ſo findet man:

$$(85)\quad \sin\varepsilon_2 = \frac{\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha_0\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\alpha_0\cos\beta_2\cos\gamma_1 \\ +\cos\alpha_1\cos\beta_2\cos\gamma_0 - \cos\alpha_1\cos\beta_0\cos\gamma_2 \\ +\cos\alpha_2\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\alpha_2\cos\beta_1\cos\gamma_0 \end{array}\right\}}{\sin\delta_2}$$

$$= \frac{x_0y_1z_2 - x_0y_2z_1 + x_1y_2z_0 - x_1y_0z_2 + x_2y_0z_1 - x_2y_1z_0}{r_0r_1r_2\sin\delta_2}.$$

Um aus der vorhergehenden Formel den Werth von $\sin\varepsilon_0$ und $\sin\varepsilon_1$ abzuleiten, braucht man nur für die Größe $\sin\delta_2$ ſucceſſive $\sin\delta_0$ und $\sin\delta_1$ zu ſubſtituiren. Hierdurch erhält man zwei neue Gleichungen, welche nebſt der Gleichung (85) in der Gleichung:

$$(86)\quad \sin\delta_0\sin\varepsilon_0 = \sin\delta_1\sin\varepsilon_1 = \sin\delta_2\sin\varepsilon_2 = \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha_0\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\alpha_0\cos\beta_2\cos\gamma_1 \\ +\cos\alpha_1\cos\beta_2\cos\gamma_0 - \cos\alpha_1\cos\beta_0\cos\gamma_2 \\ +\cos\alpha_2\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\alpha_2\cos\beta_1\cos\gamma_0 \end{array}\right\}$$

oder was auf daſſelbe hinausläuft, in der folgenden:

$$(87)\quad \left\{\begin{array}{l} r_0\, r_1\, r_2 \sin\delta_0 \sin\varepsilon_0 = x_0\, r_1\, r_2 \sin\delta_1 \sin\varepsilon_1 = \\ r_0\, r_1\, r_2 \sin\delta_2 \sin\varepsilon_2 = x_0\, y_1\, z_2 - x_0\, y_2\, z_1 + \\ x_1\, y_2\, z_0 - x_1\, y_0\, z_2 + x_2\, y_0\, z_1 - x_2\, y_1\, z_0. \end{array}\right.$$

enthalten sind.

Was das Volumen der dreiseitigen Pyramide $OABC$ anlangt, so ist es dem Producte aus dem Flächeninhalte des Dreieckes OAB, d. h.

$$\tfrac{1}{2}\, r_0\, r_1 \sin\delta_2$$

und dem dritten Theile des vom Punkte C auf die Ebene dieses Dreieckes gefällten Perpendikels gleich. Da nun dieses Perpendikel offenbar durch das Product:

$$r_2 \cos(COP) = r_2 \sin\varepsilon_2$$

ausgedrückt wird, so folgt, daß das gesuchte Volumen durch die Größe:

$$(88)\qquad \tfrac{1}{6}\, r_0\, r_1\, r_2 \sin\delta_2 \sin\varepsilon_2,$$

wofür man

$$(89)\quad \tfrac{1}{6}\left\{\begin{array}{l} x_0\, y_1\, z_2 - x_0\, y_2\, z_1 + x_1\, y_2\, z_0 - \\ x_1\, y_0\, z_2 + x_2\, y_0\, z_1 - x_2\, y_1\, z_0 \end{array}\right\}$$

setzen kann, ausgedrückt wird. Um die in diesem letzten Ausdrucke zwischen den Klammern stehenden Glieder mit ihren Zeichen zu erhalten, braucht man nur die drei Factoren x, y, z mit einander zu multipliciren, indem man sie in der natürlichen Ordnung schreibt, welche die directe Rotationsbewegung des die drei Flächen des von den Halbaxen der positiven Coordinaten gebildeten körperlichen Winkels successive durchlaufenden beweglichen Radius angibt und dann unten an diese Factoren die Indices **0**, **1**, **2** in einer beliebigen Ordnung zusetzen. Bildet man alle möglichen Combinationen, so erhält man sechs verschiedene Producte, wovon jedes mit dem Zeichen + oder — genommen werden muß, jenachdem die Aufeinanderfolge der drei Indices **0**, **1**, **2** eine directe oder retrograde Bewegung eines successive die drei Flächen des körperlichen Winkels $OABC$ durchlaufenden beweglichen Radius anzeigt. Dieselbe Regel ist auch auf die Bestimmung der Zeichen der Glieder im zweiten Theile der Gleichung (86) anwendbar, wenn man für die Factoren x, y, z die Factoren $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ substituirt. Diese Regel, zu welcher wir gelangt sind, indem wir annahmen, daß ein beweglicher Radius, welcher die drei Flächen des körperlichen Winkels $OABC$ mit einer directen Rotationsbewegung durchläuft, mit den Radienvectoren r_0, r_1, r_2 in der durch die Combination **0**, **1**, **2** angegebenen Ordnung, successive zusammenfällt, würde ebenfalls auch bei der entgegengesetzten Voraussetzung stattfinden. Denn da alsdann die Werthe von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ das Zeichen verändern (s. vorherg. Aufg.), so würden der Ausdruck (89) und die zweiten Theile der Gleichungen (86), (87) auch das Zeichen verändern, so daß die Glieder, welche vorher das Zeichen + hatten, z. B. das Glied $x_0\, y_1\, z_2$, jetzt das

Zeichen — bekommen. Aber alsdann ist einleuchtend, daß die Combination 0, 1, 2 statt einer directen Rotationsbewegung des beweglichen Radius auf den Flächen des körperlichen Winkels $OABC$ eine retrograde Rotationsbewegung desselben andeuten würde.

Zusatz 1. Das Parallelepipedum, wovon drei Kanten mit den Radienvectoren r_0, r_1, r_2 zusammenfallen, hat ein sechs mal größeres Volumen, als das der Pyramide $OABC$, und folglich ist es dem Zahlenwerthe des Polynomes:

$$(90) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_0 y_1 z_2 - x_0 y_2 z_1 + x_1 y_2 z_0 \\ - x_1 y_0 z_2 + x_2 y_0 z_1 - x_2 y_1 z_0 \end{array} \right\}$$

gleich.

Zusatz 2. Die Formel (86) gibt das Mittel an die Hand, die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes des Raumes in geradlinige, auf den positiven Halbaxen OA, OB, OC d. h. auf den Radienvectoren r_0, r_1, r_2 gezählte Coordinaten ξ, η, ζ zu verwandeln. Denn es sei r der vom Anfangspunkte nach dem Punkte (x, y, z) gezogene Radiusvector, und wir wollen annehmen, daß die Radienvectoren r_0, r_1, r_2 in einer solchen Ordnung aufeinander folgen, damit die Formel (86) stattfindet. Wenn alsdann die Radienvectoren r_0, r auf derselben Seite der Ebene OBC liegen, so drückt der Ausdruck, welchen man erhält, wenn man den zweiten Theil der Gleichung (86) durch $\sin \delta_0$ dividirt und in diesem zweiten Theile $\frac{x}{r}$ für $\cos \alpha_0$, $\frac{y}{r}$ für $\cos \beta_0$ und $\frac{z}{r}$ für $\cos \gamma_0$ substituirt, nämlich:

$$(91) \qquad \frac{\left\{ \begin{array}{l} x(\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\beta_2 \cos\gamma_1) \\ + y(\cos\gamma_1 \cos\alpha_2 - \cos\gamma_2 \cos\alpha_1) \\ + z(\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\alpha_2 \cos\beta_1) \end{array} \right\}}{r \sin \delta_0}$$

den Sinus des Winkels aus, welchen der Radiusvector r mit der Ebene BOC bildet, und das Product aus diesem Ausdrucke und r, nämlich:

$$(92) \qquad \frac{\left\{ \begin{array}{l} x(\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\beta_2 \cos\gamma_1) \\ + y(\cos\gamma_1 \cos\alpha_2 - \cos\gamma_2 \cos\alpha_1) \\ + z(\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\alpha_2 \cos\beta_1) \end{array} \right\}}{\sin \delta_0}$$

drückt das vom Punkte (x, y, z) auf die in Rede stehende Ebene gefällte Perpendikel aus. Die Ausdrücke (91) und (92) würden denselben Sinus und dasselbe Perpendikel, mit dem Zeichen — genommen, ausdrücken, wenn der Radiusvector r nicht mehr auf derselben Seite der Ebene BOC als der Radiusvector r_0 läge. Ferner kann man sich leicht überzeugen, daß das Product:

(93) $\xi \sin \varepsilon_0$:

auch das im ersten Falle mit dem Zeichen + und im zweiten mit dem Zeichen — genommene fragliche Perpendikel ausdrückt. Setzt man nun den Ausdruck (92) dem Producte (93) gleich, so erhält man:

$$(94)\quad \xi = \frac{\left\{\begin{array}{l} x(\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\beta_2 \cos\gamma_1) \\ +y(\cos\gamma_1 \cos\alpha_2 - \cos\gamma_2 \cos\alpha_1) \\ +z(\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\alpha_2 \cos\beta_1) \end{array}\right\}}{\sin\delta_0 \sin\varepsilon_0}.$$

Hat man auf diese Weise den Werth von ξ berechnet, so bildet man ebenso die Werthe der Coordinaten η, ζ. Berücksichtigt man alsdann die Formel (86) und setzt der Kürze wegen:

$$(95)\quad D = \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha_0 \cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\alpha_0 \cos\beta_2 \cos\gamma_1 \\ +\cos\alpha_1 \cos\beta_2 \cos\gamma_0 - \cos\alpha_1 \cos\beta_0 \cos\gamma_2 \\ +\cos\alpha_2 \cos\beta_0 \cos\gamma_1 - \cos\alpha_2 \cos\beta_1 \cos\gamma_0 \end{array}\right\},$$

so erhält man die Gleichungen:

$$(96)\quad \left\{\begin{array}{l} \xi = \dfrac{\left\{\begin{array}{l} x(\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\beta_2 \cos\gamma_1) \\ +y(\cos\gamma_1 \cos\alpha_2 - \cos\gamma_2 \cos\alpha_1) \\ +z(\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\alpha_2 \cos\beta_1) \end{array}\right\}}{D} \\ \eta = \dfrac{\left\{\begin{array}{l} x(\cos\beta_2 \cos\gamma_0 - \cos\beta_0 \cos\gamma_2) \\ +y(\cos\gamma_2 \cos\alpha_0 - \cos\gamma_0 \cos\alpha_2) \\ +z(\cos\alpha_2 \cos\beta_0 - \cos\alpha_0 \cos\beta_2) \end{array}\right\}}{D} \\ \zeta = \dfrac{\left\{\begin{array}{l} x(\cos\beta_0 \cos\gamma_1 - \cos\beta_1 \cos\gamma_0) \\ +y(\cos\gamma_0 \cos\alpha_1 - \cos\gamma_1 \cos\alpha_0) \\ +z(\cos\alpha_0 \cos\beta_1 - \cos\alpha_1 \cos\beta_0) \end{array}\right\}}{D} \end{array}\right.$$

welche ξ, η, ζ als Functionen von x, y, z und umgekehrt geben. Bei der Voraussetzung, welche wir zur Ableitung dieser Gleichungen gemacht haben, wird die Natur der directen Rotationsbewegungen des beweglichen Radius auf den Flächen des von den Halbaxen der positiven Coordinaten gebildeten körperlichen Winkels nicht geändert, wenn man für das System der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z das System der schiefwinkligen Coordinaten ξ, η, ζ substituirt, und die directe Rotationsbewegung in jeder Coordinatenebene um die auf dieser Ebene senkrechte Halbaxe erfolgt für beide Systeme gleichzeitig von der Rechten gegen die Linke oder von der Linken gegen die Rechte. In der entgegengesetzten Voraussetzung verwandelt der zweite Theil der Gleichung (86) sein Zeichen; da aber der Zähler

des Bruches im zweiten Theile der Gleichung (94) ebenfalls sein Zeichen verändern würde, so würde man immer aus der Verbindung dieser beiden Formeln die erste der Gleichungen (96) wieder erhalten. Die Formeln (96), worin die Größe D durch die Gleichung (95) bestimmt wird, finden also immer statt, in welcher Ordnung die Halbaxen der positiven Coordinaten in jedem der beiden Coordinatensysteme auch auf einander folgen mögen.

Um die Größen y und z aus den Gleichungen (96) zu eliminiren, braucht man diese Gleichungen nur, nachdem man sie resp. mit $\cos\alpha_0$, $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$ multiplicirt hat, zu addiren. Thut man dieses und berücksichtigt die Formel (95), so findet man:

$$(97)\qquad \begin{cases} x = \xi\cos\alpha_0 + \eta\cos\alpha_1 + \zeta\cos\alpha_2. \text{ Ebenso ergibt sich:} \\ y = \xi\cos\beta_0 + \eta\cos\beta_1 + \zeta\cos\beta_2, \\ z = \xi\cos\gamma_0 + \eta\cos\gamma_1 + \zeta\cos\gamma_2. \end{cases}$$

Diese letzten Formeln könnten leicht durch die einfache Betrachtung des successive auf die drei Axen der x, y, z projicirten Radiusvectors r erhalten werden. Sie sind von den Formeln (62) nicht verschieden, welche auf diese Weise also auch auf den Fall erstreckt sind, wenn man für ein System rechtwinkliger Coordinaten ein System schiefwinkliger substituiren will.

Zusatz 3. Die Formel (86) findet offenbar statt, von welchem Punkte die drei Radienvectoren r_0, r_1, r_2 auch ausgehen mögen, also auch in dem Falle, wo dieser Punkt nicht mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfällt.

Zusatz 4. Wenn die Radienvectoren r_0, r_1, r_2, statt von demselben Punkte, von drei verschiedenen Punkten des Raumes ausgingen, so würde jede der drei, durch die Formel (86) bestimmten Größen:

$$\sin\varepsilon_0,\ \sin\varepsilon_1,\ \sin\varepsilon_2$$

den Sinus des Winkels ausdrücken, welchen einer dieser Radienvectoren mit einer, zu den beiden anderen parallelen Ebene bildet.

Zusatz 5. Wenn die Radienvectoren r_0, r_1, r_2 auf einander senkrecht sind, so verificiren die Größen α_0, α_1, α_2, β_0, ... die Gleichungen (63) und (64). Zu gleicher Zeit reducirt sich jeder der Winkel:

$$\delta_0,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2$$

auf einen rechten, und wenn man annimmt, daß die Radienvectoren r_0, r_1, r_2 in einer solchen Ordnung auf einander folgen, daß die Gleichung (86) stattfindet; so ergibt sich aus derselben:

$$(98)\qquad 1 = \left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha_0\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\alpha_0\cos\beta_2\cos\gamma_1 \\ +\cos\alpha_1\cos\beta_2\cos\gamma_0 - \cos\alpha_1\cos\beta_0\cos\gamma_2 \\ +\cos\alpha_2\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\alpha_2\cos\beta_1\cos\gamma_0 \end{array} \right\}.$$

Wenn man die entgegengesetzte Voraussetzung machte, so veränderte der zweite Theil der Gleichung (86) das Zeichen und man fände:

$$(99)\quad 1=\left\{\begin{array}{l}-\cos\alpha_0\cos\beta_1\cos\gamma_2+\cos\alpha_0\cos\beta_2\cos\gamma_1\\-\cos\alpha_1\cos\beta_2\cos\gamma_0+\cos\alpha_1\cos\beta_0\cos\gamma_2\\-\cos\alpha_2\cos\beta_0\cos\gamma_1+\cos\alpha_2\cos\beta_1\cos\gamma_0\end{array}\right\}.$$

Die Formeln (98) und (99) sind beide in der folgenden:

$$(100)\quad 1=\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha_0\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\alpha_0\cos\beta_2\cos\gamma_1\\+\cos\alpha_1\cos\beta_2\cos\gamma_0-\cos\alpha_1\cos\beta_0\cos\gamma_2\\+\cos\alpha_2\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\alpha_2\cos\beta_1\cos\gamma_0\end{array}\right\}^2$$

enthalten, welche man direct erhalten kann, wenn man die Gleichungen (63) und (64) mit einander verbindet.

Aufgabe 7. Die kürzeste Entfernung zwischen der durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) gezogenen Geraden, welche mit den Halbaxen der positiven Coordinaten die Winkel $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ bildet und der durch den Punkt x_1, y_1, z_1 gezogenen Geraden, welche mit denselben Halbaxen die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ bildet, zu bestimmen.

Auflösung. Es sei r der vom Punkte (x_0, y_0, z_0) nach dem Punkte (x_1, y_1, z_1) gezogene Radiusvector; ferner sei δ der Winkel zwischen den gegebenen Geraden, indem jede nach dem, den Werthen der Winkel $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ oder $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ entsprechenden Sinne verlängert, ist und ε sei der von dem Radiusvector r mit einer zu den beiden Geraden parallelen Ebene gebildete Winkel; so ist das Product:

$$\sin\delta\,.\,\sin\varepsilon,$$

bis auf das Zeichen, der Größe gleich, welche man erhält, wenn man im zweiten Theile der Gleichung (86):

$$\frac{x_1-x_0}{r}\text{ für }\cos\alpha_2,\quad\frac{y_1-y_0}{r}\text{ für }\cos\beta_2,\quad\frac{z_1-z_0}{r}\text{ für }\cos\gamma_2$$

setzt (s. die vorherg. Aufg. u. Zus. 3. derf.).

Man erhält also:

$$(101)\quad \sin\varepsilon=\pm\frac{\left\{\begin{array}{l}(x_1-x_0)(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\beta_1\cos\gamma_0)\\+(y_1-y_0)(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\gamma_1\cos\alpha_0)\\+(z_1-z_0)(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_0)\end{array}\right\}}{r\sin\delta}$$

Wenn man ferner zu den beiden gegebenen Geraden eine parallele Ebene zieht und man projicirt den Radiusvector r auf eine, auf dieser Ebene senkrechte Axe, so ist die durch das Product $r\sin\varepsilon$ ausgedrückte Projection der Länge nach offenbar der kürzesten Entfernung zwischen den beiden gegebenen Geraden gleich. Diese kürzeste Entfernung wird folglich durch die Formel:

$$(102)\quad r\sin\varepsilon = \pm\left\{\begin{array}{l}[(x_1-x_0)(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\beta_1\cos\gamma_0)\\+(y_1-y_0)(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\gamma_1\cos\alpha_0)\\+(z_1-z_0)(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_0)]\end{array}\right\}.$$

Um zu wiſſen, ob der letzte Theil dieſer Gleichung das Zeichen + oder — haben muß, braucht man nur durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) zwei Halbaren zu ziehen, welche mit denen der poſitiven Coordinaten reſp. die Winkel $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ bilden, und zu unterſuchen, ob ein beweglicher Radiusvector, welcher den von dieſen beiden Halbaren gebildeten Winkel beſchreibt, indem er von der erſten zur zweiten übergeht, um den Radiusvector r eine directe oder retrograde Rotationsbewegung hat.

Zuſatz. Wenn die beiden gegebenen Geraden einander ſchneiden, ſo verſchwindet ihre kürzeſte Entfernung und man hat folglich:

$$(103)\quad 0 = \left\{\begin{array}{l}(x_1-x_0)(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\beta_1\cos\gamma_0)\\+(y_1-y_0)(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\gamma_1\cos\alpha_0)\\+(z_1-z_0)(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_0)\end{array}\right\}.$$

Erste Vorlesung.

Neigung einer ebenen Curve in einem gegebenen Punkte. — Gleichungen der Tangente und Normale an dieser Curve.

Betrachten wir eine ebene Curve, welche durch eine Gleichung zwischen zwei rechtwinkligen Coordinaten x, y ausgedrückt wird. Durch $\triangle x$, $\triangle y$ wollen wir die gleichzeitigen Incremente bezeichnen, welche die Coordinaten x und y bei dem Uebergange von einem Punkte zu einem anderen bekommen. Durch den Punkt (x, y) wollen wir eine zu der Axe der x parallele und nach dem Sinne der positiven x gerichtete Halbaxe ziehen. Endlich wollen wir uns vorstellen, daß sich ein, zuerst auf dieser Halbaxe liegender beweglicher Radiusvector mit einer directen oder retrograden Rotationsbewegung um den Punkt (x, y) dreht und daß derselbe, nachdem er eine oder mehrere Umdrehungen gemacht hat, mit der vom Punkte (x, y) nach dem Punkte $(x+\triangle x, y+\triangle y)$ gezogenen Sehne zusammenfällt. Wenn man den Winkel, welchen der Radiusvector beschrieben hat, mit $\tilde{\omega}$ bezeichnet, wo dieser Winkel mit dem Zeichen $+$ oder mit dem Zeichen $-$ genommen wird, jenachdem die Rotationsbewegung eine directe oder retrograde war; so ist es zur Bestimmung von *tang* $\tilde{\omega}$ hinreichend, in der zweiten der Formeln (23) (Seite 7) $\triangle x$ für x, $\triangle y$ für y und $\tilde{\omega}$ für p zu setzen. Man hat folglich:

$$(1) \qquad tang\,\tilde{\omega} = \frac{\triangle y}{\triangle x}.$$

Bezeichnet man ferner die veränderlichen Coordinaten der vom Punkte (x, y) nach dem Punkte $(x+\triangle x, y+\triangle y)$ gezogenen Sehne oder Secante mit ξ, η, so hat man auch:

$$(2) \qquad \frac{\eta - y}{\xi - x} = tang\,\tilde{\omega},$$

und folglich:

$$(3) \qquad \frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{\triangle y}{\triangle x} \quad \text{oder} \quad (4) \qquad \frac{\eta - y}{\triangle y} = \frac{\xi - x}{\triangle x}.$$

Man könnte übrigens diese letzte Gleichung direct aufstellen, wenn man die beiden Längen zwischen dem Punkte (x, y) und dem

Punkte (ξ, η) und zwischen dem Punkte (x, y) und $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ successive auf die Axen der x und y projicirte. Denn alsdann sieht man leicht ein, daß 1) jeder der Brüche:

$$\frac{\eta - y}{\Delta y}, \quad \frac{\xi - x}{\Delta x},$$

abgesehen vom Zeichen, dem Verhältnisse zwischen den Projectionen der beiden Längen auf dieselbe Axe gleich ist, und folglich dem Verhältnisse der Längen selbst, und 2) daß diese beiden Brüche Größen von einerlei Zeichen sind, nämlich positive Größen, wenn die Punkte (ξ, η) und $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ in Beziehung auf den Punkt (x, y) auf derselben Seite liegen, und negative Größen im entgegengesetzten Falle. Die auf diese Weise abgeleitete Formel (4) gilt offenbar auch für den Fall, wo x, y schiefwinklige Coordinaten bezeichnen.

Unter den positiven oder negativen Werthen, welche man für $\tilde{\omega}$ nehmen kann, ist der eine, ohne Rücksicht auf das Zeichen, dem spitzen Winkel gleich, welchen die durch die Punkte (x, y), $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ gehende Secante mit der Axe der x bildet und dieser Winkel wird die Neigung der Secante in Beziehung auf diese Axe genannt.

Denken wir uns nun, daß sich der Punkt $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ dem Punkte (x, y) unendlich nähert, so strebt die, diese beiden Punkte verbindende Secante, immer mehr und mehr mit einer gewissen Geraden zusammenzufallen, welche man eine Tangente an der gegebenen Curve nennt, und welche diese Curve im Punkte (x, y) berührt. Zur Bestimmung der Richtung dieser Tangente braucht man nur die Grenze zu suchen, gegen welche der Winkel $\tilde{\omega}$ convergirt, während die Incremente oder Differenzen Δx, Δy unendlich klein werden. Bezeichnet man diese Grenze mit ψ und nimmt x für die unabhängige Veränderliche, so folgt aus der Gleichung (1):

$$\text{(5)} \qquad tang\, \psi = \frac{dy}{dx} = y' \quad \text{(s. Differenzialr. S. 16.)}$$

Unter den positiven oder negativen Werthen von ψ, welche die vorhergehende Formel verificiren, gibt der kleinste, abgesehen vom Zeichen, den spitzen Winkel zwischen der Tangente und der Axe der x. Dieser Winkel wird die Neigung der Tangente oder die Neigung der Curve im Punkte (x, y) gegen die Axe der x genannt. Es sei τ der in Rede stehende Winkel, so wird die Formel (5) verificirt, wenn man

$$\psi = \pm \tau$$

setzt, wo das Zeichen + genommen werden muß, wenn die Ordinate y mit der Abscisse x zugleich wächst und das Zeichen — im entgegengesetzten Falle. Man hat also im ersten Falle $tang\, \tau = y'$, im zweiten Falle $tang\, \tau = -y'$, und man findet allgemein:

$$(6)\quad \begin{cases} tang\,\tau = \pm y', \quad sec\,\tau = \sqrt{(1+y'^2)}, \\ sin\,\tau = \pm \dfrac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}, \quad cot\,\tau = \pm \dfrac{1}{y'}, \\ cosec\,\tau = \pm \dfrac{\sqrt{(1+y'^2)}}{y'}, \quad cos\,\tau = \dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}. \end{cases}$$

Ferner wollen wir uns vorstellen, daß man in den Gleichungen (2), (3), und (4) die Differenzen $\triangle x$ und $\triangle y$ gegen die Grenze Null convergiren läßt, so findet man, indem man zu den Grenzen übergeht, und ξ, η nicht mehr die veränderlichen Coordinaten der Secante, sondern die der Tangente bezeichnen:

$$(7)\qquad \frac{\eta - y}{\xi - x} = tang\,\psi,$$

und

$$(8)\quad \frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{dy}{dx} = y', \text{ oder } (9)\quad \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\xi - x}{dx}.$$

Die Formeln (8) und (9) erstrecken sich offenbar auch auf den Fall, wo x und y schiefwinklige Coordinaten bezeichnen.

Wenn man durch den Punkt (x, y) der gegebenen Curve ein Perpendikel auf die Tangente zieht, so wird dasselbe die Normale der Curve in diesem Punkte genannt. Um die Gleichung dieser Normale aus der Formel (7) abzuleiten, braucht man offenbar nur $\psi \pm \frac{\pi}{2}$ für ψ zu setzen. Man hat also, wenn die Coordinaten der Normale durch ξ, η bezeichnet werden:

$$(10)\quad \frac{\eta - y}{\xi - x} = tang\left(\psi \pm \frac{\pi}{2}\right) = -cot\,\psi = -\frac{1}{tang\,\psi},$$

und folglich:

$$(11)\qquad \frac{\eta - y}{\xi - x} = -\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y'},$$

oder:

$$(12)\qquad (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0.$$

Es seien nun

$$(13)\qquad f(x, y) = 0$$

die Gleichung der gegebenen Curve und $\varphi(x, y)$, $\chi(x, y)$ die partiellen abgeleiteten Functionen von $f(x, y)$ in Beziehung auf die Veränderlichen x und y. Aus der Gleichung (13) folgt:

$$(14)\qquad \varphi(x, y)\,dx + \chi(x, y)\,dy = 0;$$

und wenn man diese letzte Gleichung mit den Gleichungen (9) und (12) verbindet, so findet man für die Gleichung der Tangente:

(15) $$(\xi - x)\,\varphi(x, y) + (\eta - y)\,\chi(x, y) = 0,$$

und für die Gleichung der Normale:

(16) $$\frac{\xi - x}{\varphi(x, y)} = \frac{\eta - y}{\chi(x, y)},$$

oder:

(17) $$(\xi - x)\,\chi(x, y) - (\eta - y)\,\varphi(x, y) = 0.$$

Um also die Gleichung der Tangente zu erhalten, braucht man in der Differenzialgleichung der Curve nur die endlichen Differenzen $\xi - x$, $\eta - y$ für die Differenziale dx, dy zu setzen. Um dagegen die Gleichung der Normale zu erhalten, muß man $\xi - x$ für dy und $-(\eta - y)$ für dx setzen.

Ferner kann man bemerken, daß die Gleichungen (14), (15), (16) und (17) nicht geändert würden, wenn die gegebene Curve nicht durch die Gleichung (13), sondern durch folgende:

(18) $$f(x, y) = c$$

gegeben wäre. Wenn man endlich in den Gleichungen (15) und (17) die Coordinaten ξ, η als constant und die Coordinaten x, y als veränderlich betrachtet, so erhält man nicht mehr die Gleichungen der Tangente und Normale an der Curve (13) oder (18), sondern die Gleichungen zwei neuer Curven, welche die geometrischen Oerter der Punkte sind, wo die Curve (18) und die daraus abgeleiteten, indem man die Constante c variiren läßt, von den Normalen oder Tangenten geschnitten werden, welche in dem Punkte ξ, η zusammenlaufen.

Wenn die Function $f(x, y)$ eine ganze Function vom Grade m ist, so sind die als Functionen der Veränderlichen x, y betrachteten ersten Theile der Gleichungen (15) und (17) im Allgemeinen von demselben Grade m. Alsdann sind die durch die Gleichungen (13), (18), (15) und (17) ausgedrückten Curven **Curven vom Grade m**. Wenn man außerdem annimmt, daß die Function $f(x, y)$ keine constanten Glieder enthält und man bezeichnet die Summe der Glieder vom Grade m mit u, die der Glieder vom Grade $m - 1$ mit v, die der Glieder vom Grade $m - 2$ mit w, &c.; so verwandeln sich die Gleichungen (18) und (15) in:

(19) $$u + v + w + \ldots = c,$$

(20) $$(\xi - x)\left[\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \ldots\right] + (\eta - y)\left[\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dy} + \ldots\right] = 0.$$

Wenn überdies $u, v, w, \ldots$ homogene Functionen sind, die erste vom Grade m, die zweite vom Grade $m - 1$, die dritte vom Grade $m - 2, \ldots$, so hat man nach dem Lehrsatze über die homogenen Functionen (s. Differenzialr. S. 207):

$$(21)\quad x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}=mu,\ x\frac{dv}{dx}+y\frac{dv}{dy}=(m-1)v,$$

$$x\frac{dw}{dx}+y\frac{dw}{dy}=(m-2)w,\ \ldots$$

Aus diesen letzten Formeln folgt in Verbindung mit den Gleichungen (19) und (20):

$$(22)\quad \xi\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}+\ldots\right)+\eta\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dy}+\ldots\right)$$
$$=mc-v-2w-\text{etc.}$$

Die Gleichung (22) drückt, wenn man die Coordinaten ξ,η allein als veränderlich betrachtet, die durch den Punkt (x, y) an die Curve (19) gezogene Tangente aus, und eine Curve vom Grade $m-1$, welche die Berührungspunkte der Curve (19) mit den im Punkte (ξ,η) zusammenlaufenden Tangenten enthält, wenn man die Coordinaten x, y allein als veränderlich betrachtet. Wenn sich die Gleichung (18) auf:

$$(23)\quad u=c$$

reducirt, wo u eine homogene Function des Grades m bezeichnet, so verwandelt sich die Gleichung (22) in:

$$(24)\quad \xi\frac{du}{dx}+\eta\frac{du}{dy}=mc.$$

Beispiel 1. Wir wollen den durch die endliche Gleichung:

$$(25)\quad x^2+y^2=R^2$$

ausgedrückten Kreis betrachten, so ist die Differenzialgleichung desselben:

$$(26)\quad x\,dx+y\,dy=0.$$

Hieraus ergibt sich für die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y):

$$(27)\quad x(\xi-x)+y(\eta-y)=0,$$

oder:

$$(28)\quad x\xi+y\eta=R^2,$$

und für die Gleichung der Normale:

$$y(\xi-x)-x(\eta-y)=0,$$

$$(29)\quad \frac{\xi}{x}=\frac{\eta}{y}.$$

Wenn man in der Gleichung (27) die Coordinaten x, y allein als veränderlich betrachtet, so drückt sie einen zweiten Kreis aus, welcher von dem Halbmesser des ersten unabhängig ist, und die Entfernung zwischen dem Anfangspunkte und dem Punkte ξ, η zum Durchmesser hat. Um die Aufgabe: durch den Punkt (ξ,η) eine

Tangente an den gegebenen Kreis zu ziehen, zu lösen, braucht man bekanntlich nur diesen neuen Kreis zu construiren. Man erhielte eine andere Auflösung derselben Aufgabe, wenn man die durch die Gleichung (28) ausgedrückte Gerade construirte, indem man x und y variiren läßt. Um aber diese Gerade zu ziehen, braucht man nur zu bemerken, 1) daß sie auf dem, zwischen dem Anfangspunkte und dem Punkte (ξ, η) liegenden Radiusvector senkrecht ist, und 2) daß die Entfernung des Anfangspunktes von dem Punkte, in welchem sie diesen Radiusvector schneidet, eine dritte Proportionale zu dem Halbmesser des gegebenen Kreises und zu dem Radiusvector selbst ist.

Was die Gleichung (29) anlangt, so gibt sie immer dieselbe Linie, man mag die Coordinaten des Punktes (ξ, η) oder (x, y) als veränderlich betrachten und sie drückt in jedem Falle, wie auch zu erwarten war, eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade aus.

Beispiel 2. Betrachten wir die durch die endliche Gleichung:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = K \tag{30}$$

ausgedrückte Ellipse oder Hyperbel, so ist die Differenzialgleichung dieser Curve:

$$(Ax + By)\,dx + (Bx + Cy)\,dy = 0. \tag{31}$$

Man erhält also für die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y):

$$(Ax + By)(\xi - x) + (Bx + Cy)(\eta - y) = 0, \tag{32}$$

oder:

$$Ax\xi + B(y\xi + x\eta) + Cy\eta = K; \tag{33}$$

und für die Gleichung der Normale:

$$(Ax + By)(\eta - y) = (Bx + Cy)(\xi - x). \tag{34}$$

Wenn man in den Gleichungen (32) und (33) die Coordinaten x, y allein als veränderlich betrachtet, so drückt die erste eine ähnliche Curve, wie die gegebene, aus, wovon ein Durchmesser mit dem vom Anfangspunkte nach dem Punkte (ξ, η) gezogenen Radiusvector zusammenfällt und die zweite drückt eine gerade Linie aus, welche man nur zu construiren braucht, wenn man durch den Punkt (ξ, η) eine Tangente an die gegebene Ellipse oder Hyperbel ziehen will.

Wenn die Ellipse oder Hyperbel auf ihre Axen und ihren Mittelpunkt bezogen wird, so hat ihre Gleichung die Form:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \pm 1, \tag{35}$$

wo a und b die Längen der Halbaxen bezeichnen. Alsdann verwandelt sich die Gleichung (32) in:

$$\frac{x\xi}{a^2} \pm \frac{y\eta}{b^2} = \pm 1. \tag{36}$$

Um die durch diese letzte Gleichung ausgedrückte Gerade, wenn die Coordinaten x, y allein als veränderlich betrachtet werden, zu

construiren, braucht man nur die Punkte zu suchen, wo sie die Axen schneidet. Nun lassen sich aber diese Punkte leicht finden, weil die Abscisse und Ordinate jedes derselben, da sie (abgesehen vom Zeichen) eine dritte Proportionale zu einer der Halbaxen und der Abscisse oder Ordinate des Punktes (ξ, η) ist, vom Zeichen abstrahirt, denselben Werth behält, wenn man für die Ellipse oder Hyperbel einen Kreis setzt, welcher eine der Axen $2a$, $2b$ zum Durchmesser hat. Nimmt man z. B. an, daß die Curve eine Ellipse ist und man beschreibt drei Kreise, wovon der Durchmesser des ersten der Axe $2a$, der des zweiten der Axe $2b$ und der des dritten dem vom Anfangspunkte nach dem Punkte (ξ, η) gezogenen Radiusvector gleich ist; so braucht man, um durch diesen Punkt an die Ellipse eine Tangente zu ziehen und die Berührungspunkte zu bestimmen, nur den Punkt, wo die, die Durchschnittspunkte des ersten und dritten Kreises verbindende Sehne die Axe der x trifft, mit dem Punkte, wo die die Durchschnittspunkte des zweiten und dritten Kreises verbindende Sehne die Axe der y schneidet, zu verbinden, und alsdann schneidet diese Gerade die Ellipse in den verlangten Punkten.

Beispiel 3. Betrachten wir nun die durch die endliche Gleichung:

$$y^2 = 2px \tag{37}$$

ausgedrückte Parabel, so ist die Differenzialgleichung dieser Curve:

$$y\,dy = p\,dx. \tag{38}$$

Man findet also für die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y):

$$y(\eta - y) = p(\xi - x), \tag{39}$$

oder:

$$y\eta - p\xi = px, \tag{40}$$

und für die Gleichung der Normale:

$$y(\xi - x) + p(\eta - y) = 0. \tag{41}$$

Wenn man in der Gleichung (39) die Coordinaten x, y allein als veränderlich betrachtet, so drückt sie eine Parabel von derselben Form als die gegebene aus, und deren, zu der Axe der x parallele Axe mit der Geraden $y = \frac{\eta}{2}$ zusammenfällt. Unter derselben Bedingung drückt die Gleichung (40) die Gerade aus, worin die Berührungspunkte der durch den Punkt (ξ, η) an die gegebene Parabel gezogenen beiden Tangenten liegen. Um aber diese Gerade zu construiren, braucht man nur zu bemerken, daß sie die Axe der x in dem Punkte schneidet, dessen Abscisse $= -\eta$ ist, und die Axe der y in einer doppelt so großen Entfernung vom Anfangspunkte als die Länge des vom Brennpunkte auf den vom Anfangspunkte nach dem Punkte (ξ, η) gezogenen Radiusvector gefällten Perpendikels.

Beispiel 4. Betrachten wir jetzt die Curve, welche die logarithmische Curve genannt wird, und deren Ordinate dem Lo-

garithmus der zugehörigen Abſciſſe gleich iſt. Wenn die Logarithmen in dem Syſteme von der Baſis A genommen und durch das Zeichen L angedeutet werden, ſo findet man, wenn man der Kürze wegen

$$L(e) = \frac{1}{l(A)} = a$$

ſetzt, für die endliche Gleichung der logarithmiſchen Curve:

(42) $$y = L(x) = a\,l(x),$$

und für die Differenzialgleichung dieſer Curve:

(43) $$dy = a\frac{dx}{x} \text{ oder } x\,dy = a\,dx.$$

Die Gleichungen der Tangente und der Normale werden alſo:

(44) $$x(\eta - y) = a(\xi - x),$$

oder:

$$x(\eta + a - y) = a\,\xi,$$

und:

(45) $$x(\xi - x) + a(\eta - y) = 0.$$

Wenn man die Coordinaten ξ, η als conſtant und die Coordinaten x, y als veränderlich betrachtet, ſo drückt die Gleichung (44) eine gleichſeitige Hyperbel aus, deren Aſymptoten die Axe der y und die Gerade $y = a + \eta$ ſind, und die Gleichung (45) eine Parabel, deren Axe zu der Axe der y parallel iſt. Dieſe Hyperbel und Parabel ſchneiden die logarithmiſche Curve in den Punkten, wo ſie durch die in dem Punkte (ξ, η) zuſammenlaufenden geradlinigen Tangenten und Normalen geſchnitten wird.

Beiſpiel 5. Betrachten wir ferner die Curve, deren Gleichung zwiſchen rechtwinkligen Coordinaten folgende iſt:

(46) $$\frac{y}{x} = tang\,L\left[\frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{R}\right],$$

oder:

(47) $$arc.\,tang\left(\left(\frac{y}{x}\right)\right) = L\sqrt{(x^2 + y^2)} - L(R)$$
$$= a[l\sqrt{(x^2 + y^2)} - l(R)].$$

Man überzeugt ſich leicht, daß dieſe Curve zu der Gattung der ſogenannten Spiralen gehört, daß ſie um den Anfangspunkt eine unendliche Anzahl von Windungen macht, und daß ſie endlich um den Anfangspunkt gedreht und verrückt wird, ohne ihre Form zu verändern, wenn die Conſtante R ihren Werth ändert. Dieſe Curve, welche die logarithmiſche Spirale genannt wird, hat folgende Differenzialgleichung:

$$x\,dy - y\,dx = a\,(x\,dx + y\,dy). \tag{48}$$

Und folglich wird die Gleichung der Tangente und Normale resp.

$$x\,\eta - y\,\xi = a\,[x\,(\xi - x) + y\,(\eta - y)], \tag{49}$$

und:

$$x\,(\xi - x) + y\,(\eta - y) + a\,(x\,\eta - y\,\xi) = 0. \tag{50}$$

Wenn man in diesen letzten Formeln x, y allein als veränderlich betrachtet, so erhält man die Gleichungen zweier Kreise, welche den vom Anfangspunkte nach dem Punkte (ξ, η) gezogenen Radiusvector zur gemeinschaftlichen Sehne haben, deren Durchmesser man erhält, wenn man diesen Radiusvector successive durch die beiden Ausdrücke $\sqrt{\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)}$, $\sqrt{(1 + a^2)}$ multiplicirt, und welche man construiren kann, wenn man über der gemeinschaftlichen Sehne Kreisabschnitte beschreibt, welche zwei Winkel fassen, deren trigonometrische Tangente und Cotangente resp. der Größe a gleich sind. Da die in Rede stehenden Kreise die logarithmische Spirale in allen Punkten schneiden, wo sie von allen im Punkte (ξ, η) zusammenlaufenden Tangenten oder Normalen getroffen wird, so geben sie ein leichtes Mittel an die Hand, diese Geraden zu construiren.

Zum Schlusse dieser Vorlesung wollen wir noch bemerken, daß, wenn die Halbaren der positiven x und y, statt auf einander senkrecht zu sein, den Winkel δ mit einander bildeten, man für die Gleichung (1) folgende:

$$\frac{\sin \tilde{\omega}}{\sin (\delta - \tilde{\omega})} = \frac{\triangle y}{\triangle x} \tag{51}$$

substituiren müßte, welche man erhielte, wenn man das Dreieck betrachtete, wovon zwei Seiten durch die Zahlenwerthe von $\triangle x$, $\triangle y$ ausgedrückt werden, und diese Seiten mit den Sinus der gegenüberliegenden Winkel vergliche. Alsdann müßte man für die Gleichungen (5), (7) und (10) die folgenden substituiren:

$$\frac{\sin \psi}{\sin (\delta - \psi)} = y' = \frac{\tang \psi}{\sin \delta - \cos \delta \,.\, \tang \psi}, \tag{52}$$

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{\sin \psi}{\sin (\delta - \psi)}, \tag{53}$$

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{\sin\left(\psi \pm \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\delta - \psi \mp \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{1}{\sin \delta \,.\, \tang \psi + \cos \delta}. \tag{54}$$

Nun wird aber die trigonometrische Tangente der Neigung τ der gegebenen Curve gegen die Axe der x vermöge der Formel (52) durch:

$$(55) \qquad tang\,\psi = \frac{y' \sin\delta}{1 + y' \cos\delta} = \pm tang\,\tau$$

bestimmt.

Verbindet man ferner die Formeln (52) und (53) mit einander, so erhält man, wie zu erwarten war, die Gleichung (8) wieder, welche immer die der Tangente der Curve ist. Eliminirt man endlich *tang* ψ zwischen den Formeln (54) und (55), so erhält man für die Gleichung der Normale:

$$(56) \qquad \frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{1 + y' \cos\delta}{y' + \cos\delta}.$$

Zweite Vorlesung.

Von den Längen, welche Subtangenten, Subnormalen, Tangenten und Normalen der ebenen Curven genannt werden.

Wenn man in den Gleichungen (8) und (11) der vorhergehenden Vorlesung ξ und η allein als veränderlich betrachtet, so drücken sie, wie gezeigt worden, die durch den Punkt (x, y) gezogenen Tangenten und Normalen einer ebenen Curve aus. Wenn man in diesen Gleichungen $\eta = 0$ setzt, so ergibt sich aus der ersten:

$$(1) \qquad x - \xi = \frac{y}{y'},$$

und aus der zweiten:

$$(2) \qquad \xi - x = y\,y'.$$

Hieraus folgt, daß die Zahlenwerthe der Ausdrücke:

$$\frac{y}{y'},\ y\,y'$$

die auf der Axe der x zwischen dem Fußpunkte der Ordinate y und den Punkten, wo diese Axe von der Tangente und Normale der Curve geschnitten wird, liegenden Entfernungen ausdrücken. Diese Entfernungen werden die Subtangente und Subnormale der Curve für den Punkt (x, y) genannt. Wenn man also die Subnormale mit U und die Subtangente mit V bezeichnet, so hat man:

$$(3) \qquad U = \pm y\,y', \qquad (4) \qquad V = \pm \frac{y}{y'},$$

wo die Zeichen so gewählt werden müssen, daß die Werthe von U und V positiv sind.

Es ist zu bemerken, daß die Ordinate y, von ihrem Zeichen abstrahirt, der mittleren geometrischen Proportionale zwischen den beiden Längen U und V gleich ist, weil diese, mit einander multiplicirt, y^2 zum Producte geben.

Die auf den Richtungen der Tangente und Normale zwischen der Curve und der Axe der x liegenden Längen werden die Länge der Tangente und die Länge der Normale oder blos die Tan-

gente und Normale der Curve genannt. Sie bilden die Hypotenusen zwei rechtwinkliger Dreiecke, deren Katheten der absolute Werth der Ordinate y und die Subtangente oder Subnormale sind.

Wenn man also die Tangente durch T und die Normale durch N bezeichnet, so hat man:

$$N^2 = y^2 + (y\,y')^2,\quad T^2 = y^2 + \left(\frac{y}{y'}\right)^2,$$

und folglich:

$$(5)\qquad N = \pm y\sqrt{(1+y'^2)},$$

$$(6)\qquad T = \pm y\sqrt{\left(1+\frac{1}{y'^2}\right)},$$

wo das Zeichen + oder − genommen werden muß, jenachdem die Ordinate y positiv oder negativ ist.

Die Gleichungen (3), (4), (5) und (6) können auch leicht aus den Formeln (6) der vorhergehenden Vorlesung, worin τ die Neigung der gegebenen Curve im Punkte (x, y), d. h. den von der Tangente und der Axe der x gebildeten spitzen Winkel bezeichnet, abgeleitet werden. Denn in den rechtwinkligen Dreiecken, deren Hypotenusen die Tangente und Normale bilden, bildet die gemeinschaftliche Seite, d. h. die auf ihren Zahlenwerth reducirte Ordinate y offenbar mit der Tangente einen Winkel $= \frac{\pi}{2} - \tau$ und mit der Normale einen Winkel $= \tau$. Construirt man nun einen Kreis, dessen Mittelpunkt in der Spitze der Ordinate liegt und dessen Halbmesser diese Ordinate selbst ist, so sieht man leicht ein, daß die Verhältnisse der Subnormale, der Subtangente, der Normale und der Tangente zum Halbmesser des Kreises resp. durch:

$$tang\,\tau,\ cot\,\tau,\ sec\,\tau,\ cosec\,\tau$$

ausgedrückt werden. Folglich werden die Subnormale, die Subtangente, die Normale und die Tangente resp. durch die Zahlenwerthe der Producte:

$$(7)\qquad y\,tang\,\tau,\ y\,cotang\,\tau,\ y\,sec\,\tau \text{ und } y\,cosec\,\tau$$

ausgedrückt, oder wenn man die Formeln (6) der vorhergehenden Vorlesung berücksichtigt, durch die Zahlenwerthe der Ausdrücke:

$$(8)\qquad y\,y',\ \frac{y}{y'},\ y\sqrt{(1+y'^2)},\ y\sqrt{\left(1+\frac{1}{y'^2}\right)}.$$

Beispiel 1. Wenn die gegebene Curve der durch die Gleichung:

$$(9)\qquad x^2 + y^2 = R^2$$

ausgedrückte Kreis ist, so werden die Werthe von U, V, N, T resp.

$$(10) \qquad U = \pm x,\ V = \pm\left(\frac{R^2}{x} - x\right),$$

$$N = R,\ T = \pm\frac{R}{x}(R^2 - x^2)^{1/2}.$$

Die Subnormale reducirt sich also auf den Zahlenwerth der Abscisse und die Normale auf den Halbmesser, was leicht vorherzusehen war.

Beispiel 2. Wenn die gegebene Curve eine durch die Gleichung:

$$(11) \qquad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

ausgedrückte Ellipse oder Hyperbel ist, so findet man:

$$(12) \qquad \begin{cases} U = \pm\dfrac{b^2}{a^2}x, \quad V = \pm\left(\dfrac{a^2}{x} \mp x\right), \\ N = \dfrac{b}{a}\left[\left(\dfrac{b^2}{a^2} \mp 1\right)x^2 \pm a^2\right]^{\frac{1}{2}}, \\ T = \left[\left(\dfrac{2a^4}{x^2} \pm b^2\right)\left(1 \mp \dfrac{x^2}{a^2}\right) + x^2 - \dfrac{a^4}{x^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Aus den vorhergehenden Gleichungen folgt: 1) daß in der Ellipse und Hyperbel das Verhältniß der Subnormale zur Abscisse eine constante Größe ist, und 2) daß die Subtangente von der mit b bezeichneten Halbaxe unabhängig ist. Die Subtangente hat also in der Ellipse, deren Gleichung

$$(13) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist, und in dem um den Anfangspunkt mit dem Halbmesser a beschriebenen Kreise denselben Werth. Diese Bemerkungen geben ein leichtes Mittel an die Hand, die Subnormalen und Subtangenten der durch die Gleichungen (11) und (13) ausgedrückten Curven zu construiren. Will man z. B. den Durchschnittspunkt der Axe der x mit der dem Punkte von der Abscisse x entsprechenden Normale haben, so braucht man nur auf der Axe $2b$ von einem ihrer Endpunkte aus eine Länge $= \frac{b^2}{a^2}$ b zu nehmen und dann durch den Endpunkt dieser Länge eine Parallele zu der Geraden, welche den Endpunkt der Axe und den Fußpunkt der Ordinate y verbindet, zu ziehen, welche alsdann die Axe der x in dem verlangten Punkte schneidet.

Beispiel 3. Wenn die gegebene Curve die durch die Gleichung:

$$(14) \qquad y^2 = 2px$$

ausgedrückte Parabel ist, so findet man:

(15) $U=p,\ V=2x,\ N=p^{\frac{1}{2}}(p+2x)^{\frac{1}{2}},\ T=2x^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$

In der Parabel ist also die Subnormale constant und die Subtangente das Doppelte der Abscisse. Diese Bemerkungen geben die bekannten Regeln zur Construction der Normale und der Tangente der Parabel an die Hand.

Beispiel 4. Wir wollen in der Gleichung (42) der vorhergehenden Vorlesung die beiden Coordinaten x, y mit einander vertauschen und wieder $L(e)=a$ setzen, so drückt die Gleichung, welche man erhält, nämlich:

(16) $$x=L(y) \text{ oder } x=a\,l(y)$$

die logarithmische Curve in einer neuen Lage aus. Nun folgt aber aus der Gleichung (16):

(17) $$y=e^{\frac{x}{a}},$$

und folglich: $$y'=\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}},$$

(18) $$U=\frac{1}{a}e^{\frac{2x}{a}},\ V=a,\ N=\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}\sqrt{(a^2+e^{\frac{2x}{a}})},$$

$$T=\sqrt{(a^2+e^{\frac{2x}{a}})}.$$

In der durch die Gleichung (16) ausgedrückten logarithmischen Curve ist also die Subtangente constant und die Subnormale dem Quadrate der Ordinate proportional.

Beispiel 5. Wir wollen annehmen, daß vom Anfangspunkte der Coordinaten aus auf der Halbaxe der positiven y eine Länge $=R$ genommen sei, daß man ferner aus dem obern Endpunkte dieser Länge mit dem Halbmesser R einen Kreis beschrieben habe, welchen man alsdann auf der Axe der x fortrollen läßt. In dieser Bewegung beschreibt der im ersten Augenblicke mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfallende Punkt des Kreises eine krumme Linie, welche man Cycloide nennt, deren Gleichung leicht auf folgende Weise erhalten werden kann.

Während der Kreis auf der Axe der x fortrollt, bewegt sich sein Mittelpunkt parallel zu dieser Axe, und der Halbmesser, welcher im ersten Augenblicke nach dem Anfangspunkte der Coordinaten ging, dreht sich um den Mittelpunkt des Kreises, indem er einen beständig zunehmenden Winkel beschreibt. Durch ω wollen wir diesen Winkel, durch ξ, η die Coordinaten des Kreismittelpunktes und durch x, y die Coordinaten des Endpunktes des beweglichen Halbmessers, welche zugleich die der Cycloide sind, bezeichnen. Der Bogen des Kreises zwischen dem erwähnten Endpunkte und dem Punkte, wo der Kreis die Axe der x berührt, hat offenbar das Product $R\omega$ zum Maaße, und da die verschiedenen Theile dieses Bogens nach einander auf den gleichen Theilen der Axe der x zwischen dem Anfangs-

punkte und dem Berührungspunkte gelegen haben; so hat die gerade Verbindungslinie dieser beiden letzten Punkte, oder was dasselbe ist, die Abscisse des Kreismittelpunktes ebenfalls eine Länge $= R\omega$. Nimmt man nun der Bequemlichkeit halber an, daß sich der Kreis nach der Richtung der positiven x fortbewegt habe, so findet man,

$$\xi = R\omega, \quad \eta = R.$$

Ferner ist klar, daß die algebraischen Projectionen des beweglichen Radiusvectors auf die Axen der x und y sowohl durch:

$$x - \xi, \quad y - \eta,$$

als durch:

$$-R\sin\omega, \quad -R\cos\omega$$

ausgedrückt werden können. Man hat also:

(19) $$x - \xi = -R\sin\omega, \quad y - \eta = -R\cos\omega,$$

und folglich:

$$x = \xi - R\sin\omega, \quad y = \eta - R\cos\omega.$$

Hieraus folgt, wenn man für ξ und η ihre obigen Werthe setzt:

(20) $$x = R(\omega - \sin\omega), \quad y = R(1 - \cos\omega).$$

Man braucht die beiden vorhergehenden Formeln nur auf den Fall zu erstrecken, wo ω negativ wird, um die Coordinaten x, y der auf der Seite der negativen x liegenden Punkte der Cycloide, d. h. der Punkte, mit welchen der Endpunkt des beweglichen Halbmessers successive zusammenfällt, wenn sich der Kreis nach dieser Seite bewegt, zu erhalten. Zieht man nun aus der zweiten der Gleichungen (20) den Werth von ω und substituirt ihn in die erste, so findet man 1) für Werthe des Winkels ω zwischen den Grenzen o und π:

(21) $$x = R\,arc\cos\frac{R-y}{R} - \sqrt{(2Ry - y^2)};$$

und 2), wenn n eine ganze Zahl bezeichnet, und der Winkel ω zwischen den Grenzen $\pm n\pi$, $\pm n\pi + \pi$ angenommen wird:

(22) $$x = R\left[arc\,\cos\frac{(R-y)\cos n\pi}{R}\right] - \cos n\pi . \sqrt{(2Ry - y^2)}.$$

Für die Formeln (21) und (22) kann man folgende setzen:

(23) $$x = R\,arc\cos\left(\left(\frac{R-y}{R}\right)\right) \pm \sqrt{(2Ry - y^2)},$$

worin die Wurzelgröße mit dem Zeichen $+$ oder $-$ genommen werden muß, jenachdem sich das Verhältniß:

$$\frac{arc\,cos\left(\left(\frac{R-y}{R}\right)\right)-arc\,cos\left(\pm\frac{R-y}{R}\right)}{\pi}$$

auf eine gerade oder ungerade Zahl reducirt. Die Gleichung (23) drückt die ganze Cycloide aus, während die Gleichungen (21) und (22) nur Theile dieser Curve ausdrücken, welche zwischen gewissen Grenzen liegenden Werthen von $\tilde{\omega}$ entsprechen.

Die Basis der Cycloide ist die gerade Linie, worauf man den erzeugenden Kreis fortrollen läßt, und welche wir zur Axe der x genommen haben.

Will man die Eigenschaften der Cycloide untersuchen, so kann man entweder die Gleichung (23) oder das System der Gleichungen (20) anwenden. Aus diesen Gleichungen ergibt sich leicht, daß die Cycloide aus unendlich vielen, einander gleichen Zweigen besteht, deren auf der Axe der x liegende Endpunkte den Abscissen:

$$x=0,\ x=\pm 2\pi R,\ x=\pm 4\pi R,\ x=\pm 6\pi R,\ldots.$$

entsprechen und wovon jeder durch eine, einer der Abscissen:

$$x=\pm\pi R,\ x=\pm 3\pi R,\ x=\pm 5\pi R,\ldots.$$

entsprechende Ordinate in zwei symmetrische Theile getheilt wird. Ferner erhält man, wenn man die Gleichungen (20) differenzirt, indem man x als unabhängige Veränderliche betrachtet:

$$(24)\quad dx=R(1-\cos\omega)\,d\omega=y\,d\omega,\ dy=R\sin\omega\,d\omega,$$

$$(25)\quad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{R\sin\omega}{y}=\pm\frac{\sqrt{(2Ry-y^2)}}{y}$$
$$=\pm\sqrt{\left(\frac{2R}{y}-1\right)}.$$

Man hat folglich:

$$(26)\quad \begin{cases} U=\pm R\sin\omega=\sqrt{(2Ry-y^2)},\ V=y\sqrt{\left(\frac{y}{2R-y}\right)}, \\ N=\sqrt{(2Ry)}, \qquad\qquad T=y\sqrt{\left(\frac{2R}{2R-y}\right)}. \end{cases}$$

Endlich folgt aus der Formel (25) in Verbindung mit der ersten der Formeln (19):

$$(27)\qquad \xi-x=R\sin\omega=y\,y',$$

wo ξ die Abscisse des Mittelpunktes des erzeugenden Kreises oder die Abscisse des Berührungspunktes dieses Kreises mit der Axe der x ist. Da nun diese Abscisse von der nicht verschieden ist, welche die Gleichung (2) gibt, so fällt der erwähnte Berührungspunkt nothwendig mit dem Punkte zusammen, wo die Axe der x von der

Normale der Cycloide geschnitten wird. Hieraus ergibt sich leicht, daß, wenn man in dem Erzeugungskreise der Cycloide einen, zu der Axe der y parallelen Durchmesser zieht, die Richtungen der Normale und Tangente an dieser Curve durch die Geraden angegeben werden, welche von dem auf der Curve genommenen Punkte (x, y) nach den beiden Endpunkten des Durchmessers gezogen sind. Ferner wollen wir bemerken, daß die Länge der Normale genau der Sehne gleich ist, welche in dem Erzeugungskreise dem Winkel ω entspricht und daß man, um die Subnormale der Cycloide zu erhalten, nur den vom Punkte (ξ, η) nach dem Punkte (x, y) gezogenen beweglichen Halbmesser auf die Axe der x zu projiciren braucht.

Dritte Vorlesung.

Mittelpunkte, Durchmesser, Axen und Asymptoten der ebenen Curven.

Unter dem Mittelpunkte einer ebenen Curve versteht man einen Punkt von solcher Beschaffenheit, daß die von diesem Punkte nach der Curve gezogenen Radienvectoren paarweise einander gleich und nach entgegengesetztem Sinne gerichtet sind. Wenn eine ebene Curve einen Mittelpunkt hat und man verlegt den Anfangspunkt der Coordinaten in denselben, so wird die Gleichung der Curve nicht geändert, wenn man darin $-x$ für x und $-y$ für y setzt. Wenn der Mittelpunkt der Curve mit dem Punkte zusammenfällt, dessen Coordinaten a und b sind und man setzt alsdann $y-b=t(x-a)$ oder:

$$y=b+t(x-a),$$

so ergeben sich aus der Gleichung der Curve für jeden Werth von t mehrere Werthe für $x-a$, wovon einige sich auf Null reduciren können, während die übrigen paarweise einander gleich sind und entgegengesetzte Zeichen haben.

Beispiele. Die Curven:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=K,\ y=x^3,\ y^3=x^5,\ldots$$

haben den gemeinschaftlichen Anfangspunkt der Coordinaten zum Mittelpunkte, während die Curven:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,\ y-b=(x-a)^3,$$
$$(y-b)^3=(x-a)^5,\ \text{u. s. w.}$$

den Punkt (a, b) zum gemeinschaftlichen Mittelpunkte haben.

Eine Curve kann unendlich viele Mittelpunkte haben. So hat z. B. die durch die Gleichung:

$$y=\sin x \tag{1}$$

ausgedrückte Curve, welche aus unendlich vielen, einander ähnlichen und abwechselnd über und unter der Axe der x liegenden Bogen besteht, nicht blos den Anfangspunkt der Coordinaten zum Mittelpunkte, sondern auch jeden der Punkte, wo sie die Axe der x schneidet. Denn die Gleichung dieser Curve verändert ihre Form nicht,

wenn man den Anfangspunkt in einen dieser Punkte verlegt, d. h. wenn man x um eine Größe $= n\pi$, wo n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, wachsen oder abnehmen läßt.

Jede durch den Mittelpunkt einer ebenen Curve gezogene Gerade ist ein Durchmesser dieser Curve.

Unter Axe einer Curve versteht man eine Gerade, welche diese Curve in zwei symmetrische Theile theilt. Wenn eine solche Gerade zu der Axe der Abscissen oder Ordinaten genommen wird, so entsprechen jedem Werthe von x oder von y zwei gleiche Werthe von y oder von x mit entgegengesetztem Zeichen.

Beispiele. Die Parabel:

$$y^2 = 2px$$

hat nur eine Axe, welche mit der Axe der x zusammenfällt.

Die Ellipse oder Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

hat zwei Axen, welche mit den Coordinatenaxen zusammenfallen. Die durch die Gleichung (1) ausgedrückte Curve hat unendlich viele, zu der Axe der y parallele Axen, welche Abscissen von der Form:

$$x = \pm n\pi + \frac{\pi}{2}$$

entsprechen, wo n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. So oft sich zwei Axen einer Curve unter einem rechten Winkel schneiden, ist ihr Durchschnittspunkt ein Mittelpunkt der Curve. Denn nimmt man sie zu den Axen der x und der y, so kann man 1) $-y$ für y und 2) $-x$ für x setzen, ohne daß die Gleichung der Curve verändert wird. Man kann also die Zeichen der beiden Coordinaten x, y zu gleicher Zeit verändern, welches hinreichend ist, um darzuthun, daß ein Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte zusammenfällt.

Unter Asymptote einer ebenen Curve versteht man eine Gerade, welcher sich diese Curve unbestimmt nähert, ohne sie jemals treffen zu können. Es ist nicht schwer, die Asymptoten einer, durch eine Gleichung zwischen zwei rechtwinkligen Coordinaten x, y ausgedrückten Curve zu finden. Denn betrachten wir zuvörderst die nicht zu der Axe der y parallelen Asymptoten, und es sei:

$$y = kx + l \qquad (2)$$

die Gleichung einer derselben. Die der Abscisse x entsprechende Ordinate der gegebenen Curve muß sich für sehr große Zahlenwerthe von x fast auf die Ordinate der Asymptote reduciren und unter der Form:

$$y = kx + l \pm \varepsilon \qquad (3)$$

erscheinen, wo $\pm\varepsilon$ ein Glied bezeichnet, welches mit $\frac{1}{x}$ verschwin-

det. Läßt man nun $\frac{1}{x}$ gegen die Grenze Null convergiren, so ergibt sich succeſſive aus der Gleichung (3):

$$(4) \qquad \lim \frac{y}{x} = \lim \left(k + \frac{l \pm \varepsilon}{x} \right) = k,$$

$$(5) \qquad \lim (y - kx) = \lim (l \pm \varepsilon) = l.$$

Um alſo die Conſtante k zu beſtimmen, braucht man in der Gleichung der Curve nur $\frac{y}{x} = s$ oder:

$$(6) \qquad y = sx$$

zu ſetzen und dann die Grenze oder Grenzen zu ſuchen, gegen welche die Veränderliche s convergirt, während der Zahlenwerth von x unbeſtimmt wächſt. Nachdem man die Conſtante k gefunden hat, erhält man ferner die Conſtante l, wenn man in der Gleichung der Curve $y - kx = t$ oder:

$$(7) \qquad y = kx + t$$

ſetzt, und die Grenze ſucht, welcher ſich t ohne Ende für beſtändig wachſende Werthe der Veränderlichen x nähert. Jedem Syſteme endlicher Werthe der Größen k und l entſpricht alsdann eine Aſymptote der gegebenen Curve.

Schließt man auf dieſelbe Weiſe, indem man aber die Veränderlichen x und y mit einander vertauſcht, ſo findet man offenbar die zu der Axe der x nicht parallelen Aſymptoten.

Beiſpiele. Betrachten wir die logarithmiſche Linie:

$$(8) \qquad y = A^x,$$

ſo haben wir in dieſer Vorausſetzung:

$$s = \frac{y}{x} = \frac{A^x}{x},$$

und wenn wir alsdann x gegen die Grenze $-\infty$ convergiren laſſen, ſo ergibt ſich:

$$k = \lim \frac{A^x}{x} = 0.$$

Man findet alſo:

$$t = y = A^x, \; l = \lim A^x = 0.$$

Die gegebene Curve hat alſo die Axe der x, deren ſie ſich auf der Seite der negativen x ohne Ende nähert, zur Aſymptote.

Ebenſo ergibt ſich, daß die logarithmiſche Linie

$$(9) \qquad x = A^y$$

die Axe der y zur Aſymptote hat.

Wir wollen nun annehmen, daß die Gleichung der gegebenen Curve unter der Form:

(10) $$f(x, y) = c$$

erſcheine, ſo iſt die Beſtimmung der Aſymptoten ſehr leicht, wenn man $f(x, y)$ in mehrere Theile zerlegen kann, wovon jeder eine homogene Function der Veränderlichen x, y iſt. Denn bezeichnen wir die Grade der durch die Zerlegung der gegebenen Function erhaltenen homogenen Functionen reſp. mit $m, n, \ldots$ ſo daß folglich:

(11) $$f(x, y) = x^m F\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + \text{etc.}\ldots$$

iſt, wo die Zahlen $m, n, \ldots$ ſo geordnet ſind, daß ſie eine abnehmende Reihe bilden; ſo wird der Werth von $s = \frac{y}{x}$ durch die Gleichung:

$$x^m F(s) + x^n f(s) + \text{etc.}\ldots = c,$$

oder:

(12) $$F(s) + \frac{1}{x^{m-n}} f(s) + \text{etc.}\ldots = \frac{c}{x^m}$$

beſtimmt, woraus folgt, wenn man $\frac{1}{x} = o$ und $s = k$ ſetzt:

(13) $$F(k) = 0.$$

Ferner, wenn man der Größe k einen der Werthe beilegt, welche der Gleichung (13) genügen können, ſo wird der correſpondirende Werth von $t = y - kx$ durch die Formel:

(14) $$x^m F\left(k + \frac{t}{x}\right) + x^n f\left(k + \frac{t}{x}\right) + \text{etc.}\ldots = c$$

gegeben, und da man vermöge der Gleichung (13)

$$F\left(k + \frac{t}{x}\right) = \frac{t}{x} F'\left(k + \theta\frac{t}{x}\right),$$

hat, wo θ eine kleinere Zahl als 1 bezeichnet, ſo findet man auch:

$$x^{m-1} t F'\left(k + \theta\frac{t}{x}\right) + x^n f\left(k + \frac{t}{x}\right) + \text{etc.}\ldots = c,$$

oder:

(15) $$t F'\left(k + \theta\frac{t}{x}\right) = \frac{1}{x^{m-n-1}} f\left(k + \frac{t}{x}\right) + \text{etc.}\ldots = \frac{c}{x^{m-1}}.$$

Wenn $F'(k)$ und $f(k)$ endliche von Null verſchiedene Werthe haben, ſo ergibt ſich aus der vorhergehenden Gleichung, wenn man $\frac{1}{x} = o$ und $t = l$ ſetzt:

$$(16)\quad \begin{cases} 1)\ \text{für } n<m-1 \ldots\ldots l=0, \\ 2)\ \text{für } n=m-1 \ldots\ldots l=-\frac{f(k)}{F'(k)}, \\ 3)\ \text{für } n>m=1 \ldots\ldots l=\pm\infty. \end{cases}$$

Dem angenommenen Werthe von k entspricht also in der ersten Voraussetzung eine durch den Anfangspunkt gehende Asymptote oder deren Gleichung die Form:

$$(17)\qquad y=kx$$

hat, und in der zweiten Voraussetzung eine Asymptote, deren Gleichung von der Form:

$$(18)\qquad y=kx-\frac{f(k)}{F'(k)}$$

ist. In der dritten Voraussetzung entfernt sich die Asymptote unendlich weit vom Anfangspunkte und es findet also keine statt.

Die Elimination der Constante k zwischen den Gleichungen (13) und (17) gibt die Gleichung:

$$F\left(\frac{y}{x}\right)=0,$$

welche in der ersten Voraussetzung alle zu der Axe der y nicht parallele Asymptoten gibt, und wofür man die Gleichung:

$$(19)\qquad x^m F\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

substituiren kann. Zu dieser Gleichung würde man in der ersten Voraussetzung auch gelangen, wenn man die zu der Axe der x nicht parallelen Asymptoten suchte. Wenn sich also der erste Theil der Gleichung (10) in mehrere homogene Functionen zerlegen läßt und der Grad m einer derselben übertrifft den Grad jeder der übrigen um mehr als eine Einheit, so gehen die verschiedenen Asymptoten nicht blos durch den Anfangspunkt, sondern sie werden auch alle durch die Gleichung ausgedrückt welche man erhält, wenn man die homogene Function des Grades $m=$ Null setzt.

Beispiele Die Hyperbel:

$$(20)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$$

hat die durch die Gleichung:

$$(21)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,$$

oder durch die beiden Gleichungen:

$$(22)\qquad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$

ausgedrückten beiden Geraden als Asymptoten.

Desgleichen, wenn man $B^2 - AC > o$ setzt, so ergibt sich, daß die Hyperbel:

(23) $$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = K$$

die beiden durch die Gleichung:

(24) $$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$$

ausgedrückten Geraden als Asymptoten hat.

Ferner hat die Curve:

(25) $$x^3 + y^3 + \sin\frac{y}{x} = 0$$

die Gerade:

(26) $$x + y = 0,$$

deren Ordinate der einzige reelle Werth von y ist, welcher der Gleichung:

(27) $$x^3 + y^3 = 0$$

Genüge leistet, zur Asymptote.

In dem Falle wo $n = m - 1$ gesetzt wird, drückt die Formel (19) alle durch den Anfangspunkt zu den Asymptoten der gegebenen Curve parallel gezogenen Geraden aus. So hat z. B. die durch die Gleichung:

(28) $$x^3 + y^3 = 3axy$$

ausgedrückte Curve, welche das Descartessche Folium genannt wird, eine zu den Geraden $x + y = 0$ parallele Asymptote, deren Ordinate sich wieder aus der Formel:

$$x^3 + y^3 = 0$$

ergibt.

Wenn die Größen $F'(k)$, $f(k)$ Null oder unendlich werden, so kann die Größe l andere Werthe bekommen, als die, welche wir ihr oben beigelegt haben (s. die Formeln (16)); um sie aber zu bestimmen, braucht man wieder nur die Grenze oder Grenzen zu suchen, gegen welche die Veränderliche t convergirt, während $\frac{1}{x}$ sich der Null nähert. Zuweilen findet man durch dieses Verfahren für einen Werth von k mehrere Werthe von l. Dieses findet z. B. statt, wenn man die durch die Gleichung:

(29) $$y^2 = \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

ausgedrückte Curve betrachtet. Alsdann hat man $k = o$, und da die Gleichung mit t

$$t^2 = \cos\left(\frac{t}{x}\right)$$

wird, so folgt daraus, wenn man $\frac{1}{x}=0$ setzt:

$$t^2=1,\ t=\pm 1.$$

Die gegebene Curve hat also zwei zu der Axe der x parallele Asymptoten, nämlich:

$$y=1,\ y=-1.$$

Uebrigens kann es geschehen, daß ein Werth von k, welcher der Gleichung:

(31) $$F'(k)=0$$

Genüge leistet, nur eine Asymptote gibt. So hat z. B. die durch die Gleichung:

(32) $$y^2(x^2+y^2)=R^4$$

ausgedrückte Curve nur eine einzige Asymptote, welche mit der Axe der x zusammenfällt, obgleich für diese Curve der Werth $k=0$ der Gleichung (31) Genüge leistet.

Nach Ampère's Bemerkung könnte man auch die Asymptoten einer ebenen Curve finden, wenn man die Lagen bestimmte, welche die Tangente annimmt, wenn sich der Berührungspunkt unendlich weit vom Anfangspunkte der Coordinaten entfernt. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir die Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

betrachten, so ist die Gleichung der Tangente an dieser Curve:

$$\frac{x\xi}{a^2}-\frac{y\eta}{b^2}=1,$$

oder, wenn man für $\frac{y}{b}$ seinen Werth $\pm\frac{x}{a}\sqrt{\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)}$ substituirt und dann durch $\frac{a}{x}$ multiplicirt:

$$\frac{\xi}{a}\pm\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\eta}{b}=\frac{a}{x}.$$

Damit sich nun der Berührungspunkt unendlich weit vom Anfangspunkte entfernt, braucht man nur $x=\pm\infty$ zu setzen. Alsdann verwandelt sich die vorhergehende Formel in:

$$\frac{\xi}{a}\pm\frac{\eta}{b}=0,$$

und enthält die Gleichungen der beiden Asymptoten der gegebenen Hyperbel.

Vierte Vorlesung.

Verschiedene Eigenschaften der ebenen Curven, welche sich aus den Gleichungen derselben ergeben. Singuläre (besonders merkwürdige) Punkte.

Es sei eine Gleichung zwischen zwei rechtwinkligen Coordinaten x, y gegeben, so gibt diese Gleichung, wenn sie für y aufgelöst wird, eine oder mehrere andere von der Form:

$$(1) \qquad y = f(x),$$

und jede derselben drückt eine Linie oder einen Theil der Linie aus, deren Eigenschaften von der Natur der Function $f(x)$ abhängig sind. So läßt sich z. B. die Gleichung:

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = R^2,$$

welche einen Kreis ausdrückt, dessen Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfällt, in die beiden folgenden:

$$(3) \quad y = \sqrt{(R^2 - x^2)}, \qquad (4) \quad y = -\sqrt{(R^2 - x^2)}$$

zerlegen, wovon jede einen über oder unter der Axe der x liegenden Halbkreis ausdrückt.

Wenn die Function $f(x)$ zwischen den Grenzen $x = x_0$, $x = X$ stetig bleibt, so ist die durch die Gleichung (1) ausgedrückte Linie zwischen den, den Abscissen x_0, X entsprechenden Punkten ebenfalls stetig. Diese Linie kann discontinuirlich werden, wenn die Function $f(x)$ Unterbrechungen der Stetigkeit darbietet, z. B. wenn diese Function für gewisse endliche Werthe von x unendlich wird, oder wenn sie plötzlich vom Reellen zum Imaginären übergeht, oder wenn sie ihren Werth plötzlich ändert. Der erste Fall findet bei der Hyperbel:

$$(4) \qquad y = \frac{a}{x},$$

der zweite bei den logarithmischen Curven:

$$(5) \quad y = \frac{1}{l(x)}, \qquad (6) \quad y = x\,l(x),$$

und der dritte bei der durch die Gleichung:

$$(7) \qquad y = \frac{x}{\sqrt{(x^2)}}$$

bestimmten Linie statt, welche aus zwei zu der Axe der x parallelen Halbaxen besteht, die die Axe der y in zwei Punkten treffen, deren Ordinaten $+1$ und -1 sind. In den beiden letzten Fällen schließt sich die betrachtete Linie plötzlich in gewissen Punkten, welche wir Schlußpunkte nennen wollen. Die Curven (5) und (6) haben jede den Anfangspunkt der Coordinaten zum Schlußpunkte. Die durch die Gleichung (7) ausgedrückte Linie bietet zwei Schlußpunkte dar, welche auf der Axe der y zu beiden Seiten des Anfangspunktes in der Entfernung $= 1$ liegen.

Wenn die Function $f(x)$ nur für eine begrenzte Anzahl von Werthen für x reell wird, so drückt die Gleichung (1) nur einen Punkt oder eine Reihe einzelner Punkte aus. So drückt z. B. die Formel:

$$(8) \qquad y = x\sqrt{-1},$$

welche einer der aus der Gleichung:

$$(9) \qquad x^2 + y^2 = 0$$

abgeleiteten Werthe von y ist, nur einen einzigen Punkt aus, welcher mit dem Anfangspunkte zusammenfällt. Es kann geschehen, daß die Gleichung (1) zu gleicher Zeit einen oder mehrere isolirte Punkte und einen oder mehrere Curvenzweige gibt.
So drückt z. B. die Formel:

$$(10) \qquad y = x\sqrt{(x^2 - a^2)},$$

welche einen der durch die Gleichung:

$$(11) \qquad y^2 = x^2(x^2 - a^2)$$

gegebenen Werthe von y ausdrückt, 1) zwei Curvenzweige aus, welche sich von den beiden auf der Axe der x liegenden und den Abscissen $x = -a$, $x = a$ entsprechenden Punkten aus unbestimmt weit vom Anfangspunkte entfernen, und 2) einen isolirten Punkt, welcher ebenfalls mit dem Anfangspunkte zusammenfällt.

Da eine größte oder kleinste Ordinate größer oder kleiner sein muß, als alle benachbarten Ordinaten, so folgt aus dem Vorhergehenden, daß, wenn die beiden Functionen y und y' in der Nähe eines besondern Werthes von x stetig bleiben, dieser Werth nur dann ein Maximum oder Minimum von y geben kann, wenn er y' verschwinden macht, d. h., die Gleichung:

$$(12) \qquad y' = 0$$

verificirt. Ferner gibt ein aus der Formel (12) abgeleiteter Werth von x nur dann wirklich ein Maximum oder Minimum, wenn die erste der Größen:

$$y'', y''', \ldots,$$

welche nicht verschwindet, negativ oder positiv und zugleich von gerader Ordnung ist, und im entgegengesetzten Falle ist dieser Werth weder ein Maximum, noch ein Minimum. Uebrigens kann es geschehen, daß gewisse unter den Werthen von x, welche eine der Functionen y, y' discontinuirlich machen, Maxima oder Minima der Ordinate geben, ohne der Gleichung (12) Genüge zu leisten. Wenn z. B. die Function $y=f(x)$, nachdem sie, während man die Veränderliche x zu- oder abnehmen läßt, zu- oder abgenommen hat, plötzlich vom Reellen zum Imaginären übergeht, so hat die durch die Gleichung (1) ausgedrückte Curve einen Schlußpunkt und die, diesem Punkte entsprechende Ordinate kann als ein Maximum oder Minimum betrachtet werden. So ist z. B. der $x=0$ entsprechende Werth $y=0$ in Beziehung auf die Ordinate der Curve:

$$(13) \qquad y=\left[\frac{1}{l(x)}\right]^2$$

eine Art Minimum.

Um die einer Unterbrechung der Stetigkeit in der Function $y'=f'(x)$ entsprechenden größten oder kleinsten Ordinaten zu erhalten, braucht man z. B. nur die drei durch die Gleichungen:

$$(14) \quad y=\sqrt{(x^2)}, \qquad (15) \quad y=\frac{1+2\sqrt{(x^2)}+x^2}{2},$$

$$(16) \qquad y=x^{\frac{2}{3}}$$

ausgedrückten Linien zu betrachten. Diese drei Linien, wovon die erste aus zwei im Anfangspunkte auf einander senkrechten Halbaxen, und die zweite aus zwei Parabeltheilen besteht, welche sich auf der Axe der y schneiden, haben, die erste und dritte, $y=0$, und die zweite $y=\frac{1}{2}$ als kleinste Ordinate. Nun werden aber die abgeleiteten Functionen von (14), (15) und (16) nämlich:

$$(17) \qquad y'=\frac{x}{\sqrt{x^2}}, \qquad (18) \quad y'=x+\frac{x}{\sqrt{x^2}},$$

$$(19) \qquad y'=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

für den Werth $x=0$, welcher diese Minima gibt, discontinuirlich, nämlich die erste und zweite, weil sie plötzlich von dem Werthe -1 zu dem Werthe $+1$ übergehen, und die dritte, weil sie durch das Unendliche geht.

In der ersten Vorlesung haben wir bemerkt, daß der Zahlenwerth der abgeleiteten Function y' die trigonometrische Tangente der Neigung der Curve gegen die Axe der x ausdrückt. Wenn man also für einen gegebenen Punkt

$$(12) \qquad y'=0$$

hat, so ist die Neigung der Curve in diesem Punkte Null, d. h. die

Tangente an der Curve wird zu der Axe der x parallel. Wenn man dagegen

(20) $$y' = \pm \infty$$

hat, so beträgt die Neigung der Curve gegen die Axe der x einen rechten Winkel, d. h. die Tangente der Curve wird zu der Axe der y parallel. Wenn endlich die abgeleitete Function y' plötzlich ihren Werth ändert, so ist dieses auch bei der Neigung der Curve der Fall. Wenn in dieser letzten Voraussetzung die Function y continuirlich bleibt, so vereinigen sich alsdann die beiden Schenkel der Curve in dem gegebenen Punkte, so daß ihre Tangenten einen gewissen Winkel mit einander bilden, und diesen Punkt wollen wir einen vorspringenden Punkt nennen. Dieser Punkt entspricht z. B. in der durch die Gleichung (14) ausgedrückten Curve und in denen, welche die Gleichungen:

(21) $$y = x \, arc\, tang \frac{1}{x},$$ (22) $$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

bestimmen, der Abscisse $x = 0$.

Wir wollen nun annehmen, daß sich zwei Schenkel derselben Curve in demselben Punkte so schließen, daß sie eine nach diesem Punkte gehende Halbaxe beide berühren. Dieser Punkt wird ein Rückkehrpunkt genannt. Er ist ein Rückkehrpunkt der ersten Art, wenn die Halbaxe zwischen den beiden Curvenzweigen liegt, und der zweiten Art, wenn die beiden Schenkel auf derselben Seite der Halbaxe liegen. Der Anfangspunkt ist für die durch die Gleichung (16) und durch die Gleichung:

(23) $$y = \frac{x^{\frac{2}{3}} \, l(x^2)}{1 + e^x}$$

ausgedrückten Curven ein Rückkehrpunkt der ersten Art; denn jede dieser Curven besteht aus zwei Zweigen, welche beide die Halbaxe der positiven y berühren und auf entgegengesetzten Seiten derselben liegen. Die durch die Gleichung (23) in der zweiten Vorlesung ausgedrückte Cycloide bietet unendlich viele Rückkehrpunkte der ersten Art dar, welche alle auf der Axe der x liegen und den Abscissen:

$$x = 0, \; x = \pm 2\pi R, \; x = \pm 4\pi R, \; etc...$$

entsprechen. Wenn in einem solchen Punkte die beide Curvenschenkel berührende Halbaxe nicht auf der Axe der x senkrecht ist, so werden die diesen beiden Zweigen entsprechenden Werthe von y nothwendig durch zwei besondere Gleichungen bestimmt, welche beide in der Gleichung der gegebenen Curve enthalten sind. Dieses findet z. B. für die Curve:

(24) $$y^2 = x^3$$

statt, welche aus zwei Zweigen besteht, die die Halbaxe der positiven x im Anfangspunkte berühren und den beiden Gleichungen:

(25) $y = x^{\frac{3}{2}}$, (26) $y = -x^{\frac{3}{2}}$

entsprechen. Dieses findet auch jedesmal für die Rückkehrpunkte der zweiten Art statt, und als Beispiel führen wir die Curve:

(27) $(y - x \sin x)^2 = x^3 \sin^2 x$

an, welche aus zwei Zweigen besteht, die die Halbare der positiven x im Anfangspunkte berühren und in der Nähe dieses Anfangspunktes beide auf der Seite der positiven y liegen.

Wenn die Functionen:

$$y = f(x) \text{ und } y' = f'(x)$$

beide für alle Werthe von x continuirlich bleiben, welche zwischen den Abscissen zwei gegebener Punkte liegen, so ist die diese beiden Punkte verbindende Sehne nothwendig zu einer der durch die zwischenliegenden Punkte der Curve gezogenen Tangenten parallel. Denn wenn man die Abscissen der beiden in Rede stehenden Punkte mit x und $x + \triangle x$ bezeichnet, so hat man (nach Differenzialr. S. 39.):

$$(28) \qquad \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = f'(x + \theta \triangle x),$$

wo θ eine kleinere Zahl als die Einheit bezeichnet. Nun folgt aber offenbar aus der vorhergehenden Gleichung in Verbindung mit den Formeln (1) und (5) der ersten Vorlesung, daß die vom Punkte (x, y) nach dem Punkte $(x + \triangle x, y + \triangle y)$ gezogene Sehne zu der durch den Punkt, dessen Abscisse $x + \theta \triangle x$ ist, gezogenen Tangente parallel ist.

Zu demselben Schlusse gelangt man auch, wenn man die in Rede stehende Sehne mit einer continuirlichen Bewegung parallel zu sich selbst fortrücken läßt, so daß der ihr entsprechende Bogen ohne Ende abnimmt. In dem Augenblicke, wo dieser Bogen verschwindet, wird die Sehne eine Tangente an der Curve, und der Berührungspunkt ist offenbar von den Punkten (x, y) und $(x + \triangle x, y + \triangle y)$ verschieden.

Denken wir uns nun, daß man, indem die abgeleitete Function $y' = f'(x)$ zwischen zwei gegebenen Grenzen stetig ist, x innerhalb dieser Grenzen wachsen läßt, so nimmt die Function y' jedesmal selbst zu, wenn ihre abgeleitete Function $y'' = f''(x)$ einen positiven Werth hat und sie nimmt jedesmal ab, wenn der Werth von y'' negativ ist. Ueberdies kann man sich leicht überzeugen, daß, wenn die Function $y' = f'(x)$ zwischen zwei, den beiden gegebenen Punkten der Curve entsprechenden Werthen von x fortwährend zu- oder abnimmt, die Ordinate dieser Curve innerhalb dieses Intervalles beständig größer oder beständig kleiner als die Ordinate jeder zu beiden Seiten des Berührungspunktes gezogenen Tangente ist. Wir wollen z. B. annehmen, daß man, nachdem man der Veränderlichen x einen bestimmten Werth beigelegt hat, derselben ein Increment $\triangle x$ ertheile und daß der Ausdruck:

(29) $$f'(x+\Delta x)$$

von der Grenze $\Delta x = -h$ bis zu der Grenze $\Delta x = h$ beſtändig wachſe, ſo hat die Differenz:

$$f'(x+\Delta x) - f'(x)$$

innerhalb dieſer Grenzen immer daſſelbe Zeichen als Δx, woraus folgt, daß das Product:

(30) $$[f'(x+\Delta x) - f'(x)]\,\Delta x$$

ſtets poſitiv iſt. Daſſelbe iſt um ſo mehr bei jedem Producte von der Form:

(31) $$[f'(x+\theta\Delta x) - f'(x)]\,\Delta x$$

der Fall, wo θ eine kleinere Zahl als die Einheit bezeichnet. Wenn man nun durch den Punkt (x, y) eine Tangente an die gegebene Curve zieht, ſo iſt die Ordinate dieſer Tangente für die Abſciſſe:

$$\xi = x + \Delta x$$

vermöge der Gleichung (8) der erſten Vorleſung:

(32) $$\eta = y + f'(x)\,\Delta x,$$

während für dieſelbe Abſciſſe die Ordinate der Curve durch:

(33) $$y + \Delta y = y + f'(x+\theta\Delta x)\,\Delta x.$$

ausgedrückt werden kann. (ſ. Differenzialr. S. 39).

Folglich iſt die Differenz zwiſchen der Ordinate der Curve und der der Tangente, nämlich:

(34) $$y + \Delta y - \eta$$

einer von den Werthen des Productes (31) und folglich eine poſitive Größe. Ebenſo beweiſt man, daß, wenn die Größe (29) von der Grenze $\Delta x = -h$ bis zu der Grenze $\Delta x = h$ beſtändig abnimmt, die Producte (30), (31) innerhalb dieſer Grenzen, ſowie die Differenz (34) negativ ſind, und daß folglich die Ordinate $y + \Delta y$ kleiner iſt als die der Tangente. Wenn endlich die Größe (29) in dem Augenblicke, wo $\Delta x = 0$ iſt, aufhörte zu wachſen, um abzunehmen, oder aufhörte abzunehmen, um zu wachſen, d. h. mit anderen Worten, wenn der dem gegebenen Werthe von x entſprechende Werth der Function $f'(x)$ ein Maximum oder Minimum würde; ſo wäre die Ordinate $y + \Delta y$ der Curve auf der einen Seite des Berührungspunktes kleiner und auf der andern größer als die Ordinate der Tangente. Da es übrigens zu der Entſcheidung, ob die Function $y' = f'(x)$ wächſt oder abnimmt, nur der Betrachtung des Zeichens von y'' bedarf, ſo können wir ſchließen, daß zwiſchen zwei gegebenen Werthen der Abſciſſe die Ordinate der Curve beſtändig größer iſt als die der Tangente, wenn y'' innerhalb dieſer Grenzen ſtets einen poſitiven Werth bekommt, daß die Ordinate der Curve beſtändig kleiner iſt, als die der Tangente, wenn der Werth von y'' immer negativ bleibt, und daß endlich die Curve und die Tangente

sich gegenseitig durchschneiden, wenn der Werth von y'' bei dem Uebergange von der einen Seite des Berührungspunktes zu der andern das Zeichen verändert. In diesem letzten Falle ist der Punkt (x, y) der Curve ein sogenannter Inflexions- oder Wendepunkt. Demnach ist der Anfangspunkt für die Curve:

$$(35) \qquad y = x^3,$$

welche die Axe der x in diesem Punkte berührt und durchschneidet, sowie für die Curven:

$$(36) \qquad y = x\,l(x^2), \qquad (37) \qquad y = x\,l(x \sin x),$$

welche die Axe der y in diesem Punkte berühren und durchschneiden, ein Inflexionspunkt. Ferner, da aus der Gleichung (5) folgt:

$$y'' = \left[\frac{1}{x\,l(x)}\right]^2 \left[1 + \frac{2}{l(x)}\right],$$

so hat die durch diese Gleichung (5) ausgedrückte Curve offenbar einen Inflexionspunkt, dessen Abscisse x sich aus der Gleichung:

$$1 + \frac{2}{l(x)} = 0$$

ergibt und dem Quadrate von $\frac{1}{e}$ gleich ist.

Wenn die Function y und ihre successiven abgeleiteten Functionen in der Nähe eines besondern Werthes von x continuirlich bleiben, so kann dieser Werth keinen Inflexionspunkt geben, und folglich auch kein Maximum oder Minimum von y', wofern er nicht der Gleichung:

$$(38) \qquad y' = 0$$

Genüge leistet. Außerdem ist erforderlich, daß die erste der Größen:

$$y'', \; y''', \; y^{IV}, \ldots$$

welche nicht verschwinden, eine abgeleitete Function von gerader Ordnung der Function y ist.

Man sagt, eine Curve oder ein stetiger Curventheil ist zwischen zwei gegebenen Punkten convex, wenn sie zwischen diesen Punkten von derselben geraden Linie nicht mehr als zweimal geschnitten werden kann. Hiernach ist klar, daß eine Curve, welche einen Inflexionspunkt hat, nicht convex sein kann. Denn denkt man sich, nachdem durch den Inflexionspunkt die Tangente gezogen ist, von diesem Punkte zwei Radienvectoren nach zwei, einander sehr nahe liegenden Punkten, der eine über und der andere unter der Tangente, gezogen; so schneidet derjenige dieser beiden Radienvectoren, welcher den kleinsten spitzen Winkel mit der Tangente bildet, wenn man denselben nach entgegengesetzter Richtung verlängert, die gegebene Curve in einem neuen Punkte. Die Gerade, wovon dieser Radiusvector ein Theil ist, hat also drei Punkte mit der Curve gemein. Auch kann man beweisen, daß, wenn die Ordinate y und ihre abgeleitete Func-

tion y für einen, zwischen zwei gegebenen Punkten der Curve liegenden Theil zwei continuirliche Functionen der Abscisse x sind, wovon die zweite beständig zu- oder abnimmt, während die Abscisse zunimmt, dieser Theil der Curve convex ist. Denn wenn er von derselben geraden Linie in drei verschiedenen Punkten (A), (B), (C) geschnitten werden könnte, so könnte man auch durch zwei, resp. auf den der Sehne AB und BC zugehörigen Bogen der Curve liegende Punkte (E), (F) zwei, zu dieser Geraden parallele Tangenten ziehen, und folglich bekäme y' in dem Punkte (F) denselben Werth, als im Punkte (E), was gegen die Voraussetzung ist. In dieser Voraussetzung ist die Convexität der Curve nach der Seite der negativen oder der positiven y gekehrt, jenachdem die Ordinate der Curve größer oder kleiner, als die Ordinate jeder Tangente vor und nach dem Berührungspunkte ist, d. h. mit anderen Worten, jenachdem der Werth von y'' zwischen den beiden gegebenen Punkten positiv oder negativ ist.

Hieraus folgt ferner, daß man, um zu entscheiden, ob eine Curve in einem Punkte, für welchen y und y'' von Null verschiedene Werthe bekommen, ihre Convexität oder Concavität der Axe der x zukehrt, nur zu untersuchen braucht, ob diese Werthe Größen von demselben oder von entgegengesetztem Zeichen sind, d. h. ob das Product:

$$y\,y''$$

positiv oder negativ ist.

Vielfache Punkte nennt man diejenigen, worin sich zwei oder mehrere Curvenzweige treffen, welche nicht alle in diesen Punkten aufhören. Auch kann man diejenigen Punkte vielfache Punkte nennen, in welchen sich wenigstens drei verschiedene Curvenzweige endigen. Für jede der Curven:

(39) $\quad y^2 = x^2(1-x^2), \qquad$ (40) $\quad y^2 = x^4(1-x^2)$

ist offenbar der Anfangspunkt ein vielfacher Punkt; denn die Curve (39) besteht aus zwei Zweigen, welche durch die Gleichungen:

$$y = -x\sqrt{(1-x^2)}, \quad y = x\sqrt{(1-x^2)}$$

ausgedrückt werden und sich im Anfangspunkte durchkreuzen, indem sie die Geraden:

$$y = -x, \quad y = x$$

berühren. Was die beiden, durch die Gleichungen:

$$y = -x^2\sqrt{(1-x^2)}, \quad y = x^2\sqrt{(1-x^2)}$$

ausgedrückten Zweige der Curve (40) anlangt, so treffen sie sich auch im Anfangspunkte, aber sie haben in diesem Punkte dieselbe Tangente, welche mit der Axe der x zusammenfällt.

Wenn man den Kreis:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

beschrieben hat und man construirt eine Curve, deren Ordinate y sich zu der Abscisse x wie die Ordinate des Kreises, nämlich $\pm\sqrt{(R^2-x^2)}$,

zu dem Halbmesser R verhält, so ist diese Curve die sogenannte Lemniscate, und ihre Gleichung:

$$(41) \qquad R^2 y^2 = x^2 (R^2 - x^2)$$

enthält die Gleichung (39) als einen besonderen Fall. Nun sind aber die verschiedenen Lemniscaten, welche man erhält, wenn man den Halbmesser R variiren läßt, offenbar ähnliche Curven, wovon jede fast dieselbe Form, als das Zeichen ∞ hat und einen vielfachen Punkt darbietet, welcher mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfällt.

Der Anfangspunkt ist auch ein vielfacher Punkt, worin sich vier Zweige jeder der folgenden Curven:

$$(42) \qquad \left(y - x \, arc\, tang \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 \cos x,$$

$$(43) \qquad \left(y - \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}\right)^2 = x^2 \cos x,$$

$$(44) \qquad (y^2 - x^2)^2 = x^4 \sin x,$$

$$(45) \qquad (y^2 - x^2 \sin^2 x)^2 = x^4 \sin^4 x \, . \, tang\, x$$

endigen. Ferner wollen wir bemerken, daß die, die vier Curvenzweige berührenden Halbaxen für die Curven (42) und (43) verschieden sind, während sie sich für die Curve (44) auf zwei und für die Curve (45) auf eine einzige reduciren. Diese Halbaxen fallen für die beiden, auf der Seite der positiven x liegenden Zweige der Curve (42) mit den Geraden:

$$y = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) x, \quad y = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) x$$

und für die beiden, auf der Seite der negativen x liegenden Zweige derselben Curve mit den Geraden:

$$y = -\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) x, \quad y = -\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) x,$$

für die beiden, auf der Seite der positiven x liegenden Zweige der Curve (43) mit den Geraden:

$$y = x, \qquad y = -x$$

und für die beiden, auf der Seite der negativen x liegenden Zweige derselben Curve mit den Geraden:

$$y = 0, \qquad y = 2x,$$

ferner für die vier, sämmtlich auf der Seite der positiven x liegenden Zweige der Curve (44) mit den Geraden:

$$y = x, \qquad y = -x,$$

und endlich für die vier Zweige der Curve (45) mit der Halbaxe der positiven x zusammen.

Die Schließungspunkte, die vorſpringenden Punkte, die Rückkehrpunkte, die Inflexionspunkte, die vielfachen Punkte,... und im Allgemeinen alle Punkte, welche auf gewiſſen Curven ſo liegen, daß ſie gewiſſe bemerkenswerthe, der Natur der Curve eigenthümliche und von der Lage der Coordinatenaxen unabhängige Eigenſchaften darbieten, werden mit dem gemeinſchaftlichen Namen ſingulärer (beſonders merkwürdiger) Punkte bezeichnet. So ſind z. B. die Punkte einer Curve zu den ſingulären Punkten zu rechnen, worin die Richtung der Tangente unbeſtimmt wird. Für die Curve:

$$y = x \sin \frac{1}{x} \tag{46}$$

iſt der mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zuſammenfallende Punkt ein ſolcher.

Fünfte Vorlesung.

Differenzial des Bogens einer ebenen Curve. Winkel, welche die Tangente an dieser Curve mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet. Von den ebenen Curven, welche sich in einem gegebenen Punkte schneiden oder berühren.

Wir wollen wieder eine, durch eine Gleichung zwischen zwei rechtwinkligen Coordinaten x, y ausgedrückte ebene Curve betrachten, und es sei s der Bogen dieser Curve, welcher zwischen einem festen und dem beweglichen Punkte (x, y) liegt. Wenn man durch diesen letzten Punkt eine Tangente an die Curve zieht, so ist der spitze Winkel, welchen diese Tangente mit der Axe der x bildet, nach dem Obigen die Neigung der Curve, und wenn man diesen Winkel mit τ bezeichnet, so findet man:

$$(1) \qquad sec\,\tau = \sqrt{(1+y'^2)} = \sqrt{\left(1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right)}.$$

Wenn man ferner eine der Abscisse $x+\triangle x$ entsprechende Ordinate zieht, so werden die Theile der Curve und Tangente, welche zwischen dem Punkte (x, y) und dieser Ordinate liegen, offenbar durch die Zahlenwerthe der beiden Ausdrücke:

$$(2) \qquad \triangle s, \text{ und } (3) \quad \frac{\triangle x}{cos\,\tau} = sec\,\tau \,.\, \triangle x$$

ausgedrückt, während der Theil der Ordinate zwischen der Tangente und der Curve seinem absoluten Werthe nach einem Produkte von der Form:

$$(4) \qquad [f'(x+\theta\triangle x) - f'(x)]\triangle x$$

gleich ist, wo θ eine kleinere Zahl als die Einheit bezeichnet. (s. die vorherg. Vorles.)

Nun wollen wir den Punkt $(x+\triangle x, y+\triangle y)$ so nahe an dem Punkte (x, y) annehmen, daß bei dem Uebergange von dem einen zum anderen die beiden Functionen y, y' stetig sind und die letztere stets zu- oder stets abnimmt. In dem zum Theil krummlinigen Dreiecke, welches von dem Curvenbogen, der Tangente und

der der Abscisse $x+\triangle x$ entsprechenden Ordinate gebildet wird, sind die zweite und dritte Seite Stücke von geraden Linien und die erste eine convexe Curve. Folglich ist jede Seite dieses Dreieckes kleiner, als die Summe der beiden anderen, und die Differenz zwischen den beiden ersten Seiten hat einen kleineren Zahlenwerth, als die dritte Seite. Folglich sind die Zahlenwerthe der Ausdrücke (2) und (3) um eine kleinere Größe von einander verschieden, als der Zahlenwerth des Ausdruckes (4), und wenn man diese drei Ausdrücke durch $\triangle x$ dividirt, so muß man schließen, daß die Differenz zwischen $\pm\frac{\triangle s}{\triangle x}$ und $sec\,\tau$, nämlich:

$$(5)\qquad \pm\frac{\triangle s}{\triangle x}-sec\,\tau$$

einen kleineren Zahlenwerth hat, als der Ausdruck:

$$(6)\qquad f'(x+\theta\triangle x)-f'(x).$$

Läßt man ferner $\triangle x$ gegen die Grenze Null convergiren, so convergirt der Ausdruck (6) offenbar gegen dieselbe Grenze und dasselbe gilt also auch von dem Ausdrucke (5). Setzt man aber die Grenze dieses Ausdruckes gleich Null, so findet man:

$$(7)\qquad \pm\frac{ds}{dx}-sec\,\tau=0,$$

oder was auf dasselbe hinausläuft:

$$(8)\qquad ds=\pm sec\,\tau\,.\,dx=\pm\sqrt{(1+y'^2)}\,.\,dx,$$

und folglich:

$$(9)\qquad ds=(1+y'^2)\,dx^2=dx^2+dy^2.$$

Es ist zu bemerken, daß in der Formel (5) und folglich auch in den Gleichungen (7) und (8) für das Zeichen $\pm$ das Zeichen $+$ genommen werden muß, wenn der Bogen s mit der Abscisse x zugleich wächst, und im entgegengesetzten Falle das Zeichen $-$. Ferner folgt aus den Gleichungen (7) und (9):

$$(10)\qquad \begin{cases} cos\,\tau=\pm\frac{dx}{ds}, & sin\,\tau=\pm\frac{dy}{ds}, \\ sec\,\tau=\pm\frac{ds}{dx}, & cosec\,\tau=\pm\frac{ds}{dy}. \end{cases}$$

Substituirt man die vorhergehenden Werthe von $sec\,\tau$ und $cosec\,\tau$ in die Ausdrücke (7) der zweiten Vorlesung, so ergibt sich, daß die Längen, welche wir Normale und Tangente genannt haben, ausgedrückt werden können durch:

$$(11)\qquad N=\pm y\frac{ds}{dx},\qquad T=\pm y\frac{ds}{dx}.$$

Die Länge der Sehne, welche dem Bogen $+\Delta s$ zwischen dem Punkte (x, y) und $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ entspricht, wird offenbar durch die Wurzelgröße:

$$\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)} \tag{12}$$

ausgedrückt, und folglich ist das Verhältniß des Bogens zu seiner Sehne:

$$\frac{\pm\Delta s}{\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}}. \tag{13}$$

Nun folgt aber aus der Formel (9) die Gleichung:

$$\frac{\pm ds}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}=1, \tag{14}$$

deren erster Theil genau die Grenze des Ausdruckes (13) ist. (s. Differenzialr. S. 25). Wenn also ein ebener Curvenbogen unendlich klein wird, so wird das Verhältniß desselben zu seiner Sehne der Einheit gleich.

Wir wollen nun die Winkel, welche die von dem Punkte (x, y) nach dem Punkte $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ gezogene Sehne oder Secante mit den Halbaxen der positiven x und y bildet, mit a und b bezeichnen, wo jeder derselben als zwischen 0^0 und 180^0 liegend vorausgesetzt wird. Es seien ferner α, β die Grenzen, gegen welche die Winkel a, b convergiren, während sich der Punkt $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ dem Punkte (x, y) unendlich nähert, d. h. mit anderen Worten, die Winkel, welchen die nach demselben Sinne als die Sehne verlängerte Tangente mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet. Die Formeln (4) der Vorerinnerungen geben:

$$\cos a=\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}}, \quad \cos b=\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}} \tag{15}$$

und hieraus folgt, wenn man zu den Grenzen übergeht:

$$\cos\alpha=\frac{dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}, \quad \cos\beta=\frac{dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}. \tag{16}$$

Wenn man in den Gleichungen (16) für die Wurzelgröße $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ ihren, aus der Gleichung (14) gezogenen Werth setzt, so erhält man eins der beiden folgenden Systeme von Formeln:

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta=\frac{dy}{ds}; \tag{17}$$

$$\cos\alpha=-\frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta=-\frac{dy}{ds}. \tag{18}$$

Das erste System muß angewandt werden, wenn die Tangente an der Curve nach demselben Sinne, als der Bogen s verlängert ist, und das zweite System, wenn sie nach entgegengesetz-

tem Sinne verlängert ist. Denn da das Verhältniß $\frac{dx}{ds}$ die Grenze von $\frac{\Delta x}{\Delta s}$ ist, so ist es positiv, wenn der Bogen s mit x zugleich wächst, oder mit anderen Worten, wenn die nach demselben Sinne, als der Curvenbogen verlängerte Tangente mit der Halbaxe der positiven x einen spitzen Winkel, dessen Cosinus positiv ist, bildet. Wenn dieser Winkel stumpf wird, so wird sein Cosinus und das Verhältniß $\frac{dx}{ds}$ zu gleicher Zeit negativ. Man muß also die Formeln (17) oder (18) nehmen, jenachdem durch α der in Rede stehende Winkel oder sein Supplement bezeichnet wird, d. h. jenachdem die Tangente an der Curve nach demselben Sinne verlängert ist, als der Bogen s, oder nach entgegengesetztem Sinne.

Die Winkel, welche wir mit α und β bezeichnet haben, sind offenbar, der erste dem Winkel τ, welcher die Neigung der Curve mißt, oder dem Supplemente von τ, d. h. $\pi - \tau$, und der zweite einem der Winkel $\frac{\pi}{2} - \tau$, $\frac{\pi}{2} + \tau$, welche sich ebenfalls zu zwei rechten ergänzen, gleich. Man hat also:

$$(19) \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} \pm \left(\frac{\pi}{2} - \tau\right), \quad \beta = \frac{\pi}{2} \pm \tau;$$

und folglich:

$$(20) \qquad \cos\alpha = \pm \cos\tau, \quad \cos\beta = \pm \sin\tau.$$

Wenn man aus diesen letzten Formeln mit Hülfe der Gleichungen (10) $\cos\tau$ und $\sin\tau$ eliminirt, so findet man die beiden Werthe von $\cos\alpha$ und die von $\cos\beta$ wieder, welche die Gleichungen (17) und (18) geben; nur gibt die Rechnung nicht an, wie diese Werthe mit einander verbunden werden müssen.

Betrachten wir nun zwei in der Ebene der xy liegende ebene Curven. Es seien x, y die Coordinaten der ersten Curve und s der Bogen dieser Curve, welcher zwischen einem festen Punkte und dem beweglichen Punkte (x, y) liegt. Ebenso seien ξ, η die Coordinaten der zweiten Curve und ς der Bogen dieser Curve, welcher zwischen einem festen Punkte und dem beweglichen Punkte (ξ, η) liegt; so findet man:

$$(21) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad d\varsigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2.$$

Ferner, wenn die an die erste Curve durch den Punkt (x, y) und die an die zweite durch den Punkt (ξ, η) gezogenen Tangenten resp. nach demselben Sinne als die Bogen s und ς verlängert sind, so bilden sie mit den Halbaxen der positiven Coordinaten Winkel, deren Cosinus für die erste Tangente resp. gleich:

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds},$$

und für die zweite Tangente resp. gleich:

$$\frac{d\xi}{d\varsigma}, \quad \frac{d\eta}{d\varsigma}$$

sind.

Nennt man also den Winkel, welchen beiden die Tangenten miteinander bilden, δ, so hat man nach der Formel (20) der Vorerinnerungen:

$$(22) \quad \cos\delta = \frac{dx}{ds}\,\frac{d\xi}{d\varsigma} + \frac{dy}{ds}\,\frac{d\eta}{d\varsigma} = \frac{dx\,d\xi + dy\,d\eta}{ds\,d\varsigma}.$$

Die beiden Tangenten werden parallel, wenn man hat:

$$(23) \quad \frac{d\xi}{d\varsigma} = \frac{dx}{ds}, \quad \frac{d\eta}{d\varsigma} = \frac{dy}{ds},$$

oder:

$$(24) \quad \frac{d\xi}{d\varsigma} = -\frac{dx}{ds}, \quad \frac{d\eta}{d\varsigma} = -\frac{dy}{ds}.$$

Es ist übrigens zu bemerken, daß für die Formeln (23) und (24) die eine Gleichung:

$$(25) \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\eta}{dy}$$

gesetzt werden kann, woraus folgt:

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{d\eta}{dy} = \pm\frac{\sqrt{(d\xi^2 + d\eta^2)}}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = \pm\frac{d\varsigma}{ds}.$$

Die beiden Tangenten bilden ferner einen rechten Winkel mit einander, wenn $\cos\delta = 0$, und folglich:

$$(26) \quad dx\,d\xi + dy\,d\eta = 0$$

ist.

Wenn man in die Formel (22) für ds und $d\varsigma$ ihre aus den Gleichungen (21) gezogenen Werthe substituirt, so erhält man folgende:

$$(27) \quad \cos\delta = \pm\frac{dx\,d\xi + dy\,d\eta}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}\sqrt{(d\xi^2 + d\eta^2)}}.$$

Wenn man in dieser letzten Formel das Zeichen des zweiten Theiles nicht bestimmt, so gibt sie zwei, zwischen 0 und π liegende Werthe von δ, welche resp. den spitzen und stumpfen Winkel ausdrücken, den die zu beiden Seiten der Punkte (x, y), (ξ, η) unbestimmt verlängerten Tangenten mit einander bilden.

Wenn sich die beiden Curven in einem Punkte durchschneiden, so nimmt man an, daß sie dieselben Winkel mit einander bilden, als die durch diesen Punkt an sie gezogenen Tangenten. Alsdann hat man für den Durchschnittspunkt:

$$(28) \quad \xi = x, \quad \eta = y,$$

und die Winkel, welche die beiden Curven mit einander bilden, haben offenbar die zwischen o und π liegenden Werthe von δ zum Maße, welche der Gleichung (27) Genüge leisten.

Man sagt, zwei Curven sind *auf einander senkrecht*, wenn sie sich unter rechten Winkeln durchschneiden, und *sie berühren einander*, wenn sie in ihrem gemeinschaftlichen Punkte eine gemeinschaftliche Tangente haben, d. h. wenn der zwischen ihnen liegende spitze Winkel verschwindet. Im zweiten Falle wird die Gleichung (25) oder:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx} \tag{29}$$

für den Berührungspunkt erfüllt, und im ersten Falle wird die Gleichung (26) oder:

$$1 + \frac{d\eta}{d\xi}\,\frac{dy}{dx} = 0 \tag{30}$$

für den Durchschnittspunkt erfüllt.

Es ist wohl zu bemerken, daß die Differenziale in den verschiedenen vorhin abgeleiteten Formeln alle zu gleicher Zeit verschwinden, wenn man ds, $d\varsigma$, dy und $d\eta$ vermittelst der Gleichungen (21) in Verbindung mit den Differenzialgleichungen der gegebenen Curven eliminirt. Die Rechnungen werden einfacher, wenn die endlichen Gleichungen der beiden Curven unter der Form:

$$y = f(x), \quad \eta = F(\xi) \tag{31}$$

erscheinen. Alsdann haben die beiden Curven vermöge der beiden Gleichungen (28) und (29) einen der Abscisse x entsprechenden gemeinschaftlichen Punkt, wenn diese Abscisse der Gleichung:

$$f(x) = F(x) \tag{32}$$

Genüge leistet, und sie berühren sich in diesem Punkte, wenn man außerdem:

$$f'(x) = F'(x) \tag{33}$$

hat. Dagegen werden die beiden Curven auf einander senkrecht, wenn man für den gemeinschaftlichen Punkt:

$$1 + f'(x)\,F'(x) = 0 \tag{34}$$

hat.

Wenn man die endlichen Gleichungen der beiden Curven durch:

$$f(x, y) = 0, \quad F(\xi, \eta) = 0, \tag{35}$$

und ihre Differenzialgleichungen durch:

$$\varphi(x, y)\,dx + \chi(x, y)\,dy = 0,$$
$$\Phi(x, y)\,dx + X(x, y)\,dy = 0 \tag{36}$$

ausdrückte, so erhielte man statt der Formel (33):

$$(37) \qquad \frac{\varphi(x, y)}{\chi(x, y)} = \frac{\Phi(x, y)}{X(x, y)},$$

und ſtatt der Formel (34):

$$(38) \qquad \varphi(x, y) . \Phi(x, y) + \chi(x, y) . X(x, y) = 0.$$

In der zweiten der Gleichungen (31) oder (35) kann man auch für die Buchſtaben ξ, η die Buchſtaben x, y ſubſtituiren und z. B. annehmen, daß die beiden Curven durch die beiden Gleichungen:

$$(39) \qquad y = f(x), \quad y = F(x)$$

ausgedrückt werden. Sollen ſich alsdann die beiden Curven in dem Punkte, deſſen Abſciſſe x iſt, berühren, ſo iſt es nach den Formeln (32) und (33) hinreichend, daß die dieſem Punkte entſprechenden Werthe von y und y' bei dem Uebergange von der erſten Curve zur zweiten dieſelben bleiben. Uebrigens iſt dieſes für ſich einleuchtend; denn, wenn die eben erwähnten Bedingungen erfüllt werden, ſo iſt klar, daß die beiden Curven für die Abſciſſe x nicht blos dieſelbe Ordinate, ſondern auch dieſelbe Tangente haben.

Beiſpiele. Die beiden Parabeln des zweiten und dritten Grades, welche durch die Gleichungen:

$$(40) \qquad y = x^2, \quad y = x^3$$

ausgedrückt werden, berühren ſich im Anfangspunkte und haben in dieſem Punkte die Axe der x zur gemeinſchaftlichen Tangente, weil die beiden Gleichungen:

$$(41) \qquad x^2 = x^3 \text{ und } 2x = 3x^2$$

für den Werth $x = o$, welchem die Werthe $y = o$ und $y' = o$ entſprechen, erfüllt werden.

Der Anfangspunkt der Coordinaten iſt auch ein Berührungspunkt für die beiden Curven:

$$(42) \qquad y = x^{\frac{4}{3}}, \; y = x^{\frac{5}{4}},$$

deren gemeinſchaftliche Tangente mit der Axe der x zuſammenfällt, und für die beiden Curven:

$$(43) \qquad y = x^{\frac{3}{4}}, \; y = x^{\frac{4}{5}},$$

deren gemeinſchaftliche Tangente mit der Axe der y zuſammenfällt.

Unter einer Parabel des Grades a oder $\frac{1}{a}$ verſteht man im Allgemeinen eine Curve, deren Gleichung zwiſchen rechtwinkligen Coordinaten unter der Form:

$$(44) \qquad y = Ax^a, \text{ oder } x = \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{a}} y^{\frac{1}{a}}$$

dargeſtellt werden kann, wo a eine poſitive Conſtante bezeichnet. Demnach iſt einleuchtend, daß die Parabeln:

(45) $$y = Ax^a, \quad y = Bx^b$$

sich im Anfangspunkte der Coordinaten berühren, wenn die Größen a, b beide größer oder beide kleiner als die Einheit sind, und daß sie im ersten Falle die Axe der x und im zweiten die der y zur gemeinschaftlichen Tangente haben.

Wir schließen diese Vorlesung mit dem Beweise eines Lehrsatzes, welcher in der Theorie der Berührungen ebener Curven von großem Nutzen ist, und folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

Lehrsatz. Wenn zwei sich berührende ebene Curven gegeben sind, und man nimmt auf beiden Curven vom Berührungspunkte aus in demselben Sinne zwei gleiche, aber sehr kleine Längen, so ist die Gerade, welche die Endpunkte dieser Längen verbindet, fast zu der gemeinschaftlichen Normale beider Curven parallel.

Beweis. Wir wollen annehmen, daß die Endpunkte der vom Berührungspunkte aus auf beiden Curven genommenen gleichen Längen den Punkten (x, y) und (ξ, η) entsprechen. Ferner seien s und ς die Bogen, welche resp. zwischen einem festen Punkte der ersten Curve und dem Punkte (x, y) und zwischen einem festen Punkte der zweiten Curve und dem Punkte (ξ, η) liegen. Während die Coordinaten x, y; ξ, η gleichzeitig variiren, bleibt die Differenz:

$$\varsigma - s$$

unveränderlich, und man hat folglich:

$$\varsigma = s + Const.,$$

also:

(46) $$d\varsigma = ds.$$

Ueberdies seien α, β die Winkel, welche die nach demselben Sinne als die Bogen s und ς verlängerte gemeinschaftliche Tangente beider Curven mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet, u die Länge der vom Punkte (ξ, η) nach dem Punkte (x, y) gezogenen Geraden und endlich λ, μ die Winkel, welche diese Gerade mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet; so findet man:

(47) $$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{d\xi}{d\varsigma}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{d\eta}{d\varsigma},$$

(48) $$u = \sqrt{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]},$$

(49) $$\cos\lambda = \frac{x-\xi}{u}, \quad \cos\mu = \frac{y-\eta}{u},$$

und aus den Formeln (21) in Verbindung mit der Gleichung (46) folgt:

$$dx^2 + dy^2 = d\xi^2 + d\eta^2,$$

oder was dasselbe ist:

(50) $$(dx + d\xi)(dx - d\xi) + (dy + d\eta)(dy - d\eta) = 0.$$

Nun geben aber die Gleichungen (47):

$$(51) \qquad \frac{dx+d\xi}{\cos\alpha}=\frac{dy+d\eta}{\cos\beta}=ds+d\varsigma=2ds.$$

Läßt man ferner h in der Formel (3) auf S. 38 der Diffr. gegen die Grenze Null convergiren, so ergibt sich daraus, daß in der Nähe eines besondern Werthes von x, für welchen zwei gegebene Functionen verschwinden, das Verhältniß dieser Functionen sehr wenig von dem Verhältnisse ihrer abgeleiteten Functionen und folglich von dem Verhältnisse ihrer Differenziale verschieden ist, selbst wenn diese Differenziale oder abgeleiteten Functionen ihrer Seits für diesen besonderen Werth von x verschwinden. Wendet man diesen Satz auf die zweiten Theile der Gleichungen (49) an, so ergibt sich, daß die Größen $\cos\lambda$ und $\cos\mu$ näherungsweise durch die Formeln:

$$(52) \qquad \cos\lambda=\frac{dx-d\xi}{ds}, \quad \cos\mu=\frac{d\eta-dy}{ds}$$

ausgedrückt werden können. Man hat also sehr nahe:

$$(53) \qquad \frac{dx-d\xi}{\cos\lambda}=\frac{dy-d\eta}{\cos\mu}=ds,$$

Diese letzte Formel ist um so genauer, je näher die Punkte (x, y) und (ξ, η) dem Berührungspunkte beider Curven liegen. Setzt man nun in der Formel (50) $\cos\alpha$, $\cos\beta$ für die Größen:

$$dx+d\xi, \qquad dy+d\eta,$$

welche in demselben Verhältnisse stehen, und für die Differenzen

$$dx-d\xi, \qquad dy-d\eta$$

die ihnen proportionalen Größen $\cos\lambda$, $\cos\mu$; so findet man endlich:

$$(54) \qquad \cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta\cos\mu=0.$$

Folglich ist die vom Punkte (ξ, η) nach dem Punkte (x, y) gezogene Gerade fast auf der gemeinschaftlichen Tangente beider Curven senkrecht, oder was dasselbe ist, zu ihrer gemeinschaftlichen Normale fast parallel.

Sechste Vorlesung.

Von der Krümmung einer ebenen Curve in einem gegebenen Punkte. — Krümmungshalbmesser, Krümmungsmittelpunkt und Krümmungskreis.

Es sei R der Halbmesser eines Kreises, welcher eine Gerade in einem gegebenen Punkte berührt: Wenn man den Halbmesser R ohne Ende wachsen läßt, so nähert sich der dem Berührungspunkte zunächstliegende Theil des Kreises ohne Ende der erwähnten Geraden und fällt fast mit derselben zusammen, wenn das Verhältniß $\frac{1}{R}$ sehr wenig von Null verschieden ist. Dagegen krümmt sich der Kreis immer mehr und mehr, wenn der Halbmesser R immer kleiner und folglich das Verhältniß $\frac{1}{R}$ immer größer wird. Es ist daher natürlich, dieses Verhältniß als Maß der Krümmung des Kreises zu nehmen. Ferner seien x, y die Coordinaten irgend eines Punktes des Kreisumfanges, τ die Neigung desselben in diesem Punkte, s der Bogen zwischen einem festen Punkte und dem Punkte (x, y) und endlich seien $\triangle x$, $\triangle y$, $\triangle \tau$, $\triangle s$ die Incremente, welche diese verschiedenen Veränderlichen annehmen, wenn man von dem Punkte (x, y) zu einem zweiten so nahe liegenden Punkte übergeht, daß die Neigung in dem Intervalle beständig zu- oder beständig abnimmt. Der zwischen den beiden letzten Punkten liegende Bogen ist genau $= \pm \triangle s$, und der Winkel zwischen den nach den Endpunkten dieses Bogens gehenden Halbmessern ist gleich dem Winkel $\pm \triangle \tau$ zwischen den Tangenten an den Endpunkten dieses Bogens. Demnach hat man offenbar:

$$\pm \triangle s = \pm R . \triangle \tau,$$

und man erhält folglich für die Krümmung des Kreises:

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{\triangle \tau}{\triangle s}. \tag{1}$$

Stellen wir uns nun vor, daß x, y; $x + \triangle x$, $y + \triangle y$ die Coordinaten zweier Punkte bezeichnen, welche nicht mehr auf einem

Kreisumfange, sondern auf einer beliebigen Curve und einander so nahe liegen, daß die Neigung τ zwischen den Endpunkten des Bogens $\pm\triangle s$ stetig zu- oder abnimmt. Das Verhältniß:

$$(2) \qquad \pm\frac{\triangle\tau}{\triangle s}$$

ist im Allgemeinen mit dem Bogen $\pm\triangle s$ veränderlich und soll die mittlere Krümmung dieses Bogens genannt werden. Ferner, wenn sich der Punkt $(x+\triangle x, y+\triangle y)$ dem Punkte (x, y) unendlich nähert, so convergiren die beiden Größen $\pm\triangle s$, $\pm\triangle\tau$ gleichzeitig gegen die Grenze Null; aber die Grenze, gegen welche ihr Verhältniß, nämlich:

$$(3) \qquad \pm\frac{d\tau}{ds}$$

convergirt, ist im Allgemeinen eine endliche Größe, welche wir die Krümmung der Curve im Punkte (x, y) nennen wollen.

Der Winkel $\pm\triangle\tau$ zwischen den beiden äußersten Tangenten des Bogens $\pm\triangle s$ wird gewöhnlich der Berührungs- oder Krümmungswinkel genannt.

Wenn der Bogen $\pm\triangle s$ sehr klein ist, so ist seine Sehne fast auf den beiden Normalen der betrachteten Curve in den Punkten (x, y), $(x+\triangle x, y+\triangle y)$ senkrecht, und die Entfernung des Punktes (x, y) von dem Durchschnittspunkte der beiden Normalen ist fast dem Halbmesser eines Kreises gleich, welcher dieselbe Krümmung hat, als die Curve. Denn es sei r diese Entfernung und ϱ die Grenze, welcher sie sich ohne Ende nähert. In dem von den beiden Normalen und der Sehne des Bogens $\pm\triangle s$ gebildeten Dreiecke ist der dieser Sehne gegenüberliegende Winkel offenbar dem Berührungswinkel $\pm\triangle\tau$ gleich, während der der Seite r gegenüberliegende Winkel sehr wenig von einem rechten verschieden ist. Bezeichnet man also durch ε eine unendlich kleine Zahl, so hat man:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\varepsilon\right)}{r}=\frac{\sin(\pm\triangle\tau)}{\sqrt{(\triangle x^2+\triangle y^2)}},$$

und hieraus folgt, wenn man zu den Grenzen übergeht:

$$\frac{1}{\varrho}=\pm\frac{d\tau}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}},$$

oder was dasselbe ist:

$$(4) \qquad \frac{1}{\varrho}=\pm\frac{d\tau}{ds}.$$

Nun folgt aber offenbar aus der Formel (4), daß ϱ den Halbmesser des Kreises ausdrückt, dessen Krümmung $=\pm\frac{d\tau}{ds}$ ist. Dieser von dem Punkte (x, y) aus auf der demselben entsprechenden

Normale genommene Halbmesser wird der Krümmungshalbmesser der gegebenen Curve für den erwähnten Punkt genannt, und der Endpunkt dieses Krümmungshalbmessers, welcher als der Durchschnittspunkt zwei einander unendlich naheliegender Normalen betrachtet werden kann, heißt der Krümmungsmittelpunkt. Der Kreis, welcher diesen letzten Punkt zum Mittelpunkte und den Krümmungshalbmesser zum Halbmesser hat, wird der Krümmungs- oder Berührungskreis genannt. Er berührt offenbar die gegebene Curve, hat dieselbe Krümmung als sie und kehrt seine Convexität nach derselben Seite.

Die Krümmung und der Krümmungshalbmesser einer Curve können unter verschiedenen Formen dargestellt werden, welche gekannt zu werden verdienen, und nun näher angegeben werden sollen.

Wenn man x als unabhängige Veränderliche nimmt, so hat man nach Vorles. 1. und 5:

$$tang\,\tau = \pm y', \quad \tau = \pm\, arc\, tang\, y',$$

$$d\tau = \pm \frac{y''}{1+y'^2}\, dx, \quad ds = \pm \sqrt{(1+y'^2)}\, dx,$$

und folglich gibt die Gleichung (4):

$$(5) \qquad \frac{1}{\varrho} = \pm \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{y''}{sec^3\,\tau}.$$

Aus der Betrachtung dieser letzten Formel erhellet unmittelbar, daß die Krümmung gleich Null und der Krümmungshalbmesser jedesmal unendlich groß wird, wenn sich y'' auf Null reducirt. Alsdann verwandelt sich der Krümmungskreis in eine gerade Linie, welche mit der Tangente zusammenfällt. Dieses findet z. B. für den Inflexionspunkt der Curve $y = x^3$ statt, und im Allgemeinen für alle Inflexionspunkte, in deren Nähe die Functionen y' und y'' in Beziehung auf x stetig bleiben. Wenn der Werth von y'' für einen gewissen Punkt unendlich würde, ohne daß die Tangente auf der Axe der x senkrecht wäre, so würde die Krümmung selbst unendlich und der Krümmungshalbmesser verschwände. Wenn endlich die Größen y', y'' beide unendlich würden, so erschiene der Bruch:

$$\pm \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

unter einer unbestimmten Form. Aber man könnte den wahren Werth desselben mit Hülfe der in der Differenzialrechnung aufgestellten Prinzipien bestimmen.

Jedoch ändert zuweilen der Krümmungshalbmesser seinen Werth plötzlich, während sich die Abscisse stetig ändert. Dieser Umstand kann nicht blos in den Punkten der Curven, welche wir vorspringende genannt haben, stattfinden, wenn die Function y' discontinuirlich wird, indem sie ihren Werth plötzlich ändert, sondern auch in dem Falle, wo die Function y' continuirlich bleibt und die Func-

tion y'' Unterbrechungen der Stetigkeit darbietet. Dieser Umstand findet z. B. bei jeder der Curven:

$$(6) \qquad y = x\left(1 + arc\ tang \frac{1}{x}\right),$$

$$(7) \qquad y = x^2\left(1 + arc\ tang \frac{1}{x}\right)$$

für den mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfallenden Punkt statt, welcher zugleich ein vorspringender Punkt der ersten Curve und ein Berührungspunkt der zweiten Curve mit der Axe der x ist. Denn vermittelst der Formel (5) ergibt sich leicht, daß in dem Augenblicke, wo die Veränderliche x verschwindet, um das Zeichen zu verändern, der Krümmungshalbmesser der Curve (6) von dem Werthe $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 + 1\right]^{\frac{3}{2}}$ zu dem Werthe $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)^2 + 1\right]^{\frac{3}{2}}$, und der der Curve (7) von dem Werthe $\frac{1}{\pi - 2}$ zu dem Werthe $\frac{1}{\pi + 2}$ übergeht.

Wenn man für $sec\ \tau = \sqrt{(1 + y'^2)}$ das Verhältniß der Normale N und des Zahlenwerthes der Ordinate y (s. Gleich. 5. Vorl. 2.) in die Formel (5) substituirt, so findet man:

$$(8) \qquad \frac{1}{\varrho} = \pm \frac{y^3\, y''}{N^3},$$

und hieraus folgt:

$$(9) \qquad \varrho = \pm \frac{N^3}{y^3\, y''}.$$

Vermittelst der Gleichung (9) kann man die Krümmungshalbmesser mehrerer Curven leicht bestimmen, wie wir sogleich zeigen werden.

Beispiel 1. Betrachten wir die durch die Gleichung:

$$(10) \qquad y^2 = 2px + qx^2,$$

worin p eine positive Constante ist, ausgedrückte Curve, welche eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, jenachdem die Größe q negativ, Null, oder positiv ist; so sieht man leicht ein, 1) daß die Axe der x mit einer Axe der Curve und der Anfangspunkt mit einem Endpunkte dieser Axe zusammenfällt, und 2) daß, wenn die Constante q größer als -1 ist, p den Parameter, d. h. die dem Brennpunkte der Curve entsprechende Ordinate ausdrückt. Differenzirt man nun die Gleichung (10), so folgt daraus:

$$y\, y' = p + q\, x,$$

und folglich:

$$y^2\, y'^2 = p^2 + 2pqx + q^2\, x^2 = p^2 + q\, y^2,$$

also:

$$y'^2 = \frac{p^2}{y^2} + q,$$

und wenn man nochmals differenzirt und durch $2y'$ dividirt:

$$y'' = -\frac{p^2}{y^3}, \quad y^3 y'' = -p^2.$$

Demnach gibt die Gleichung (9):

$$\varrho = \frac{N^3}{p^2}. \tag{11}$$

In der Curve (10) ist also der Krümmungshalbmesser dem Quotienten aus dem Cubus der Normale und dem Quadrate der Länge p gleich. Wenn man für N seinen Werth:

$$N = \sqrt{(y^2 + y^2 y'^2)} = [p^2 + (1+q)\, y^2]^{\frac{1}{2}}$$

wieder setzt, so verwandelt sich die Formel (9) in:

$$\varrho = \frac{[p^2 + (1+q)\, y^2]^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{[p^2 + (1+q)(2px + q x^2)]^{\frac{3}{2}}}{p^2}. \tag{12}$$

Wenn sich endlich die gegebene Curve auf die Parabel:

$$y^2 = 2px \tag{13}$$

reducirt, so hat man blos:

$$\varrho = \frac{(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = p\left(1 + \frac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{14}$$

Wenn man in den Formeln (10) und (12) $x = o$ setzt, so folgt daraus $y = o$, $\varrho = p$. Dieselbe Bemerkung ist auf die Gleichungen (13) und (14) anwendbar. Hieraus folgt, daß in der Parabel, Ellipse und Hyperbel der dem Scheitel in dem Endpunkte der großen Axe oder der reellen Axe entsprechende Krümmungshalbmesser dem Parameter gleich ist.

Beispiel 2. Wir wollen nun die Ellipse oder Hyperbel betrachten, deren Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \tag{15}$$

ist, worin a und b die beiden Halbaxen bezeichnen.

Verfährt man wie im ersten Beispiele, so findet man:

$$\frac{x}{a^2} \pm \frac{y\, y'}{b^2} = 0, \quad y'^2 = \pm \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{b^2}{y^2} \mp 1\right),$$

$$y'' = \mp \frac{b^4}{a^2 y^3}, \quad y^3 y'' = \mp \frac{b^4}{a^2},$$

$$(16) \qquad \varrho = \frac{N^3}{\left(\frac{b^2}{a}\right)^2};$$

oder wenn man für N seinen aus den Formeln (12) der zweiten Vorles. gezogenen Werth wieder setzt:

$$(17) \quad \varrho = \frac{\left(\frac{b^2}{a^2}x^2 \pm a^2 \mp x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{\left(\frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Betrachtet man insbesondere die Ellipse:

$$(18) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so findet man für den Krümmungshalbmesser im Endpunkte der Axe $2a$:

$$\varrho = \frac{b^2}{a},$$

und für den in dem Endpunkte der Axe $2b$:

$$\varrho = \frac{a^2}{b}.$$

Wenn $2a$ die große Axe ausdrückt, so ist der im ersten Beispiele durch die Constante p bezeichnete Parameter $= \frac{b^2}{a}$.

Beispiel 3. Betrachten wir jetzt die Cycloide, worin die Ordinate y und ihre abgeleitete Function y' durch die Formeln (23) und (25) der zweiten Vorlesung bestimmt werden. Aus der Formel (25) folgt:

$$y'^2 = \frac{2R}{y} - 1;$$

ferner, wenn man differenzirt und durch $2y'$ dividirt:

$$y'' = -\frac{R}{y^2}, \quad y^3 y'' = -Ry = -\tfrac{1}{2}N^2,$$

und folglich:

$$(19) \qquad \varrho = \frac{N^3}{\frac{1}{2}N^2} = 2N.$$

In der Cycloide ist also der Krümmungshalbmesser der doppelten Normale gleich, wenn man die Basis zur Axe der x nimmt. Der Krümmungshalbmesser verschwindet also mit der Normale und die Krümmung wird in allen Punkten, wo die Cycloide die Basis schneidet, d. h. in allen Rückkehrpunkten, unendlich, während der Krümmungshalbmesser in den am weitesten von der

Basis entfernten Punkten dem doppelten Durchmesser des Erzeugungskreises gleich wird.

Nehmen wir nun an, daß die Abscisse x nicht mehr die unabhängige Veränderliche ist, so findet man:

$$tang\,\tau = \pm\frac{dy}{dx}, \quad \tau = \pm\, arc\, tang\frac{dy}{dx},$$

$$d\tau = \pm\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2+dy^2}, \quad ds = \pm(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}},$$

und die Formel (4) gibt:

$$(20)\quad \frac{1}{\varrho} = \pm\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3}.$$

In dem besondern Falle, wo man den Bogen s als unabhängige Veränderliche betrachtet, kann man den zweiten Theil der Gleichung (20) so transformiren, daß er blos die abgeleiteten Functionen der zweiten Ordnung der Coordinaten x und y in Beziehung auf s enthält. Denn differenzirt man die Gleichung:

$$dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

indem man ds als eine constante Größe betrachtet, so erhält man:

$$(21)\qquad dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0,$$

und hieraus folgt (s. algebr. Analys. Note *II.*):

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{-d^2x}{dy} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2+dy^2}$$

$$= \pm\frac{[(d^2x)^2 + (d^2y)^2]^{\frac{1}{2}}}{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}};$$

und wenn man ds^2 statt dx^2+dy^2 setzt:

$$\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^2} = \pm\frac{[(d^2x)^2 + (d^2y)^2]^{\frac{1}{2}}}{ds}.$$

Hiernach folgt aus der Formel (20):

$$(22)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{[(d^2x)^2 + (d^2y)^2]^{\frac{1}{2}}}{ds^2}$$

$$= \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ferner, wenn man von dem Punkte (x, y) aus auf der gegebenen Curve und auf ihrer, nach demselben Sinne als der Bogen s verlängerten Tangente gleiche und unendlich kleine Längen $= i$

nimmt, so erhält man für die Coordinaten des Endpunktes der zweiten Länge:

$$x+i\frac{dx}{ds},\quad y+i\frac{dy}{ds},$$

und für die des Endpunktes der ersten:

$$x+i\frac{dx}{ds}+\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2x}{ds^2}+I\right),$$

$$y+i\frac{dy}{ds}+\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2y}{ds^2}+J\right),$$

wo I und J unendlich kleine Größen bezeichnen. Nennt man also die Entfernung zwischen den Endpunkten dieser beiden Längen s, so hat man:

$$s=\frac{i^2}{2}\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}+I\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}+J\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

und folglich:

$$\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=lim\,\frac{2s}{i^2}. \tag{23}$$

Aus dieser letzten Formel folgt in Verbindung mit der Gleichung (22):

$$\rho=lim\,\frac{i^2}{2s}. \tag{24}$$

Um also den Krümmungshalbmesser einer Curve für einen gegebenen Punkt zu erhalten, braucht man nur auf dieser Curve und ihrer, nach demselben Sinne verlängerten Tangente gleiche und unendlich kleine Längen zu nehmen und das Quadrat einer derselben durch die doppelte Entfernung zwischen ihren Endpunkten zu dividiren. Die Grenze des Quotienten ist der genaue Werth des Krümmungshalbmessers.

Wenn man die Formeln (5), (20) oder (22) zur Bestimmung der Krümmung einer Curve anwenden will, so muß man zuerst die Differenziale der ersten und zweiten Ordnung der Coordinaten x, y als Functionen dieser Coordinaten und der Differenziale der unabhängigen Veränderlichen bestimmen. Man braucht diese Rechnung nicht bei jedem besondern Falle zu wiederholen, wenn man die allgemeine Formel anwendet, welche wir sogleich ableiten wollen.

Es sei:

$$u=0 \tag{25}$$

die Gleichung der gegebenen Curve, wo u eine Function der rechtwinkligen Coordinaten x, y bezeichnet. Differenzirt man diese Gleichung zweimal hinter einander, so erhält man:

(26) $$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy=0,$$

(27) $$\frac{du}{dx}d^2x+\frac{du}{dy}d^2y$$
$$=-\left(\frac{d^2u}{dx^2}dx^2+2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy+\frac{d^2u}{dy^2}dy^2\right),$$

und folglich:

(28) $$\frac{dy}{\left(\frac{du}{dx}\right)}=\frac{-dx}{\left(\frac{du}{dy}\right)}=\frac{dyd^2x-dxd^2y}{\frac{du}{dx}d^2x+\frac{du}{dy}d^2y}$$
$$=\pm\frac{[dx^2+dy^2]^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Man hat also:

$$dxd^2y-dyd^2x=$$
$$\mp\frac{[dx^2+dy^2]^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{du}{dx}d^2x+\frac{du}{dy}d^2y\right]$$
$$=\pm\frac{[dx^2+dy^2]^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{d^2u}{dx^2}dx^2+2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy+\frac{d^2u}{dy^2}dy^2\right].$$

Aus dieser letzten Formel in Verbindung mit der Gleichung (20) folgt:

(29) $$\frac{1}{\varrho}=\pm\frac{\frac{d^2u}{dx^2}dx^2+2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy+\frac{d^2u}{dy^2}dy^2}{(dx^2+dy^2)\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

und wenn man für die Differenziale:

$$dx,\ dy$$

die ihnen proportionalen Größen:

$$\frac{du}{dy},\ -\frac{du}{dx}$$

setzt, so findet man endlich:

(30) $$\frac{1}{\varrho}=\pm\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)^2\frac{d^2u}{dx^2}-2\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}\frac{d^2u}{dxdy}+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\frac{d^2u}{dy^2}}{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Wenn die Veränderlichen x, y in der Gleichung (25) getrennt wären, d. h. wenn die Function u aus zwei Theilen bestände, wovon der eine blos die Veränderliche x und der andere nur die Veränderliche y enthielte, so hätte man:

$$\frac{d^2 u}{dx\,dy} = 0,$$

und die Formel (30) reducirte sich auf:

$$(31) \qquad \frac{1}{\varrho} = \pm \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \frac{d^2u}{dy^2} + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \frac{d^2u}{dx^2}}{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Wenn man die Formel (30) oder (31) auf die durch die Gleichungen (10), (13), (15), ... ausgedrückten Curven anwendet, so erhält man die Werthe von ϱ wieder, welche die Gleichungen (12), (14), (17), ... geben.

Zum Schlusse dieser Vorlesung bemerken wir noch, daß man in der Formel (4) für den Winkel τ irgend einen der Werthe von ψ, welcher der Gleichung (5) der ersten Vorlesung Genüge leistet, d. h. einen Werth von der Form:

$$(32) \qquad \psi = \pm n\pi + arc\ tang\ y' = \pm n\pi \pm \tau,$$

wo n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, setzen kann. Alsdann verwandelt sich die Formel (4) in:

$$(33) \qquad \frac{1}{\varrho} = \pm \frac{d\psi}{ds}.$$

Noch wollen wir bemerken, daß der einem Punkte (x, y) entsprechende Krümmungsmittelpunkt in Beziehung auf diesen Punkt auf der Seite der positiven oder negativen y liegt, jenachdem der Werth des Verhältnisses:

$$(34) \qquad \frac{d\psi}{dx}$$

positiv oder negativ ist. Denn da der Krümmungsmittelpunkt der Durchschnittspunkt zwei einander unendlich nahe liegender Normalen ist, so ist klar, daß die Curve immer ihre Concavität diesem Krümmungsmittelpunkte zukehrt. Hieraus folgt, wenn x als unabhängige Veränderliche betrachtet wird und man die Bemerkung auf Seite 57 berücksichtigt, daß der Krümmungsmittelpunkt in Beziehung auf den Punkt (x, y) auf der Seite der positiven y liegt, wenn der Werth von y'' positiv ist und auf der Seite der negativen y im entgegengesetzten Falle. Ueberdies folgt aus der Gleichung (32), wenn x wieder als unabhängige Veränderliche betrachtet wird:

$$(35) \qquad \frac{d\psi}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2};$$

und da vermöge der Formel (35) die Größen:

$$\frac{d\psi}{dx},\quad y''$$

beide positiv oder beide negativ sind, so kann man offenbar das Zeichen der ersteren statt des Zeichens der zweiten betrachten. Wenn man ferner bemerkt, daß der Werth und das Zeichen des Verhältnisses $\frac{d\psi}{dx}$ ungeändert bleiben, was auch die unabhängige Veränderliche sein mag, so wird man unmittelbar auf den zu beweisenden Satz geführt.

Siebente Vorlesung.

Analytische Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes einer ebenen Curve. — Theorie der Evoluten und Evolventen.

Es seien ϱ der dem Punkte (x, y) entsprechende Krümmungshalbmesser einer ebenen Curve und ξ, η die Coordinate des Krümmungsmittelpunktes. Da dieser Krümmungsmittelpunkt nichts anders ist, als der Endpunkt des vom Punkte (x, y) aus auf der Normale genommenen Halbmessers ϱ und zwar auf der Seite, gegen welche die Curve ihre Concavität kehrt; so verificiren die Coordinaten ξ, η offenbar die beiden Gleichungen:

$$(1) \qquad (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = \varrho^2$$

und

$$(2) \qquad (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0,$$

woraus sich die Formel ergibt:

$$(3) \qquad \frac{\eta - y}{dx} = \frac{\xi - x}{-dy} = \pm \frac{[(\eta - y)^2 + (\xi - x)^2]^{\frac{1}{2}}}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}} = \pm \frac{\varrho}{ds}.$$

Ferner folgt aus dem am Ende der vorhergehenden Vorlesung bewiesenen Satze, daß, wenn man einen der Winkel mit ψ bezeichnet, welche durch die Formel:

$$(4) \qquad tang\, \psi = \frac{dy}{dx}$$

bestimmt werden, $\eta - y$ und das Verhältniß $\frac{d\psi}{dx}$ Größen von einerlei Zeichen sind. Berücksichtigt man diesen Satz und die Gleichung (33) derselben Vorlesung, so ergibt sich aus der Formel (3):

$$(5) \qquad \frac{\eta - y}{dx} = \frac{\xi - x}{-dy} = \frac{1}{d\psi}$$

und folglich:

$$(6) \qquad \eta - y = \frac{dx}{d\psi}, \quad \xi - x = -\frac{dy}{d\psi}.$$

Die Gleichungen (6), welche beide in der Formel (5) enthalten sind, sind zur Bestimmung der Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes einer ebenen Curve hinreichend.

Wenn man x als unabhängige Veränderliche betrachtet, so findet man, indem man jeden Theil der Gleichung (5) durch dx multiplicirt und für $\frac{d\psi}{dx}$ seinen, aus der Gleichung (35) in der sechsten Vorlesung abgeleiteten Werth substituirt:

$$(7) \qquad \eta - y = \frac{\xi - x}{-y'} = \frac{1+y'^2}{y''},$$

oder was dasselbe ist:

$$(8) \qquad \eta - y = \frac{1+y'^2}{y''}, \quad \xi - x = -y'\frac{1+y'^2}{y''}.$$

Wenn x nicht mehr als unabhängige Veränderliche betrachtet wird, so gibt die Gleichung (4):

$$\frac{d\psi}{\cos^2\psi} = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2},$$

$$d\psi = \frac{1}{1+tang^2\psi}\,\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2+dy^2},$$

und die Formeln (5), (6) verwandeln sich resp. in:

$$(9) \qquad \frac{\eta - y}{dx} = \frac{\xi - x}{-dy} = \frac{dx^2+dy^2}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

$$(10) \qquad \eta - y = dx\,\frac{dx^2+dy^2}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

$$\xi - x = -dy\,\frac{dx^2+dy^2}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Man hat folglich:

$$(11) \qquad (\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y = dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

oder was dasselbe ist:

$$(12) \qquad (\xi - x)\frac{d^2x}{ds^2} + (\eta - y)\frac{d^2y}{ds^2} = 1.$$

Diese letzte Gleichung läßt sich leicht direct ableiten; denn es seien λ, μ die Winkel, welche die nach der Seite, gegen welche die Curve ihre Concavität kehrt, verlängerte Normale mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet; so hat man offenbar:

$$(13) \qquad \frac{\xi - x}{\varrho} = \cos\lambda, \quad \frac{\eta - y}{\varrho} = \cos\mu.$$

Wenn ferner der Bogen s zur unabhängigen Veränderlichen genommen wird, und man nimmt vom Punkte (x, y) aus auf der Curve und auf ihrer, nach demselben Sinne verlängerten Tangente gleiche und unendlich kleine Längen $= i$, und nennt die Entfernung zwischen den Endpunkten dieser beiden Längen s; so sind die algebraischen Projectionen der Entfernung s, von der Tangente aus gezählt, auf die Axen Größen von der Form:

$$(14) \qquad \frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2x}{ds^2}+I\right),\ \frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2y}{ds^2}+J\right), \quad \text{(s. S. 76.)}$$

wo I und J unendlich kleine Größen bezeichnen, und bildet folglich mit denselben, nach dem Sinne der positiven Coordinaten verlängerten Axen Winkel, deren Cosinus durch:

$$(15) \qquad \frac{i^2}{2s}\left(\frac{d^2x}{ds^2}+I\right),\ \frac{i^2}{2s}\left(\frac{d^2y}{ds^2}+J\right).$$

ausgedrückt werden. Ueberdies ist die Gerade, auf welcher die Entfernung s genommen ist, nach dem Lehrsatze am Ende der fünften Vorlesung fast zu der Normale parallel, und da diese Entfernung von der Tangente aus nach der Seite hin genommen werden muß, wo der Krümmungsmittelpunkt liegt; so sind wir zu dem Schlusse berechtigt, daß die Grenzen der Ausdrücke (15) den Cosinus der Winkel λ, μ gleich sind. Reducirt man nun die Größen I und J auf Null und substituirt für das Verhältniß $\frac{i^2}{2s}$ seine Grenze ϱ, so hat man:

$$(16) \qquad \varrho\frac{d^2x}{ds^2}=\cos\lambda, \quad \varrho\frac{d^2y}{ds^2}=\cos\mu.$$

Wenn der Bogen s nicht mehr zur unabhängigen Veränderlichen genommen würde, so müßte man:

$$\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}, \qquad \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}$$

für

$$\frac{d^2x}{ds^2}, \qquad \frac{d^2y}{ds^2}$$

setzen, und alsdann verwandelten sich die Gleichungen (16) in:

$$(17) \qquad \begin{cases} \varrho\left(\frac{d^2x}{ds^2}-dx\frac{d^2s}{ds^3}\right)=\cos\lambda, \\ \varrho\left(\frac{d^2y}{ds^2}-dy\frac{d^2s}{ds^3}\right)=\cos\mu. \end{cases}$$

Wenn man die Gleichungen (13) durch die Gleichungen (16) oder (17) multiplicirt und die erhaltenen Resultate addirt, so erhält

man unmittelbar die Formel (12) wieder, wenn man, im Falle man die Gleichungen (17) anwendet, die Gleichung (2) berücksichtigt.

In dem besonderen Falle, wo man den Bogen s zur unabhängigen Veränderlichen nimmt, folgt aus den Gleichungen (13) und (16) in Verbindung mit der Formel (22) der sechsten Vorlesung:

$$(18)\quad \begin{cases} \xi - x = \varrho^2 \dfrac{d^2 x}{ds^2} = \dfrac{dx^2 + dy^2}{(d^2 x)^2 + (d^2 y)^2}\, d^2 x, \\ \eta - y = \varrho^2 \dfrac{d^2 y}{ds^2} = \dfrac{dx^2 + dy^2}{(d^2 x)^2 + (d^2 y)^2}\, d^2 y. \end{cases}$$

Man gelangt zu demselben Resultate, wenn man in den Gleichungen (10) für dx und $-dy$ die ihnen nach der Voraussetzung proportionalen Größen $d^2 y$ und $d^2 x$ substituirt (s. Formel (21) in Vorlesung 6.).

Verbindet man die Formeln (1), (2) und (11), so erhält man das System von Gleichungen:

$$(19)\quad \begin{cases} (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = \varrho^2, \\ (\xi - x)\, dx + (\eta - y)\, dy = 0, \\ (\xi - x)\, d^2 x + (\eta - y)\, d^2 y - dx^2 - dy^2 = 0, \end{cases}$$

welche zur Bestimmung der drei Unbekannten ξ, η, ϱ als Functionen von x hinreichend sind. Es ist wohl zu bemerken, daß man die zweite und dritte Gleichung wiederfindet, wenn man die erste und zweite differenzirt, indem man die drei Unbekannten als constante Größen behandelt.

Wenn der Punkt (x, y) sich auf der gegebenen Curve verrückt, so wird der Krümmungsmittelpunkt zu gleicher Zeit verrückt. Wenn sich der erste Punkt auf der gegebenen Curve stetig fortbewegt, so beschreibt der zweite eine neue Curve. Um aber die Gleichung dieser letzten Curve zu erhalten, braucht man offenbar nur die aus den Formeln (6) oder (10) abgeleiteten Werthe von η und ξ als Functionen einer einzigen Veränderlichen x, oder y, oder s, ꝛc. auszudrücken und dann diese Veränderliche zwischen den beiden Gleichungen zu eliminiren; so enthält die aus der Elimination resultirende Gleichung nur noch die beiden Veränderlichen ξ, η und drückt genau die Linie aus, welche der geometrische Ort aller Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Curve ist. Um die Haupteigenschaften dieser Linie nachzuweisen, differenzirt man die Formeln (10), oder was dasselbe ist, die beiden ersten der Gleichungen (19). Verfährt man auf diese Weise und berücksichtigt die vorhin gemachte Bemerkung, so findet man:

$$(20)\qquad (\xi - x)\, d\xi + (y - \eta)\, d\eta = \varrho\, d\varrho$$

und

$$(21)\qquad dx\, d\xi + dy\, d\eta = 0.$$

Nun folgt aber aus der Gleichung (21) (s. Vorles. 5), daß die an die gegebene Curve durch den Punkt (x, y) und an die neue

(28) $$d\psi = -\tfrac{1}{2}d\omega,$$

und die Formeln (6) geben:

(29) $$\xi = x + 2\frac{dy}{d\omega}, \quad \eta = y - 2\frac{dx}{d\omega}.$$

Substituirt man nun für x, y; dx und dy ihre aus den Gleichungen (20) und (24) in Vorles. 2 gezogenen Werthe, so findet man:

(30) $$\xi = x + 2R\sin\omega = R(\omega + \sin\omega),$$
$$\eta = -y = -R(1 - \cos\omega).$$

Endlich, wenn man:

(31) $$\omega = \Omega + \pi$$

setzt, so erhält man die beiden Gleichungen:

(32) $$\xi = -\pi R = R(\Omega - \sin\Omega),$$
$$\eta + 2R = R(1 - \cos\Omega),$$

welche die Evolute der Cycloide ausdrücken. Diese Evolute geht offenbar durch den Punkt $x = \pi R$, $y = -2R$, welcher kein anderer ist, als der der größten Ordinate des ersten Zweiges entsprechende Krümmungsmittelpunkt. Wenn man, um den Anfangspunkt der Coordinaten in diesen Punkt zu verlegen, $\xi + \pi R$ für ξ und $\eta - 2R$ für η setzt, so verwandeln sich die Gleichungen (32) in:

(33) $$\xi = R(\Omega - \sin\Omega), \quad \eta = R(1 - \cos\Omega).$$

Da diese letzten Gleichungen mit den Gleichungen (20) der zweiten Vorlesung ganz übereinstimmen, so müssen wir schließen, daß eine Cycloide eine andere Cycloide von derselben Form und denselben Dimensionen, deren Rückkehrpunkte mit den, den Mittelpunkten der verschiedenen Zweige der ersten Cycloide entsprechenden Krümmungsmittelpunkten zusammenfallen, zur Evolute hat. Ferner sind die Rückkehrpunkte der ersten Cycloide zu gleicher Zeit die Mittelpunkte der verschiedenen Zweige der zweiten, und die Basis der zweiten durch die Gleichungen (32) ausgedrückten Cycloide fällt mit der geraden Linie zusammen, deren Gleichung:

(34) $$y = -2R$$

ist.

Die Gleichungen (30) ließen sich auch leicht erhalten, wenn man von dem in der sechsten Vorlesung bewiesenen Satze, nämlich, daß der Krümmungshalbmesser der Cycloide das doppelte der Normale ist, wenn die Basis zur Axe der x genommen wird, ausginge. Denn nach diesem Satze fällt der Mittelpunkt des Krümmungshalbmessers, d. h. der Punkt, dessen Coordinaten:

$$\frac{x+\xi}{2}, \quad \frac{y+\eta}{2}$$

sind, mit dem Punkte zusammen, in welchem der Erzeugungskreis die Basis berührt, und dessen Abscisse $R\omega = x + R\sin\omega$ ist. Man hat folglich die Gleichungen:

$$\frac{x+\xi}{2} = x + R\sin\omega, \quad \frac{y+\eta}{2} = 0,$$

woraus sich die Formeln (30) unmittelbar ergeben. Man kann sogar, ohne sich dieser Formeln zu bedienen, blos mit Hülfe des eben erwähnten Satzes die Natur der Curve bestimmen, welche die Evolute der Cycloide bildet. Zu dem Zwecke wollen wir mit dem Halbmesser R zwei gleiche Kreise beschreiben, deren Mittelpunkte auf der Axe der y, der eine über und der andere unter der Axe der x liegen, und welche diese letzte Axe im Anfangspunkte berühren. Alsdann wollen wir annehmen, daß sich die beiden Kreise, der erste auf der Axe der x und der zweite auf der zu ihr parallelen Geraden $y = -2R$ so bewegen, daß die Axe der x stets ihre gemeinschaftliche Tangente bleibt. Die Halbmesser, welche im ersten Augenblicke nach dem Anfangspunkte der Coordinaten gehen, drehen sich um die Mittelpunkte der beiden Kreise und beschreiben zu gleicher Zeit gleiche Winkel, woraus folgt 1) daß diese Halbmesser stets zu einander parallel sind und 2) daß die ihre Endpunkte verbindende Gerade durch den Berührungspunkt geht und in diesem Punkte in zwei gleiche Theile getheilt wird. Nun ist aber der im ersten Kreise liegende Theil offenbar der Normale der gegebenen Cycloide, welche der Endpunkt des ersten Halbmessers beschreibt, gleich. Folglich ist der Krümmungshalbmesser dieser Curve der doppelten Normale gleich, fällt nothwendig mit der ganzen Geraden zusammen und der Krümmungsmittelpunkt mit dem Endpunkte des zweiten Halbmessers. Folglich ist der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte oder die Evolute derselben Curve genau die zweite Cycloide, welche dieser Endpunkt beschreibt.

Die Gleichungen (6) und (10), deren Anwendung bei der Bestimmung der Evoluten wir angegeben haben, können durch andere ersetzt werden, welche blos die vier Veränderlichen ξ, η, x und y enthalten. Denn es sei

$$u = 0 \tag{35}$$

die Gleichung einer ebenen Curve, wo u eine Function der beiden Coordinaten x, y bezeichnet, so folgt aus den Formeln (2) und (11) in Verbindung mit den Gleichungen (26) und (27) in der vorhergehenden Vorlesung:

$$\frac{\xi - x}{\left(\frac{du}{dx}\right)} = \frac{\eta - y}{\left(\frac{du}{dy}\right)} = \frac{(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y}{\frac{du}{dx}\,d^2x + \frac{du}{dy}\,d^2y} \tag{36}$$

$$= \frac{dx^2 + dy^2}{\frac{d^2u}{dy^2}\,dy^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}\,dx\,dy + \frac{d^2u}{dx^2}\,dx^2},$$

und wenn man für die Differenziale:

$$dx, \quad dy$$

die ihnen resp. proportionalen Größen:

$$\frac{du}{dy}, \quad -\frac{du}{dx}$$

setzt, so findet man:

$$(37) \qquad \frac{\xi - x}{\left(\frac{du}{dx}\right)} = \frac{\eta - y}{\left(\frac{du}{dy}\right)} = -\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2}{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \frac{d^2u}{dy^2} - 2\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}\frac{d^2u}{dx\,dy} + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \frac{d^2u}{dx^2}}.$$

Diese letzte Formel ist den beiden Gleichungen zwischen den Coordinaten x, y der betrachteten Curve und den Coordinaten ξ, η der Evolute gleich zu achten.

Wenn in der Gleichung (35) die Veränderlichen x, y getrennt sind, so hat man:

$$(38) \qquad \frac{d^2u}{dx\,dy} = 0,$$

und die Formel (37) reducirt sich auf:

$$(39) \qquad \frac{\xi - x}{\left(\frac{du}{dx}\right)} = \frac{\eta - y}{\left(\frac{du}{dy}\right)} = -\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2}{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \frac{d^2u}{dy^2} + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \frac{d^2u}{dx^2}}.$$

Um die Evolute der Curve (35) zu erhalten, genügt es offenbar, zwischen der Gleichung (35) und denen, welche in der Formel (37) oder (39) enthalten sind, x und y zu eliminiren. In mehrern Fällen lassen sich die beiden letzten Gleichungen in Beziehung auf die Veränderlichen x, y leicht auflösen, und die Werthe dieser Veränderlichen als Functionen der Coordinaten ξ, η daraus ableiten. Substituirt man alsdann diese Werthe in die Gleichung (35), so erhält man die Gleichung der Evolute unmittelbar.

Beispiel 1. Betrachten wir z. B. die durch die Gleichung:

$$(40) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ausgedrückte Ellipse, wo a und b zwei positive Constanten, nämlich die beiden Halbaxen sind. In diesem besondern Falle kann man

$$u = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

nehmen, und alsdann folgt daraus:

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{a^2}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{y}{b^2},$$
$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{b^2}.$$

Man hat also:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \frac{d^2u}{dy^2} + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \frac{d^2u}{dx^2} =$$
$$\frac{1}{a^2 b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = \frac{1}{a^2 b^2},$$

und die Formel (39) gibt also:

$$a^2\left(\frac{\xi}{x} - 1\right) = b^2\left(\frac{\eta}{y} - 1\right) = -\left(b^2\frac{x^2}{a^2} + a^2\frac{y^2}{b^2}\right)$$
$$= -a^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 = -b^2 + \frac{b^2 - a^2}{b^2}y^2.$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt also:

$$a^2\frac{\xi}{x} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2, \quad b^2\frac{\eta}{y} = \frac{b^2 - a^2}{b^2}y^2,$$

und wenn A und B positive Größen bezeichnen, welche so gewählt sind, daß sie der Gleichung:

(41) $$\pm(a^2 - b^2) = Aa = Bb,$$

Genüge leisten, so findet man:

$$\frac{\xi}{A} = \pm\frac{x^3}{a^3}, \quad \frac{\eta}{B} = \mp\frac{y^3}{b^3},$$

oder was dasselbe ist:

(42) $$\frac{x}{a} = \pm\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{y}{b} = \mp\left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Substituirt man nun in die Gleichung (40) die aus den Formeln (42) genommenen Werthe von $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{b}$, so erhält man eine Gleichung, welche blos die Veränderlichen ξ, η enthält, nämlich:

$$(43) \qquad \left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

Diese letzte Gleichung, welche die Evolute der Ellipse ausdrückt, kann leicht so umgeformt werden, daß sie nur noch ganze Potenzen der Veränderlichen enthält. Denn nachdem man jeden Theil derselben zur dritten Potenz erhoben hat, ergibt sich daraus:

$$1-\frac{\xi^2}{A^2}-\frac{\eta^2}{B^2}=3\left(\frac{\xi\eta}{AB}\right)^{\frac{2}{3}}\left[\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{3}}\right]=3\left(\frac{\xi\eta}{AB}\right)^{\frac{2}{3}},$$

und folglich:

$$(44) \qquad \left(1-\frac{\xi^2}{A^2}-\frac{\eta^2}{B^2}\right)^3=27\,\frac{\xi^2}{A^2}\cdot\frac{\eta^2}{B^2}.$$

Aus der Gleichung (43) oder (44) erhellet leicht, daß die Evolute der Ellipse eine geschlossene Curve ist, welche durch zwei Axen, die wie die der Ellipse mit den Coordinatenaxen zusammenfallen und dieselbe in vier Punkten schneiden, deren Entfernungen vom Anfangspunkte A und B sind, in vier aufeinanderlegbare Theile getheilt wird. Jeder dieser Theile der Evolute berührt ferner die Axen und folglich ist jeder Zusammentreffungspunkt ein Rückkehrpunkt dieser Curve.

Beispiel 2. Betrachten wir nun die durch die Gleichung:

$$(45) \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1.$$

ausgedrückte Hyperbel.

Verfährt man wie im vorhergehenden Beispiele und bezeichnet durch A, B zwei positive Größen, welche so gewählt sind, daß sie der Gleichung:

$$(46) \qquad a^2+b^2=Aa=Bb,$$

genügen, so ergibt sich, daß sich die Gleichung der Evolute auf:

$$(47) \qquad \left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{3}}=\pm 1$$

reducirt, oder was dasselbe ist, auf:

$$(48) \qquad \left[1\mp\left(\frac{\xi^2}{A^2}-\frac{\eta^2}{B^2}\right)\right]^3=-27\,\frac{\xi^2}{A^2}\cdot\frac{\eta^2}{B^2}.$$

Aus der Gleichung (47) oder (48) erhellet leicht, daß die Evolute der Hyperbel eine Curve ist, welche sich ins Unendliche erstreckt, durch die Coordinatenaxen in vier ähnliche Theile getheilt wird und aus zwei getrennten Zweigen besteht, wovon jeder einen auf der Verlängerung der reellen Axe $2a$ oder $2b$ der Hyperbel in der Entfernung A oder B vom Anfangspunkte liegenden Rückkehrpunkt hat.

Beispiel 3. Wir wollen nun die durch die Gleichung:

(49) $$y^2 = 2px,$$

worin p eine positive Constante ist, ausgedrückte Parabel betrachten. In diesem Falle kann man

$$u = \tfrac{1}{2}(2px - y^2)$$

nehmen, und hieraus ergibt sich:

$$\frac{du}{dx} = p, \quad \frac{du}{dy} = -y,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = -1.$$

Folglich gibt die Formel (39):

$$\frac{\xi - x}{p} = 1 - \frac{\eta}{y} = 1 + \frac{y^2}{p^2} = \frac{p + 2x}{p}.$$

Man hat also:

$$\xi - x = p + 2x, \quad -\frac{\eta}{y} = \frac{y^2}{p^2},$$

oder, was dasselbe ist:

$$\xi = p + 3x, \qquad y^3 = -p^2\eta.$$

Die aus diesen beiden letzten Gleichungen gezogenen Werthe von x und y sind resp.:

(50) $$x = \frac{\xi - p}{3}, \quad y = -p^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (49), und läßt den beiden Theilen gemeinschaftlichen Factor p hinweg, so findet man:

(51) $$\tfrac{2}{3}(\xi - p) = p^{\frac{1}{3}}\eta^{\frac{2}{3}}.$$

Die Gleichung (51), welche man auch auf die Form:

(52) $$\tfrac{8}{27}(\xi - p)^3 = p\eta^2$$

bringen kann, gehört zu der Evolute der Parabel. Man sieht leicht ein, daß sich diese Evolute auf der Seite der positiven x ins Unendliche erstreckt, daß sie die Axe der Parabel zur Axe hat und daß sie diese Axe in dem Punkte, dessen Abscisse p ist, berührt. Dieser Punkt, welcher eben so weit vom Brennpunkte, als von dem Scheitel der Parabel entfernt ist, ist zugleich der Scheitel der Evolute und der einzige Rückkehrpunkt, welchen sie darbietet. Wenn man in der Gleichung (51) oder (52) $\xi + p$ für ξ setzt, um den Anfangspunkt in den erwähnten Punkt zu verlegen, so ergibt sich daraus:

(53) $$\xi = \tfrac{3}{2} p^{\frac{1}{3}} \eta^{\frac{2}{3}},$$

und

(54) $$\eta = (\tfrac{2}{3})^{\frac{3}{2}} p^{-\frac{1}{2}} \xi^{\frac{3}{2}}.$$

Da die Gleichungen (53) und (54) als besondere Fälle in den Gleichungen (44) der fünften Vorlesung enthalten sind, so folgt, daß die Evolute jeder Parabel vom zweiten Grade wieder eine Parabel von dem Grade $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{2}$ ist.

Achte Vorlesung.

Von den ebenen Curven, welche einander in einem gegebenen Punkte osculiren.

Man sagt, daß sich zwei ebene Curven in einem ihnen gemeinschaftlichen Punkte osculiren, wenn sie in diesem Punkte nicht blos dieselbe Tangente haben, sondern auch denselben Krümmungskreis, also auch dieselbe Krümmung und ihre Concavitäten nach demselben Sinne kehren. Hiernach läßt sich leicht folgender Lehrsatz darthun.

Lehrsatz 1. Wir wollen annehmen, daß zwei ebene Curven durch zwei Gleichungen zwischen den beiden rechtwinkligen Coordinaten x, y ausgedrückt seien, und daß die Abscisse x zur unabhängigen Veränderlichen genommen werde. Sollen diese beiden Curven sich in einem gemeinschaftlichen der Abscisse x entsprechenden Punkte osculiren, so ist erforderlich, aber auch hinreichend, daß die Ordinate y und die abgeleiteten Functionen der ersten und zweiten Ordnung, d. h. die drei Größen:

$$(1) \qquad y,\ y',\ y''$$

für diese Abscisse bei dem Uebergange von der einen Curve zu der andern dieselben Zahlenwerthe und dieselben Zeichen behalten.

Beweis. Denn wenn diese Bedingungen erfüllt werden, so haben die beiden Curven offenbar einen der Abscisse x entsprechenden gemeinschaftlichen Punkt. Ferner folgt aus der Gleichung (5) der Vorles. 1, daß die beiden Curven eine gemeinschaftliche Tangente haben, aus der Gleichung (5) in Vorles. 6, daß sie denselben Krümmungshalbmesser haben und aus der Seite 56 gemachten Bemerkung, daß sie ihre Concavitäten nach derselben Seite kehren. Umgekehrt, wenn die beiden Curven einander in dem Punkte, dessen Abscisse x ist, osculiren, so müssen nicht blos die Größen y, y' und das Zeichen von y'' bei dem Uebergange von der einen Curve zur andern dieselben bleiben, sondern es ist klar, daß dieses auch mit dem Krümmungshalbmesser ϱ und folglich mit dem Zahlenwerthe von y'' der Fall sein muß.

Denken wir uns nun, daß y' und y'' wieder die abgeleiteten Functionen in Beziehung auf die Veränderliche x und

$$dx,\ dy,\ d^2x,\ d^2y$$

die Differenziale der ersten und zweiten Ordnung von x und y in Beziehung auf eine neue als unabhängige Veränderliche betrachtete Größe r bezeichnen; so hat man nach Differenzialr. Vorles. 3, Formel (9):

$$(2)\quad y'=\frac{dy}{dx},\quad y''=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3}.$$

Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß die unabhängige Veränderliche r mit den Veränderlichen x, y durch eine Gleichung von der Form:

$$(3)\qquad r=\mathfrak{F}(x,\ y)$$

verbunden sei. Differenzirt man diese Gleichung zwei mal nach einander, so findet man:

$$(4)\quad \begin{cases} 1=\dfrac{d\mathfrak{F}(x,y)}{dx}\dfrac{dx}{dr}+\dfrac{d\mathfrak{F}(x,y)}{dy}\dfrac{dy}{dr} \\ 0=\dfrac{d\mathfrak{F}(x,y)}{dx}\dfrac{d^2x}{dr^2}+\dfrac{d\mathfrak{F}(x,y)}{dy}\dfrac{d^2y}{dr^2} \\ \quad +\dfrac{d^2\mathfrak{F}(x,y)}{dx^2}\dfrac{dx^2}{dr^2}+2\dfrac{d^2\mathfrak{F}(x,y)}{dx\,dy}\dfrac{dx}{dr}\dfrac{dy}{dr}+\dfrac{d^2\mathfrak{F}(x,y)}{dy^2}\dfrac{dy^2}{dr^2}. \end{cases}$$

Nun ergeben sich aber aus den Formeln (2) und (4) leicht die Werthe von:

$$(5)\qquad \frac{dx}{dr},\ \frac{dy}{dr},\ \frac{d^2x}{dr^2},\ \frac{d^2y}{dr^2};$$

als Functionen der Größen:

$$y',\ y'',\ \frac{d\mathfrak{F}(x,\ y)}{dx},\ \frac{d\mathfrak{F}(x,\ y)}{dy},$$

$$\frac{d^2\mathfrak{F}(x,\ y)}{dx^2},\ \frac{d^2\mathfrak{F}(x,\ y)}{dx\,dy},\ \frac{d^2\mathfrak{F}(x,\ y)}{dy^2}$$

ausgedrückt, und da diese Größen für den Berührungspunkt der beiden Curven dieselben Werthe behalten, wenn man von der einen zur andern übergeht, so ist klar, daß dasselbe auch von den Ausdrücken (5) gilt.

Wenn man den vom Anfangspunkte nach dem Punkte (x, y) gezogenen Radiusvector zur unabhängigen Veränderlichen nehmen will, so verwandeln sich die Gleichungen (3) und (4) resp. in:

$$(6)\qquad r=\sqrt{(x^2+y^2)},$$

$$(7)\quad \begin{cases} 1 = \frac{x}{r}\frac{dx}{dr} + \frac{y}{r}\frac{dy}{dr}, \\ 0 = \frac{x}{r}\frac{d^2x}{dr^2} + \frac{y}{r}\frac{d^2y}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\left(y\frac{dx}{dr} - x\frac{dy}{dr}\right)^2, \end{cases}$$

und aus den Formeln (7) in Verbindung mit den Formeln (2) und (6) ergibt sich:

$$(8)\quad \begin{cases} \frac{dx}{dr} = \frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{x+yy'}, \quad \frac{dy}{dr} = \frac{y'\sqrt{(x^2+y^2)}}{x+yy'}, \\ \frac{d^2x}{dr^2} = -\frac{(y-xy')^2 + yy''(x^2+y^2)}{(x+yy')^3}, \\ \frac{d^2y}{dr^2} = -\frac{y'(y-xy')^2 - xy''(x^2+y^2)}{(x+yy')^3}. \end{cases}$$

Nichts hindert, in dem Vorhergehenden die Veränderliche $r = F(x, y)$ auf eine der Coordinaten x, y zu reduciren. Wenn man z. B. $r = x$ setzt, so verwandeln sich die Ausdrücke (5) in:

$$1,\ y',\ 0,\ y'',$$

und man kommt unmittelbar auf den ersten Lehrsatz wieder zurück.

Wenn man den auf jeder Curve zwischen einem festen und dem beweglichen Punkte (x, y) liegenden Bogen s zur unabhängigen Veränderlichen nimmt, indem er auf beiden Curven über den Berührungspunkt hinaus nach demselben Sinne gezählt wird, so muß man für die Gleichungen (4) die folgenden setzen:

$$(9)\qquad dx^2 + dy^2 = ds^2,\quad dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0.$$

Verbindet man diese letzten Gleichungen mit den Gleichungen (2), so erhält man die Formeln:

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{dx}{ds} = \pm\frac{1}{\sqrt{(1+y'^2)}}, \quad \frac{dy}{ds} = \pm\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}, \\ \frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{y'y''}{\sqrt{(1+y'^2)^2}}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{y''}{(1+y'^2)^2}, \end{cases}$$

wo das doppelte Zeichen $\pm$ jedesmal auf das Zeichen $+$ reducirt werden muß, wenn der Bogen s mit der Abscisse x wächst, und auf das Zeichen $-$ im entgegengesetzten Falle. Mit Berücksichtigung dieser Bemerkung ergibt sich aus den Formeln (10) und dem Lehrsatze 1, daß für einen Osculationspunkt der beiden ebenen Curven die vier Größen:

$$(11)\qquad \frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{d^2x}{ds^2},\ \frac{d^2y}{ds^2}$$

dieselben Zahlenwerthe und dasselbe Zeichen behalten, wenn man von der ersten Curve zur zweiten übergeht.

Wenn man entscheiden will, ob ein zwei ebenen Curven gemeinschaftlicher Punkt ein Osculationspunkt ist, so kann man für die Brüche (5) oder (11) auch ihre Zähler:

$$(12) \qquad dx,\ dy,\ d^2x,\ d^2y$$

substituiren, und man erhält auf diese Weise folgenden Lehrsatz:

Lehrsatz 2. Wenn zwei ebene Curven durch zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten x, y ausgedrückt sind, so braucht man, um zu erfahren, ob diese beiden Curven einander in einem gegebenen Punkte osculiren, nur eine bestimmte Function der Veränderlichen x, y oder den auf jeder Curve von einem festen Punkte aus gezählten Bogen s zur unabhängigen Veränderlichen zu nehmen und zu untersuchen, ob für den gegebenen Punkt dieselben Werthe von:

$$(13) \qquad x,\ y,\ dx,\ dy,\ d^2x,\ d^2y$$

aus den Gleichungen der beiden Curven abgeleitet werden können.

Wenn sich in dem Lehrsatze 1 oder 2 die zweite Curve auf einen Kreis reducirt, dessen Gleichung von der Form:

$$(14) \qquad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\varrho^2$$

ist, so sind die Bedingungen, welche ausdrücken, daß der Punkt (x, y) ein Osculationspunkt ist, zur Bestimmung des Halbmessers und der Coordinaten des Mittelpunktes dieses Kreises, d. h. der drei Unbekannten ξ, η und ϱ hinreichend. Denn nimmt man x zur unabhängigen Veränderlichen, so müssen die aus der endlichen Gleichung der ersten Curve und aus ihren abgeleiteten Gleichungen gezogenen Werthe von y, y', y'' vermöge des Lehrsatzes 1 der endlichen Gleichung des Kreises und ihren abgeleiteten Gleichungen des ersten und zweiten Grades, d. h. den drei Gleichungen:

$$(15) \qquad \begin{cases} (x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\varrho^2, \\ x-\xi+(y-\eta)y'=0, \\ 1+y'^2+(y-\eta)y''=0, \end{cases}$$

Genüge leisten.

Wenn man aus diesen letzten Gleichungen die Werthe der drei Unbekannten ξ, η und ϱ ableitet, so erhält man die Gleichung (5) in Vorlesung 6 und die Gleichungen (8) in Vorlesung 7 wieder, wie zu erwarten war.

Wenn x nicht mehr zur unabhängigen Veränderlichen genommen würde, so könnte man die endliche Gleichung des Kreises und ihre beiden Differenzialgleichungen des ersten und zweiten Grades auf die Form bringen:

$$(x-\xi)^2+(y-y)^2=\varrho^2,$$
$$(x-\xi)\,dx+(y-y)\,dy=0,$$
$$(x-\xi)\,d^2x+(y-\eta)\,d^2y+dx^2+dy^2=0,$$

und die aus den Gleichungen der ersten Curve abgeleiteten Werthe von x, y, dx, dy, d^2x, d^2y würden ihnen Genüge leisten müssen. Es ist wohl zu bemerken, daß die Gleichungen (16), welche zur Bestimmung der Werthe der Unbekannten ξ, η und ϱ, d. h. der Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes und des Krümmungshalbmessers hinreichend sind, mit den Gleichungen (19) der siebenten Vorlesung übereinstimmen.

Neunte Vorlesung.

Ueber die verschiedenen Ordnungen der Berührung ebener Curven.

Betrachten wir zwei ebene Curven, welche sich in einem gegebenen Punkte berühren. Wenn man aus dem Berührungspunkte als Mittelpunkt und mit einem unendlich kleinen Halbmesser i einen Kreis beschreibt, so schneidet derselbe die beiden Curven in zwei einander sehr naheliegenden Punkten und die größere oder geringere gegenseitige Annäherung der beiden Curven in der Entfernung i vom Berührungspunkte hat offenbar die unendlich kleine Entfernung zwischen den beiden erwähnten Punkten, oder was dasselbe ist, die Sehne des zwischen den beiden Curven liegenden Kreisbogens zum Maße. Ferner sind die nach den Endpunkten dieses Bogens gezogenen Halbmesser nach geraden Linien gerichtet, welche sehr kleine Winkel mit der gemeinschaftlichen Tangente bilden, woraus folgt, daß der Winkel zwischen diesen Halbmessern selbst eine sehr kleine Größe ist. Es sei ω dieser letzte Winkel, so hat der zwischen den beiden Curven liegenden Kreisbogen das Product:

$$i\,\omega \tag{1}$$

zum Maße und die Sehne dieses Bogens ist gleich:

$$2i\sin\frac{\omega}{2}. \tag{2}$$

Wenn die beiden Curven ihre Form so verändern, daß sie sich, indem sie sich immer in dem gegebenen Punkte berühren, in der Nähe dieses Punktes einander mehr nähern; so nehmen die, sehr kleinen Werthen von i entsprechenden Werthe des Ausdruckes (2) nothwendig ab, welches voraussetzt, daß die durch ω bezeichnete Function von i selbst abnimmt. Wenn dagegen die beiden Curven vermöge ihrer Formveränderung sich weiter von einander entfernen, so nehmen die sehr kleinen Werthen von i entsprechenden Werthe von ω nothwendig zu. Man kann also behaupten, daß in der Nähe des Berührungspunktes die gegenseitige Annäherung der beiden Curven größer oder geringer und ihre Berührung mehr oder weniger innig sein wird, je nachdem die, sehr kleinen Werthen von i entsprechenden Werthe von ω größer oder kleiner sind. Nach diesem Satze muß man offenbar, um sich

von den verschiedenen Arten der Berührung ebener Curven einen Begriff zu bilden, die verschiedenen Größenzustände untersuchen, worin sich der als Function des Halbmessers i betrachtete unendlich kleine Winkel ω befinden kann. Hierzu ist es zunächst erforderlich, daß wir uns dessen erinnern, was in der Differenzialrechnung Seite 11 bis 15 über die unendlich kleinen Größen der verschiedenen Ordnungen gesagt ist, und alsdann ergibt sich in Beziehung auf die beiden bereits betrachteten Curven aus dem vorhin angeführten Prinzipe und aus dem ersten Lehrsatze auf Seite 12 der Differenzialrechnung unmittelbar der folgende Lehrsatz:

Lehrsatz 1. Wenn sich zwei Curven in einem gegebenen Punkte (P) berühren, und man bemerkt in unendlich kleiner Entfernung i von dem Berührungspunkte auf diesen beiden Curven zwei Punkte (Q), (R), so ist die gegenseitige Annäherung der beiden Curven in der Nähe des Berührungspunktes, desto geößer, je höher die Ordnung der unendlich kleinen Größe ω ist, welche den zwischen den Halbmessern PQ, PR liegenden Winkel ausdrückt.

Beweis. Denn, wenn sich die Form der beiden Curven, oder einer derselben so ändert, daß die Ordnung der unendlich kleinen Größe ω steigt, so nimmt der Zahlenwerth von ω in der Nähe des Berührungspunktes vermöge des Lehrsatzes 1 in der Differenzialr. Seite 12 ab, und folglich nähern sich die beiden Curven einander mehr als zuvor.

Nachdem der Lehrsatz 1 bewiesen ist, ist es natürlich, die Ordnung der als Function der Basis i betrachteten unendlich kleinen Größe ω zu bestimmen, um angeben zu können, was unter der Ordnung der Berührung zwei ebener Curven zu verstehen ist. Es sei a diese Ordnung. Da das Verhältniß:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}$$

die Einheit zur Grenze hat, so ist das Product:

$$\omega \frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} = 2 \sin \frac{\omega}{2}$$

auch eine unendlich kleine Größe der Ordnung a, während die Ausdrücke (1) und (2) vermöge des Lehrsatzes 3 Seite 14 der Differenzialrechnung unendlich kleine Größen der Ordnung $a+1$ sind. Man kann also folgenden Lehrsatz aufstellen:

Lehrsatz 2. Wenn sich zwei Curven in einem gegebenen Punkte (P) berühren, so ist die Ordnung der Berührung um eine Einheit niedriger, als die Ordnung der unendlich kleinen Größe, welche die Entfernung zweier, auf den beiden Curven von dem Berührungspunkte gleich weit entfernter Punkte (Q), (R) ausdrückt, wenn diese letzte Entfernung eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung ist.

Es ist wohl zu bemerken, daß, da die vom Punkte (Q) nach dem Punkte (R) gezogene Gerade QR die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes ist, und in diesem Dreiecke dem sehr kleinen Winkel ω gegenüberliegt, sie fast auf den Radienvectoren PQ, PR und folglich auf der gemeinschaftlichen Tangente beider Curven senkrecht ist.

Denken wir uns nun durch die Punkte (Q) und (R) zwei parallele gerade Linien gezogen, wovon jede mit der gemeinschaftlichen Tangente einen endlichen Winkel δ bildet, so liegt die eine dieser beiden Parallelen dem Berührungspunkte näher als die andere. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß die durch den auf der ersten Curve genommenen Punkt (Q) gezogene Gerade dem Berührungspunkte am nächsten liegt, und daß dieselbe die zweite Curve in einem Punkte (S) schneidet; so ist in dem Dreiecke QRS die Seite RS fast zu der gemeinschaftlichen Tangente parallel, weil sie eine Sehne bildet, deren auf der zweiten Curve liegende Endpunkte dem Berührungspunkte sehr nahe liegen, und sie bildet offenbar mit den Seiten QR, QS endliche Winkel, wovon der erste sehr wenig von einem rechten und der zweite von dem Winkel δ verschieden ist. Wenn man durch I und J unendlich kleine Größen bezeichnet, so hat man folglich:

$$(3) \qquad QS = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+I\right)}{\sin(\delta+J)}\,QR$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+I\right)}{(\sin\delta+J)} \cdot 2i\sin\frac{\omega}{2}.$$

Ferner, da das Verhältniß zwischen dem vom Punkte (P) auf die Gerade QS oder ihre Verlängerung gefällten Perpendikel und dem Radiusvector $PQ = i$ fast gleich $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) = \sin\delta$ ist, so kann dieses Perpendikel durch ein Product von der Form:

$$(4) \qquad i(\sin\delta \pm \varepsilon)$$

ausgedrückt werden, wo $\pm\varepsilon$ auch eine unendlich kleine Größe bezeichnet. Wir wollen nun annehmen, daß zwischen den beiden Curven eine Berührung von der Ordnung a stattfinde und daß der Radiusvector i als eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung betrachtet werde; so ist klar, daß der Ausdruck (4) auch eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung ist, während der Ausdruck (3) eine unendlich kleine Größe von der Ordnung $a+1$ ist. Ferner wollen wir bemerken, daß sich die Ordnung dieser letzten Größe nach Zus. 3 auf Seite 15 der Differenzialrechnung nicht ändert, wenn man den Ausdruck (4) oder eine solche unendlich kleine Größe, im Verhältniß zu welcher der Ausdruck (4) eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung bleibt, zur Basis nimmt. Aus diesen Bemerkungen ergibt sich nun folgender neuer Lehrsatz:

Lehrsatz 3. Die Ordnung der Berührung zweier Curven, welche sich in einem gegebenen Punkte (P) berühren, ist um eine Einheit niedriger, als die Ordnung der unendlich kleinen Entfernung zwischen den Punkten (Q), (S), worin die beiden Curven von einer Secante geschnitten werden, welche einen endlichen und merklich von Null verschiedenen Winkel mit der gemeinschaftlichen Tangente in jedem Systeme bildet, worin die Entfernung des Berührungspunktes von der in Rede stehenden Secante eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung ist.

Wenn die beiden Curven durch zwei Gleichungen zwischen rechtwinkligen Coordinaten x, y ausgedrückt sind, und die gemeinschaftliche Tangente ist nicht zu der Axe der y parallel, so ergibt sich aus dem Lehrsatze 3 folgender, wenn die Secante zu dieser Axe parallel angenommen wird:

Lehrsatz 4. Um die Ordnung der Berührung zweier ebener Curven, welche sich in einem Punkte berühren, worin die gemeinschaftliche Tangente nicht zu der Axe der y parallel ist, zu erhalten, braucht man nur eine dem Berührungspunkte sehr nahe kommende Ordinate zu ziehen, und die Zahl zu bestimmen, welche die Ordnung des unendlich kleinen Theiles der Ordinate zwischen den beiden Curven ausdrückt, wenn die Entfernung des Berührungspunktes von der Ordinate als eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung betrachtet wird, und wird alsdann diese Zahl um eine Einheit vermindert; so gibt sie die Ordnung der Berührung an.

Zusatz 1. Es seien:

$$(5) \qquad y = f(x), \quad y = F(x)$$

die Gleichungen der beiden ebenen Curven, so haben sie einen, einem gegebenen Werthe von x entsprechenden gemeinschaftlichen Punkt, und in diesem Punkte eine gemeinschaftliche, nicht zu der Axe der y parallele Tangente, wenn die Gleichungen der beiden Curven für den gegebenen Werth von x nicht nur gleiche und endliche Werthe für die Ordinate y, sondern auch für ihre abgeleitete Function y' geben, so daß die Gleichungen:

$$(6) \qquad f(x) = F(x)$$

und:

$$(7) \qquad f'(x) = F'(x)$$

erfüllt werden und die beiden Theile jeder derselben endliche Werthe behalten. In dieser Voraussetzung wird die Differenz:

$$(8) \qquad F(x) - f(x),$$

welche für den, dem gemeinschaftlichen Punkte entsprechenden Werth von x verschwindet, eine unendlich kleine Größe, wenn x ein un-

endlich kleines Increment erhält, und wenn man dieses Increment als eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung betrachtet; so ist die Ordnung der unendlich kleinen Größe, welche den neuen Werth von $F(x)-f(x)$ ausdrückt, um eine Einheit höher, als die der Berührung beider Curven.

Zusatz 2. Wenn sich die beiden Curven in einem Punkte der Axe der y berühren, aber ohne diese Axe zur gemeinschaftlichen Tangente zu haben, so ist es nach dem eben Gesagten zur Bestimmung der Ordnung der Berührung hinreichend, die Zahl zu suchen, welche die Ordnung der Differenz:

$$F(x)-f(x)$$

ausdrückt, wenn die Abscisse x als eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung betrachtet wird, und diese Zahl um eine Einheit zu vermindern. Verfährt man auf diese Weise, so ergibt sich, daß die Parabeln:

$$y=x^2, \quad y=x^3 \tag{9}$$

im Anfangspunkte der Coordinaten eine Berührung der ersten Ordnung, während die beiden Curven:

$$y=x^{n+1}, \quad y=x^{n+2} \tag{10}$$

in demselben Punkte eine Berührung von der Ordnung n und die beiden Curven:

$$y=x^{\frac{4}{3}}, \quad y=x^{\frac{5}{4}} \tag{11}$$

eine Berührung von der Ordnung $\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$ haben.

Zusatz 3. Wir wollen annehmen, die Curven (5) hätten einen der Abscisse x entsprechenden gemeinschaftlichen Punkt und in diesem Punkte eine gemeinschaftliche, nicht zu der Axe der y parallele Tangente mit einer Berührung von der Ordnung a. Ueberdies sei n die ganze Zahl, welche $=a$ oder unmittelbar größer als a ist; so ist die Differenz:

$$F(x)-f(x) \tag{8}$$

gleich Null, und wenn man durch i ein der Abscisse x ertheiltes unendlich kleines Increment der ersten Ordnung bezeichnet; so ist der Ausdruck:

$$F(x+i)-f(x+i) \tag{12}$$

nach Zus. 1 eine unendlich kleine Größe der Ordnung $a+1$. Nun sind aber die abgeleiteten Functionen dieses Ausdruckes in Beziehung auf i resp.:

$$F'(x+i)-f'(x+i), \quad F''(x+i)-f''(x+i), \text{ etc...}$$

und aus den Seite 52 der Differenzialrechnung Gesagten folgt, daß:

$$F^{(n+1)}(x+i)-f^{(n+1)}(x+i)$$

der erſte der Ausdrücke:

$$F(x+i)-f(x+i),\quad F'(x+i)-f'(x+i),$$
$$F''(x+i)-f''(x+i),\ \text{etc.}...$$

iſt, welcher nicht mit i verſchwindet. Mit andern Worten:

$$F^{(\alpha+1)}(x)-f^{(\alpha+1)}(x)$$

iſt die erſte der Differenzen:

$$F(x)-f(x),\quad F'(x)-f'(x),\quad F''(x)-f''(x),\ \text{etc.}...$$

welche einen von Null verſchiedenen Werth erhält. Man hat alſo für den Berührungspunkt:

$$(13)\qquad F(x)=f(x),\quad F'(x)=f'(x),$$
$$F''(x)=f''(x),\ldots\ F^{(\alpha)}(x)=f^{(\alpha)}(x).$$

Wenn ſich alſo zwei Curven in einem Punkte berühren, worin die gemeinſchaftliche Tangente nicht zu der Axe der y parallel iſt, ſo iſt für dieſen Punkt nicht blos die Ordinate y und ihre abgeleitete Function y' bei dem Uebergange von der einen Curve zur andern unveränderlich, ſondern daſſelbe gilt auch von den ſucceſſiven abgeleiteten Functionen y'', y''',... bis zu der, deren Ordnungszahl der Ordnungszahl der Berührung gleich, oder um eine Einheit größer als dieſelbe iſt.

Zuſatz 4. Wenn die Berührung der beiden Curven vom αten Grade iſt, und die gemeinſchaftliche Tangente würde zu der Axe der y parallel, ſo würde man, wenn man der Abſciſſe des Berührungspunktes ein unendlich kleines Increment der erſten Ordnung ertheilte, im Allgemeinen für den correſpondirenden Werth der Differenz $F(x)-f(x)$ nicht eine unendlich kleine Größe der Ordnung $\alpha+1$ erhalten; allein man könnte deſſenungeachtet die Ordnung der Berührung noch durch die von uns angewandte Methode beſtimmen, wofern man für die Veränderliche y die Veränderliche x und umgekehrt ſubſtituirte. Um z. B. zu zeigen, daß die beiden Curven:

$$(14)\qquad y=x^{\frac{5}{4}},\quad y=x^{\frac{4}{3}},$$

welche die Axe der y im Anfangspunkte berühren, eine Berührung von der Ordnung $\frac{1}{12}$ haben, braucht man nur zu bemerken, daß ihre nach x aufgelöſten Gleichungen die Form annehmen:

$$x=y^{\frac{4}{5}},\quad x=y^{\frac{3}{4}},$$

und daß die Differenz $y^{\frac{4}{5}}-y^{\frac{3}{4}}$ eine unendlich kleine Größe von der Ordnung:

$$\tfrac{4}{4}=1+\tfrac{1}{4}$$

iſt, wenn man y als eine unendlich kleine Größe von der erſten

Ordnung betrachtet. Was die Differenz $F(x) - f(x)$ anlangt, so reducirt sie sich in diesem Beispiele auf:

$$x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{3}{2}},$$

und wenn man x als eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung betrachtet, so ist sie nicht eine unendlich kleine Größe von der Ordnung $\frac{4}{3}$, sondern blos von der Ordnung $\frac{3}{2}$.

Zusatz 5. Wenn die gemeinschaftliche Tangente nicht zu der Axe der y parallel ist, und die Ordnung der Berührung ist eine ganze Zahl, so ist es zur Bestimmung derselben hinreichend, zu untersuchen, welche von den Gleichungen:

$$(15) \quad f(x) = F(x),\ f'(x) = F'(x),\ f''(x) = F''(x), \text{ etc.}\ldots$$

die letzte ist, die durch die Abscisse des Berührungspunktes verificirt wird, und alsdann ist die Ordnung der Ableitung in dieser letzten Gleichung genau der gesuchten Zahl gleich.

Für das Stattfinden des Lehrsatzes 3 braucht man nicht vorauszusetzen, daß die in einer unendlich kleinen Entfernung vom Berührungspunkte der beiden gegebenen Curven gezogene Secante während der Abnahme dieser Entfernung zu sich selbst parallel bleibt, sondern es genügt, daß der von dieser Secante mit der gemeinschaftlichen Tangente gebildete Winkel nicht unendlich klein wird und gegen eine endliche, von Null verschiedene Grenze convergirt. Dieses findet z. B. statt, wenn die in Rede stehende Secante durch die Endpunkte der beiden vom Berührungspunkte aus auf den beiden Curven genommenen gleichen und unendlich kleinen Längen geht. In diesem besondern Falle ist die Grenze des von der Secante und der gemeinschaftlichen Tangente gebildeten Winkels ein rechter Winkel, und hieraus ergibt sich leicht, daß die Entfernung des Berührungspunktes von der Secante eine unendlich kleine Größe von derselben Ordnung als jede der beiden vorhin erwähnten gleichen Längen ist. Hiernach ergibt sich aus dem Lehrsatze 3 unmittelbar folgender:

Lehrsatz 5. Um die Ordnung der Berührung zweier Curven, welche sich in einem gegebenen Punkte berühren, zu bestimmen, braucht man nur die Zahl zu bestimmen, welche die Ordnung der unendlich kleinen Entfernung zwischen den Endpunkten der auf den beiden Curven vom Berührungspunkte aus genommenen beiden gleichen Längen ausdrückt, wenn diese Längen unendlich kleine Größen der ersten Ordnung werden, und alsdann gibt die erwähnte, um eine Einheit verminderte Zahl immer die Ordnung der Berührung an.

Zusatz 1. Es sei i die unendlich kleine Größe, welche jede der beiden Längen ausdrückt. Außerdem wollen wir durch x, y und ξ, η die Coordinaten der auf der ersten und zweiten Curve liegenden Endpunkte dieser Längen bezeichnen und durch:

$$(16) \qquad i = \sqrt{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]}$$

die Länge der von dem Punkte (ξ, η) nach dem Punkte (x, y) gezogenen Geraden. Wenn man i als eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung betrachtet und die Ordnung der Berührung der beiden Curven mit a bezeichnet, so ist die Entfernung s zwischen den beiden Punkten (x, y) und (ξ, η) nach Lehrsatz 5 eine unendlich kleine Größe der Ordnung $a+1$. Folglich ist das Quadrat dieser Entfernung oder die Summe:

$$(17) \qquad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2,$$

eine unendlich kleine Größe von der Ordnung $2(a+1)$, wozu erforderlich ist, daß die beiden Differenzen:

$$(18) \qquad x-\xi, \quad y-\eta$$

von der Ordnung $a+1$ sind, oder daß wenigstens die eine von dieser Ordnung und die andere von einer höhern ist. Zu demselben Schlusse gelangt man, wenn man erwägt, daß die Zahlenwerthe der Ausdrücke (18) die Projectionen der Entfernung s auf die Aren der x und der y sind. Denn man sieht leicht ein, daß eine unendlich kleine Entfernung und ihre Projectionen auf die Coordinatenaren im Allgemeinen Größen von derselben Ordnung sind; nur kann die Ordnung der Projection auf eine der Aren die der Entfernung dann übersteigen, wenn diese zu der andern Are fast parallel wird. Aber es ist klar, daß diese letzte Bedingung für die beiden Aren der x und der y nicht zugleich erfüllt werden kann.

Zusatz 2. Wir wollen dieselben Bezeichnungen, wie im vorhergehenden Zusatze beibehalten. Es sei a wieder die Ordnungszahl für die Berührung der beiden gegebenen Curven und durch n wollen wir die ganze Zahl bezeichnen, welche $=a$ oder unmittelbar größer als a ist. Da die Größe i als eine unendlich kleine Größe von der ersten Ordnung betrachtet wird, so müssen die beiden Differenzen:

$$(18) \qquad x-\xi, \quad y-\eta$$

beide von der Ordnung $a+1$ oder die eine von dieser und die andere von einer höhern Ordnung sein, und aus dem Seite 32 der Differenzialrechnung Gesagten folgt, daß, wenn i zur unabhängigen Veränderlichen genommen wird, die Ausdrücke:

$$(19) \qquad \begin{cases} x-\xi, \dfrac{d(x-\xi)}{di}, \dfrac{d^2(x-\xi)}{di^2}, \ldots\ldots \dfrac{d^n(x-\xi)}{di^n}, \\ y-\eta, \dfrac{d(y-\eta)}{di}, \dfrac{d^2(y-\eta)}{di^2}, \ldots\ldots \dfrac{d^n(y-\eta)}{di^n} \end{cases}$$

mit i verschwinden, während jede der abgeleiteten Functionen:

$$(20) \qquad \frac{d^{n+1}(x-\xi)}{di^{n+1}}, \quad \frac{d^{n+1}(y-\eta)}{di^{n+1}},$$

oder wenigstens eine derselben, nicht mehr für $i=0$ verschwindet.

Ueberdies seien s und ς die Bogen, welche 1) zwischen einem festen Punkte der ersten gegebenen Curve und dem beweglichen Punkte (x, y) und 2) zwischen einem festen Punkte der zweiten Curve und dem Punkte (ξ, η) liegen. Da die drei Veränderlichen i, s und ς nur um constante Größen von einander verschieden sind, so hat man:

$$(21) \qquad di = ds = d\varsigma,$$

und man kann bei der ersten Curve s statt i und bei der zweiten ς statt i als unabhängige Veränderliche nehmen. Alsdann verwandeln sich die Ausdrücke (19) und (20) resp. in:

$$(22) \quad \begin{cases} x-\xi, \ \dfrac{dx}{ds}-\dfrac{d\xi}{d\varsigma}, \ \dfrac{d^2x}{ds^2}-\dfrac{d^2\xi}{d\varsigma^2}, \ldots\ldots \dfrac{d^nx}{ds^n}-\dfrac{d^n\xi}{d\varsigma^n}, \\ y-\eta, \ \dfrac{dy}{ds}-\dfrac{d\eta}{d\varsigma}, \ \dfrac{d^2y}{ds^2}-\dfrac{d^2y}{d\varsigma^2}, \ldots\ldots \dfrac{d^ny}{ds^n}-\dfrac{d^n\eta}{d\varsigma^n}, \end{cases}$$

und in:

$$(23) \qquad \frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}}-\frac{d^{n+1}\xi}{d\varsigma^{n+1}}, \ \frac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}}-\frac{d^{n+1}\eta}{d\varsigma^{n+1}}.$$

Und wenn man die Ausdrücke (22) gleich Null setzt, so erhält man die Gleichungen:

$$(24) \quad \begin{cases} \xi = x, \ \dfrac{d\xi}{d\varsigma}=\dfrac{dx}{ds}, \ \dfrac{d^2\xi}{d\varsigma^2}=\dfrac{d^2x}{ds^2}, \ldots\ldots \dfrac{d^n\xi}{d\varsigma^n}=\dfrac{d^nx}{ds^n}, \\ \eta = y, \ \dfrac{d\eta}{d\varsigma}=\dfrac{dy}{ds}, \ \dfrac{d^2\eta}{d\varsigma^2}=\dfrac{d^2y}{ds^2}, \ldots\ldots \dfrac{d^n\eta}{d\varsigma^n}=\dfrac{d^ny}{ds^n}, \end{cases}$$

welche sich alle für den Berührungspunkt der gegebenen Curven verificiren müssen, während jeder der Ausdrücke (23), oder wenigstens einer derselben für denselben Punkt einen von Null verschiedenen Werth bekommt. Wenn man nun erwägt, daß man in Beziehung auf die zweite Curve x, y und s für die Buchstaben ξ, η und ς substituiren kann, so gelangt man unmittelbar zu folgendem Lehrsatze:

Lehrsatz 6. Wenn zwei Curven gegeben sind, welche sich in einem Punkte berühren und man betrachtet die Coordinaten x, y jeder derselben als Functionen des Bogens s, welcher als unabhängige Veränderliche betrachtet und für beide Curven nach demselben Sinne über den Berührungspunkt hinaus gezählt wird; so ändern nicht blos die Veränderlichen x, y und ihre abgeleiteten Functionen der ersten Ordnung $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ für den in Rede stehenden Punkt bei dem Uebergange von der ersten Curve zur zweiten ihre Werthe nicht, sondern dasselbe findet auch für die successiven abgeleiteten Functionen $\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^3x}{ds^3}, \ldots, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^3y}{ds^3}, \ldots$ bis zu denen statt, deren Ordnung durch die ganze Zahl ausgedrückt wird,

welche der Ordnung der Berührung gleich oder zunächst größer, als sie ist. Dieses sind die letzten abgeleiteten Functionen, welche die ausgesprochene Bedingung erfüllen, so daß die beiden folgenden, oder wenigstens eine derselben den Werth ändern, wenn man von der einen Curve zu der andern übergeht.

Zusatz 1. Wenn zwischen den beiden Curven eine Berührung der $n$ten Ordnung stattfindet, wo n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, so behält jede der Größen:

$$(25)\qquad \begin{cases} x, \frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}, \ldots\ldots \frac{d^nx}{ds^n}, \\ y, \frac{dy}{ds}, \frac{d^2y}{ds^2}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{ds^n} \end{cases}$$

für den Berührungspunkt bei dem Uebergange von der einen Curve zur andern denselben Werth, während jede der beiden abgeleiteten Functionen:

$$(26)\qquad \frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}}, \qquad \frac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}},$$

oder wenigstens eine derselben einen andern Werth bekommt.

Zusatz 2. Es sei:

$$(27)\qquad r = \mathfrak{F}(x, y)$$

irgend eine Function der beiden Veränderlichen x, y. Wenn man diese Veränderlichen selbst als Functionen von s betrachtet, welche die Coordinaten der ersten oder zweiten Curve ausdrücken können, so wird r ebenfalls eine Function von s, und man findet:

$$(28)\qquad \begin{cases} \frac{dr}{ds} = \frac{d\mathfrak{F}(x,y)}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{d\mathfrak{F}(x,y)}{dy}\frac{dy}{ds}, \\ \frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d\mathfrak{F}(x,y)}{dx}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d\mathfrak{F}(x,y)}{dy}\frac{d^2y}{ds^2} \\ \quad + \frac{d^2\mathfrak{F}(x,y)}{dx^2}\frac{dx^2}{ds^2} + 2\frac{d^2\mathfrak{F}(x,y)}{dx\,dy}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} \\ \quad + \frac{d^2\mathfrak{F}(x,y)}{dy^2}\frac{dy^2}{ds^2} \text{ u. s. w.} \ldots\ldots \\ \frac{d^nr}{ds^n} = \frac{d\mathfrak{F}(x,y)}{dy}\frac{d^nx}{ds^n} + \frac{d\mathfrak{F}(x,y)}{dy}\frac{d^ny}{ds^n} + \text{u. s. w.} \ldots \end{cases}$$

Nun folgt aber aus diesen letzten Gleichungen in Verbindung mit dem ersten Zusatze, daß, wenn zwischen den beiden gegebenen Curven eine Berührung der $n$ten Ordnung stattfindet, jede der Größen:

$$(29)\quad \begin{cases} r = \mathfrak{F}(x, y), \quad \dfrac{dr}{ds} = \dfrac{d\mathfrak{F}(x, y)}{ds}, \quad \dfrac{d^2 r}{ds^2} = \dfrac{d^2 \mathfrak{F}(x, y)}{ds^2}, \ldots \\ \dfrac{d^n r}{ds^n} = \dfrac{d^n \mathfrak{F}(x, y)}{ds^n} \end{cases}$$

für den Berührungspunkt beim Uebergange von der ersten Curve zur zweiten denselben Werth behält. Dieses findet z. B. statt, wenn man für r den vom Anfangspunkte nach dem Punkte (x, y) gezogenen und durch die Formel:

$$(30)\qquad r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

bestimmten Radiusvector nimmt. Ferner wollen wir bemerken, daß die abgeleitete Function:

$$(31)\qquad \frac{d^{n+1} r}{ds^{n+1}} = \frac{d^{n+1} \mathfrak{F}(x, y)}{ds^{n+1}},$$

welche durch die Gleichung:

$$(32)\quad \frac{d^{n+1} r}{ds^{n+1}} = \frac{d\mathfrak{F}(x, y)}{dx} \frac{d^{n+1} x}{ds^{n+1}} + \frac{d\mathfrak{F}(x, y)}{dy} \frac{d^{n+1} y}{ds^{n+1}} + \text{u. s. w.} \ldots$$

bestimmt wird, gewöhnlich den Werth verändert, wenn man von der ersten Curve zur zweiten übergeht, weil jeder der Ausdrücke (26), oder wenigstens einer derselben einen andern Werth bekommt. Nichtsdestoweniger könnte in gewissen besondern Fällen auch das Gegentheil stattfinden, z. B. wenn die dem Berührungspunkte entsprechenden Werthe von x und y im zweiten Theile der Gleichung (32) die Coefficienten der Ausdrücke (26) nämlich:

$$(33)\qquad \frac{d\mathfrak{F}(x, y)}{dx}, \quad \frac{d\mathfrak{F}(x, y)}{dy}$$

oder wenigstens den Coefficienten von dem, dessen Werth veränderlich ist, auf Null reducirte. Dieselbe Bemerkung ist auf die abgeleiteten Functionen:

$$(34)\qquad \frac{d^{n+2} r}{ds^{n+2}}, \quad \frac{d^{n+3} r}{ds^{n+3}}, \text{ u. s. w.} \ldots$$

anwendbar. Wenn man zur Fixirung der Begriffe die beiden, sich im Anfangspunkte berührenden Curven:

$$(9)\qquad y = x^2, \quad y = x^3$$

betrachtet und

$$(35)\qquad r = x^2 + y^2$$

setzt, so ergibt sich, daß für den Berührungspunkt nicht blos r und $\frac{dr}{ds}$, sondern auch $\frac{d^2 r}{ds^2}$ bei dem Uebergange von der einen Curve zur andern denselben Werth behält, obgleich die Berührung nur von der ersten Ordnung ist.

Zusatz 3. Gesetzt nun, man wollte $r = \mathfrak{F}(x, y)$ statt s zur unabhängigen Veränderlichen nehmen, so kann man sich vorstellen, daß, indem die Coordinaten x, y wieder Functionen von s sind, s eine Function von r werde, und aus der, mehrere Male nach r differenzirten Gleichung (27) ergibt sich:

$$(36)\quad \begin{cases} 1 = \dfrac{d\mathfrak{F}(x,y)}{ds}\,\dfrac{ds}{dr}, \\ 0 = \dfrac{d\mathfrak{F}(x,y)}{ds}\,\dfrac{d^2s}{dr^2} + \dfrac{d^2\mathfrak{F}(x,y)}{ds^2}\left(\dfrac{ds}{dr}\right)^2, \\ 0 = \dfrac{d\mathfrak{F}(x,y)}{ds}\,\dfrac{d^3s}{dr^3} + 3\,\dfrac{d^2\mathfrak{F}(x,y)}{ds^2}\,\dfrac{ds}{dr}\,\dfrac{d^2s}{dr^2} \\ \quad + \dfrac{d^3\mathfrak{F}(x,y)}{ds^3}\left(\dfrac{ds}{dr}\right)^3, \\ \text{u. s. w.}\ldots\ldots \\ 0 = \dfrac{d\mathfrak{F}(x,y)}{ds}\,\dfrac{d^ns}{dr^n} + \text{u. s. w.}\ldots \end{cases}$$

Nun folgt aber aus den Formeln (36) in Verbindung mit dem Zusatz 2 offenbar, daß, wenn zwischen den beiden gegebenen Curven eine Berührung der $n$ten Ordnung stattfindet, die Größen:

$$(37)\quad \frac{ds}{dr},\ \frac{d^2s}{dr^2},\ \frac{d^3s}{dr^3},\ \text{u. s. w.}\ldots\ \frac{d^ns}{dr^n}$$

für den Berührungspunkt dieselben Werthe behalten, wenn man von der ersten Curve zur zweiten übergeht. Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen:

$$(38)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dr} = \dfrac{dx}{ds}\,\dfrac{ds}{dr}, \\ \dfrac{d^2x}{dr^2} = \dfrac{dx}{ds}\,\dfrac{d^2s}{dr^2} + \dfrac{d^2x}{ds^2}\left(\dfrac{ds}{dr}\right)^2, \\ \text{u. s. w.}\ldots\ldots \\ \dfrac{d^nx}{dr^n} = \dfrac{dx}{ds}\,\dfrac{d^ns}{dr^n} + \text{u. s. w.}\ldots \\ \dfrac{dy}{dr} = \dfrac{dy}{ds}\,\dfrac{ds}{dr}, \\ \dfrac{d^2y}{dr^2} = \dfrac{dy}{ds}\,\dfrac{d^2s}{dr^2} + \dfrac{d^2y}{ds^2}\left(\dfrac{ds}{dr}\right)^2, \\ \text{u. s. w.}\ldots \\ \dfrac{d^ny}{dr^n} = \dfrac{dy}{ds}\,\dfrac{d^ns}{dr^n} + \text{u. s. w.}\ldots \end{cases}$$

und berücksichtigt den Zusatz 1, so gelangt man zu folgenden Schlüssen:

Wenn zwischen den beiden gegebenen Curven eine Berührung der $n$ten Ordnung stattfindet, und wenn man $r = F(x, y)$ als unabhängige Veränderliche nimmt, so erhalten nicht blos die Coordinaten x, y, sondern auch ihre abgeleiteten Functionen bis zu der $n$ten Ordnung, nämlich:

$$(39)\quad \begin{cases} \frac{dx}{dr}, \frac{d^2x}{dr^2}, \frac{d^3x}{dr^3}, \ldots\ldots \frac{d^nx}{dr^n}, \\ \frac{dy}{dr}, \frac{d^2y}{dr^2}, \frac{d^3y}{dr^3}, \ldots\ldots \frac{d^nx}{dr^n} \end{cases}$$

für den Berührungspunkt dieselben Werthe, wenn man von der ersten Curve zur zweiten übergeht. Es ist folglich gestattet, für die Veränderliche s in Zusatz 1 die durch irgend eine endliche Gleichung mit den beiden Coordinaten x, y verbundene Veränderliche r zu substituiren. Nur kann man nach dieser Substitution nicht mehr behaupten, daß für den Berührungspunkt wenigstens eine der beiden abgeleiteten Functionen:

$$\frac{d^{n+1}x}{dr^{n+1}}, \quad \frac{d^{n+1}y}{dr^{n+1}}$$

bei dem Uebergange von der ersten Curve zur zweiten den Werth verändert.

Zusatz 4. Wir wollen annehmen, daß, indem die Ordnung der Berührung der beiden gegebenen Curven $= n$ ist, man wieder r zur unabhängigen Veränderlichen nehme und durch:

$$p, \; q, \text{ u. s. w.}\ldots\ldots$$

neue Functionen der Coordinaten x, y bezeichne; so hat man:

$$(40)\quad \begin{cases} \frac{dp}{dr} = \frac{dp}{dx}\frac{dx}{dr} + \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dr}, \\ \frac{d^2p}{dr^2} = \frac{dp}{dx}\frac{d^2x}{dr^2} + \frac{dp}{dy}\frac{d^2y}{dr^2} \\ \quad + \frac{d^2p}{dx^2}\frac{d^2x}{dr^2} + 2\frac{d^2p}{dxdy}\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dr} + \frac{d^2p}{dy^2}\frac{dy^2}{dr^2} \\ \text{u. s. w.}\ldots\ldots \\ \frac{d^np}{dr^n} = \frac{dp}{dx}\frac{d^nx}{dr^n} + \frac{dp}{dy}\frac{d^ny}{dr^n} + \text{u. s. w.}\ldots\ldots; \end{cases}$$

und da die Ausdrücke (39) für den Berührungspunkt bei dem Uebergange von der ersten Curve zur zweiten dieselben Werthe behalten, so ist klar, daß dasselbe nicht blos für die abgeleiteten Functionen:

(41) $$\frac{dp}{dr}, \frac{d^2p}{dr^2}, \ldots\ldots \frac{d^np}{dr^n},$$

deren Werthe durch die Formeln (40) bestimmt werden, sondern auch für die Differenziale:

(42) $$dp, \quad d^2p, \ldots\ldots d^np$$

gilt. Zu ähnlichen Schlüssen würde man gelangen, wenn man für die Function p die Function q substituirte. Endlich könnte man die Functionen $p, q, r, \ldots$ auf alle möglichen Arten mit einander vertauschen und z. B. behaupten, daß in dem Falle einer Berührung von der $n$ten Ordnung die in Beziehung auf die Veränderliche p, als unabhängige Veränderliche betrachtet, genommenen abgeleiteten Functionen:

(43) $$\frac{dr}{dp}, \frac{d^2r}{dp^2}, \ldots\ldots \frac{d^nr}{dp^n}$$

und die in Beziehung auf die als unabhängig betrachtete Veränderliche q genommenen Differenziale:

(44) $$\begin{cases} dp, & d^2p, \ldots\ldots d^np, \\ dr, & d^2r, \ldots\ldots d^nr \end{cases}$$

für den Berührungspunkt dieselben Werthe behalten, während man von der einen Curve zur andern übergeht.

Zusatz 5. Nichts hindert, in den Zusätzen 2 und 3

$$r = x$$

zu setzen. Alsdann reduciren sich von den Ausdrücken (39) diejenigen, welche die Veränderliche x enthalten, der erste auf die Einheit, die übrigen auf Null und die, welche y enthalten, verwandeln sich resp. in:

(45) $$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Wenn also zwischen den beiden gegebenen Curven eine Berührung der $n$ten Ordnung stattfindet und man nimmt x zur unabhängigen Veränderlichen, so behält nicht nur die Ordinate y, sondern auch jede ihrer abgeleiteten Functionen bis zu der von der Ordnung n bei dem Uebergange von der ersten Curve zur zweiten denselben Werth für den Berührungspunkt. Dagegen bekommt die abgeleitete Function von der Ordnung $n+1$ und jede der folgenden bei diesem Uebergange gewöhnlich einen neuen Werth. Betrachtet man z. B. die beiden Curven:

(46) $$x = y^2, \quad x = y^3,$$

welche sich im Anfangspunkte der Coordinaten berühren und die Axe der y zur gemeinschaftlichen Tangente haben, so findet man, daß für den Berührungspunkt jede der Größen:

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \text{ u. s. w.} \ldots\ldots$$

bei dem Uebergange von der einen Curve zur andern denselben Werth behält, nämlich die Größe y einen Werth Null und jede der abgeleiteten Functionen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... einen unendlichen Werth, obgleich die Berührung nur von der ersten Ordnung ist.

Wenn die gemeinschaftliche Tangente der beiden gegebenen Curven nicht mit der Axe der y, oder mit einer Parallele zu dieser Axe zusammenfällt, so ist $\frac{d^n y}{dx^n}$ die letzte der abgeleiteten Functionen von y, welche für die beiden Curven denselben Werth behalten (s. Lehrsatz 4, Zus. 5), und folglich ändert die abgeleitete Function der Ordnung $n+1$, nämlich:

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$$

bei dem Uebergange von der einen Curve zur andern nothwendig ihren Werth.

Zusatz 6. Zwei Curven, zwischen welchen eine Berührung der zweiten oder einer höheren Ordnung stattfindet, osculiren immer einander, weil sie für den Berührungspunkt immer dieselben Werthe von y, y', y'' geben müssen, wenn die Abscisse x zur unabhängigen Veränderlichen genommen wird. Umgekehrt, da zwei sich osculirende Curven immer dieser Bedingung Gnüge leisten müssen, welche Gerade man auch zur Axe der x nehmen mag, so findet im Osculationspunkte eine Berührung der zweiten oder einer höheren Ordnung statt.

Zum Schlusse dieser Vorlesung wollen wir noch bemerken, daß die Lehrsätze 4 und 6 mit ihren verschiedenen Zusätzen, sowie die des Lehrsatzes 5 offenbar auch noch in dem Falle stattfinden, wo x, y nicht mehr rechtwinklige, sondern schiefwinklige Coordinaten bezeichnen. Nur muß man alsdann für die Formeln (16) und (20) die beiden folgenden:

$$(47) \quad s = \sqrt{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + 2(x-\xi)(y-\eta)\cos\delta]},$$

$$(48) \quad r = \sqrt{[x^2 + y^2 + 2xy\cos\delta]}$$

und für den Ausdruck (17) die Summe:

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + 2(x-\xi)(y-\eta)\cos\delta \\ = [y-\eta+(x-\xi)\cos\delta]^2 + [(x-\xi)\sin\delta]^2 \end{array} \right.$$

setzen, wo δ den, von den beiden Halbaxen der positiven Coordinaten gebildeten Winkel bezeichnet.

Zehnte Vorlesung.

Ueber die verschiedenen Arten der Berührung, welche zwei ebene Curven darbieten können, die durch zwei Gleichungen ausgedrückt sind, wovon die eine willkürliche Constanten enthält. Berührungspunkte, in welchen zwei Curven einander durchschneiden, indem sie sich berühren.

Wir wollen zwei ebene Curven betrachten, welche durch zwei Gleichungen zwischen den rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten x, y ausgedrückt werden, und wir wollen annehmen, daß, während die erste Curve der Form und Lage nach vollständig bestimmt ist, die zweite ihre Form und Lage mit den Werthen mehrerer in ihrer Gleichung vorkommender willkührlicher Constanten $a, b, c, \ldots$ verändern kann. Es sei:

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

die Gleichung der ersten Curve, und:

$$F(x, y, a, b, c, \ldots) = 0 \tag{2}$$

die der zweiten. Ferner wollen wir annehmen, daß die Abscisse x zur unabhängigen Veränderlichen genommen wird, und daß man auf der ersten Curve einen Punkt (x, y) wählt, in welchem die Tangente nicht zu der Axe der y parallel ist. Die willkührlichen Constanten $a, b, c, \ldots$ oder einige derselben kann man so annehmen, daß mehrere auf einander folgende Glieder der Reihe:

$$y, y', y'', y''', \text{ u. s. w.} \tag{3}$$

für die Abscisse x bei dem Uebergange von der ersten Curve zur zweiten dieselben bleiben. Alsdann liegt der Punkt (x, y) der ersten Curve auch in der zweiten, und es findet in diesem Punkte zwischen beiden eine Berührung statt, deren Ordnung um eine Einheit kleiner ist, als die Anzahl der Glieder, welche ihre Werthe nicht verändert haben. Es sei nun n die Anzahl der Constanten $a, b, c, \ldots$. Da zwischen ihnen jedesmal eine Bedingungsgleichung aufgestellt wird, wenn man die beiden Werthe eines Gliedes der Reihe (3) in Beziehung auf beide Curven einander gleich setzt; so ist klar, daß diese Constanten alle bestimmt sein werden, wenn die n ersten Glieder der Reihe bei dem Uebergange von der einen Curve zur an-

dern dieselben Werthe behalten sollen. Aber wenn man blos einige der so gebildeten Gleichungen beibehält, nämlich die sich auf die Ordinate y und deren abgeleitete Functionen der niedrigern Ordnungen beziehenden, so bleiben mehrere Constanten willkührlich, und die zweite Curve kann sich der Form und Lage nach ändern, ohne daß sie aufhört durch den Punkt (x, y) zu gehen und die erste Curve in diesem Punkte zu berühren. Im ersten Falle ist die Ordnung der Berührung wenigstens $= n - 1$ und sie ist zu gleicher Zeit die möglichst höchste. Im zweiten Falle ist die Ordnung der Berührung im Allgemeinen niedriger, als $n - 1$.

Zu ähnlichen Schlüssen würde man gelangen, wenn man y zur unabhängigen Veränderlichen nähme und auf der ersten Curve einen Punkt betrachtete, in welchem die Tangente nicht zu der Axe der x parallel wäre. Man kann also folgenden Lehrsatz aufstellen:

Lehrsatz 1. Unter den Systemen von Werthen, welche man den in der Gleichung:

$$(2) \qquad F(x, y, a, b, c, \ldots) = 0$$

enthaltenen n willkührlichen Constanten beilegen kann, gibt es im Allgemeinen ein System, für welches die durch diese Gleichung ausgedrückte Curve mit einer gegebenen Curve in dem Punkte von der Abscisse x eine Berührung eingeht, deren Ordnung wenigstens $= n - 1$ ist, und unendlich viele andere Systeme, für welche die Berührung zwischen den beiden Curven von einer niedrigern Ordnung ist, als $n - 1$.

Zusatz 1. Um unter den Systemen der Werthe von a, b, c, ... das zu finden, welches wenigstens eine Berührung von der Ordnung $n - 1$ bestimmt, wenn man die Abscisse x zur unabhängigen Veränderlichen nimmt, genügt es offenbar, die Gleichungen mit einander zu verbinden, welche man erhält, wenn man die aus den Gleichungen der gegebenen Curve gezogenen Werthe von:

$$(4) \qquad y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$$

in die endliche Gleichung der zweiten Curve und in ihre abgeleiteten Gleichungen von einer niedrigern Ordnung als n substituirt.

Wenn man statt der Abscisse x irgend eine Function der Coordinaten x, y oder den auf jeder Curve von einem festen Punkte aus gezählten Bogen s zur unabhängigen Veränderlichen nähme, so müßte man, um das verlangte System der Werthe von a, b, c, ... zu erhalten, die Formeln anwenden, welche man erhält, wenn man die Werthe der Größen:

$$(5) \qquad x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \ldots d^{n-1}x, d^{n-1}y$$

in Beziehung auf die gegebene Curve in die endliche Gleichung der zweiten Curve und in ihre Differenzialgleichungen, deren Ordnung $= n$ oder niedriger als n ist, d. h. in die successiven Gleichungen:

$$(6) \qquad F(x, y, a, b, c, \ldots) = 0, \quad dF(x, y, a, b, c, \ldots) = 0,$$
$$\ldots d^{n-1}F(x, y, a, b, c, \ldots) = 0,$$

welche entwickelt unter den Formen:

$$(7)\quad \begin{cases} F(x, y, a, b, c, \ldots) = 0, \\ \dfrac{dF(x,y,a,b,c,\ldots)}{dx}dx + \dfrac{dF(x,y,a,b,c,\ldots)}{dy}dy = 0, \\ \text{u. s. w.} \ldots \\ \dfrac{dF(x,y,a,b,c,\ldots)}{dx}d^{n-1}x + \dfrac{dF(x,y,a,b,c\ldots)}{dy}d^{n-1}y + \text{&c.} = 0 \end{cases}$$

erscheinen, substituirt (s. Vorles. 9).

Die Gleichungen, (7), deren Anzahl $= n$ ist, sind offenbar zur Bestimmung der Constanten a, b, c, ... hinreichend. Sie enthalten außerdem als besondere Fälle die Gleichungen, welche man erhält, wenn die Abscisse x zur unabhängigen Veränderlichen genommen wird.

Zusatz 2. Um die Systeme der Werthe von a, b, c, ..., welche zwischen der gegebenen Curve und der durch die Gleichung (2) ausgedrückten eine Berührung von einer niedrigern Ordnung als $n-1$ bestimmen, zu erhalten, braucht man nur eine gewisse Anzahl von den im vorhergehenden Zusatze angeführten Formeln beizubehalten, indem man bei denen anfängt, welche y und dessen abgeleiteten Functionen oder Differenziale der niedrigern Ordnung enthalten. So ist z. B. die Berührung im Allgemeinen von der zweiten, dritten, ... Ordnung, wenn die Constanten a, b, c, ... die drei, vier, ... ersten der Gleichungen (7) verificiren müssen. Nun erhält man aber unendlich viele Systeme, welche solchen Bedingungen Genüge leisten.

Zusatz 3. Wenn die Gleichung (2) drei willkührliche Constanten enthält und sich auf:

$$(8)\quad F(x, y, a, b, c) = 0$$

reducirt, so kann man den Constanten a, b, c unendlich viele Systeme von Werthen beilegen, für welche die Curve (8) eine gegebene Curve berührt, und um diese Systeme von Werthen zu erhalten, braucht man nur die beiden Gleichungen:

$$(9)\quad \begin{cases} F(x, y, a, b, c) = 0, \\ \dfrac{dF(x,y,a,b,c)}{dx}dx + \dfrac{dF(x,y,a,b,c)}{dy}dy = 0 \end{cases}$$

mit einander zu verbinden, nachdem man die Werthe von x, y, dx, dy, in Beziehung auf die gegebene Curve hineinsubstituirt hat. Vermöge dieser Gleichungen werden zwei Constanten als Functionen der dritten, welche willkührlich bleiben kann, ausgedrückt. Dieses findet aber nicht mehr statt, wenn zwischen der Curve (8) und der gegebenen Curve im Punkte (x, y) eine Berührung stattfinden soll, deren Ordnung wenigstens $= 2$ ist, oder mit andern Worten, wenn der Punkt (x, y) für die beiden Curven ein Osculationspunkt werden soll. Alsdann werden die drei Constanten a, b, c durch das System der drei Gleichungen:

$$(10)\quad \begin{cases} F(x,y,a,b,c)=0 \\ \dfrac{dF(x,y,a,b,c)}{dx}\,dx+\dfrac{dF(x,y,a,b,c)}{dy}\,dy=0, \\ \dfrac{d^2F(x,y,a,b,c)}{dx^2}\,dx^2+2\,\dfrac{d^2F(x,y,a,b,c)}{dx\,dy}\,dx\,dy \\ +\dfrac{d^2F(x,y,a,b,c)}{dy^2}\,dy^2+\dfrac{dF(x,y,a,b,c)}{dx}\,d^2x \\ +\dfrac{dF(x,y,a,b,c)}{dy}\,d^2y=0 \end{cases}$$

bestimmt.

Zusatz 4. Wenn man in Zusatz 3 für die willkührlichen Constanten a, b, c, die willkührlichen Constanten ξ, η, ϱ substituirt und reducirt die Curve (8) auf einen Kreis, dessen Gleichung:

$$(11)\qquad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\varrho^2$$

ist; so verwandelt sich die zweite der Formeln (9) in:

$$(12)\qquad (x-\xi)\,dx+(y-\eta)\,dy=0,$$

und sie drückt die Relation aus, welche zwischen den Coordinaten ξ, η stattfinden muß, damit der Kreis die gegebene Curve im Punkte (x,y) berührt. Da nun ξ, η die Coordinaten des Mittelpunktes des Kreises sind und die Gleichung (12) vom ersten Grade ist, so darf man nicht blos schließen, daß es unendlich viele Kreise gibt, welche die Curve in dem Punkte (x,y) berühren, sondern auch, daß die Mittelpunkte aller berührenden Kreise auf einer geraden Linie liegen, welche der Gleichung (12) angehört, wenn man ξ und η als die einzigen Veränderlichen betrachtet. In der That ist klar, daß die Mittelpunkte aller berührenden Kreise auf der durch die erwähnte Gleichung ausgedrückten Normale liegen.

Wenn der durch die Gleichung (11) ausgedrückte Kreis die gegebene Curve nicht blos berühren, sondern mit derselben eine Berührung von der zweiten oder einer höhern Ordnung eingehen und folglich die Curve osculiren soll, so muß man mit den Gleichungen (11) und (12) noch die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$(13)\qquad (x-\xi)\,d^2x+(y-\eta)\,d^2y+dx^2+dy^2=0$$

verbinden, welche die Stelle der letzten der Gleichungen (10) vertritt. Alsdann werden die Coordinaten ξ und η und der Halbmesser ϱ durch die Gleichungen (11), (12) und (13) welche mit den Gleichungen (19) der siebenten Vorlesung und mit den Gleichungen (16) der achten Vorlesung übereinstimmen, vollständig bestimmt.

Zusatz 5. Gesetzt nun, die Curve (2) wäre eine parabolische Curve, deren Ordinate y sich auf eine ganze Function des Grades $n-1$ von x, d. h. auf ein Polynom von der Form:

$$(14)\qquad y=a+bx+cx^2+\ldots+px^{n-2}+qx^{n-1}$$

reducirt. Nimmt man alsdann x zur unabhängigen Veränderlichen, so geben die Gleichungen (7):

$$(15)\quad \begin{cases} y = a + bx + cx^2 + \ldots + px^{n-2} + qx^{n-1}, \\ y' = b + 2cx + \ldots + (n-2)px^{n-3} + (n-1)qx^{n-2}, \\ \text{u. s. w.} \ldots \\ y^{(n-2)} = 1.2.3\ldots(n-2)p + 2.3.4\ldots(n-1)qx, \\ y^{(n-1)} = 1.2.3\ldots(n-1)q, \end{cases}$$

und um die Constanten $a, b, c, \ldots p, q$ so zu bestimmen, daß zwischen der Curve (14) und der gegebenen Curve im Punkte (x, y) eine Berührung von der $n-1$ten, oder einer niedrigern Ordnung stattfindet, braucht man nur die Gleichungen (15) anzuwenden, nachdem man die Werthe von $x, y, y', \ldots y^{(n-2)}, y^{(n-1)}$ in Beziehung auf die gegebene Curve und den in Rede stehenden Punkt hineinsubstituirt hat. Wenn man größerer Bequemlichkeit wegen durch ξ, η die Coordinaten eines Punktes bezeichnet, welcher auf der gesuchten Curve liegt, ohne mit dem Punkte (x, y) zusammen zu fallen, so kann diese Curve durch die Gleichung mit ξ und η ausgedrückt werden, welche sich aus der Elimination der Constanten $a, b, c, \ldots p, q$ zwischen den Gleichungen (15) und der folgenden:

$$(16)\quad \eta = a + b\xi + c\xi^2 + \ldots + p\xi^{n-2} + q\xi^{n-1}$$

ergibt. Entwickelt man nun den zweiten Theil der Gleichung (16) nach den steigenden Potenzen von $\xi - x$, indem man erwägt, daß für einen beliebigen Werth der ganzen Zahl m

$$\xi^m = [x + (\xi - x)]^m = x^m + \frac{m}{1} x^{m-1}(\xi - x) + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2}(\xi - x)^2 + \ldots + (\xi - x)^m$$

ist; so findet man:

$$(17)\quad \begin{cases} \eta = a + bx + cx^2 + \ldots + px^{n-2} + qx^{n-1} \\ \quad + \dfrac{b + 2cx + \ldots + (n-2)px^{n-3} + (n-1)qx^{n-2}}{1}(\xi - x) \\ \quad + \text{u. s. w.} \ldots \\ \quad + \dfrac{1.2.3\ldots(n-2)p + 2.3.4\ldots(n-1)qx}{1.2.3\ldots(n-2)}(\xi - x)^{n-2} \\ + \dfrac{1.2.3\ldots(n-1)q}{1.2.3\ldots(n-1)}(\xi - x)^{n-1}, \end{cases}$$

und wenn man die Formeln (15) berücksichtigt:

$$(18)\quad \begin{cases} \eta = y + \frac{y'}{1}(\xi - x) + \frac{y''}{1.2}(\xi - x)^2 + \ldots \\ + \frac{y^{(n-2)}}{1.2.3\ldots(n-2)}(\xi - x)^{n-2} \\ + \frac{y^{(n-1)}}{1.2.3\ldots(n-1)}(\xi - x)^{n-1}. \end{cases}$$

Dieses ist die Gleichung der parabolischen Curve vom Grade $n-1$, welche mit einer gegebenen Curve in einem gegebenen Punkte (x, y) eine Berührung des $n-1$ten, oder einer nächstfolgenden Ordnung eingeht. Zu dieser Gleichung gelangt man auch, wenn man die Constanten $B, C, \ldots P, Q$ so zu bestimmen sucht, daß die durch die Gleichung

$$(19)\quad \eta - y = B(\xi - x) + C(\xi - x)^2 + \ldots + P(\xi - x)^{n-2} + Q(\xi - x)^{n-1}$$

ausgedrückte parabolische Curve, welche offenbar durch den Punkt (x, y) geht, mit der gegebenen Curve in diesem Punkte eine Berührung von der $n-1$ten Ordnung eingeht. Denn soll diese Bedingung erfüllt werden, so ist es nach den in der neunten Vorlesung aufgestellten Prinzipien hinreichend, daß die aus der Gleichung (19) abgeleiteten und $\xi = x$ entsprechenden Werthe von:

$$(20)\quad \frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d^2\eta}{d\xi^2}, \ldots \frac{d^{n-2}\eta}{d\xi^{n-2}}, \frac{d^{n-1}\eta}{d\xi^{n-1}},$$

nämlich:

$$(21)\quad B, 1.2\,C, \ldots 1.2.3\ldots(n-2)P, 1.2.3\ldots(n-1)Q$$

resp. den aus der Gleichung der gegebenen Curve abgeleiteten Werthen von:

$$(22)\quad y', y'', \ldots y^{(n-2)}, y^{(n-1)}$$

gleich sind. Setzt man nun die Größen (21) den Ausdrücken (22) gleich, so ergibt sich:

$$(23)\quad B = y', C = \frac{y''}{1.2}, \ldots P = \frac{y^{(n-2)}}{1.2.3\ldots(n-2)},$$
$$Q = \frac{y^{(n-1)}}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

und wenn man die vorhergehenden Werthe von $B, C, \ldots P, Q$ in die Gleichung (19) substituirt, so erhält man genau die Gleichung (18) wieder.

In dem besondern Falle, wo man $n = 2$ setzt, verwandelt sich die gesuchte Curve in eine Gerade und die auf die Form:

$$(24)\quad \eta = y + y'(\xi - x)$$

reducirte Gleichung (18) drückt, wie zu erwarten war, die durch

den Punkt (x, y) an die Curve, worin er liegt, gezogene Tangente aus.

Wenn man $n=3$ setzt, so drückt die auf die Form:

$$\eta = y + \frac{y'}{1}(\xi - x) + \frac{y''}{1.2}(\xi - x)^2 \quad (25)$$

reducirte Gleichung (18) eine Parabel des zweiten Grades aus, welche die gegebene Curve osculirt und eine zu der Axe der y parallele Grade zur Axe hat.

Zum Schlusse dessen, was wir über die Berührung ebener Curven zu sagen hatten, wollen wir noch einen bemerkenswerthen Lehrsatz beweisen, welcher sich auf den Fall bezieht, wo die Ordnung der Berührung eine ganze Zahl ist und welcher sich folgendermaßen ausdrücken läßt.

Lehrsatz 2. Betrachten wir zwei ebene Curven, deren Gleichungen zwischen recht- oder schiefwinkligen Coordinaten unter der Form:

$$y = f(x), \quad (26) \qquad y = F(x) \quad (27)$$

erscheinen. Ferner bezeichne n eine beliebige ganze Zahl und die beiden Functionen:

$$f^{(n+1)}(x), \quad F^{(n+1)}(x) \quad (28)$$

sollen in Beziehung auf x in der Nähe eines gegebenen Punktes, worin zwischen den beiden Curven eine Berührung der $n$ten Ordnung stattfindet, stetig bleiben; so durchschneiden sich die beiden Curven, indem sie sich berühren, wenn n eine gerade Zahl ist. Ist dagegen n eine ungerade Zahl, so bleibt die Ordinate der einen Curve in der Nähe des Berührungspunktes beständig größer als die der andern. Endlich ist in beiden Fällen die der Ordinaten $f(x)$, $F(x)$ die größte, wenn man über den Berührungspunkt nach der Seite der positiven x hinausgeht, deren abgeleitete Function von der Ordnung $n+1$ für den erwähnten Punkt den größten Werth bekommt.

Beweis. Denn da die Berührung von der $n$ten Ordnung ist, so ist von den Differenzen:

$$F(x+i) - f(x+i), \; F'(x+i) - f'(x+i),$$
$$F''(x+i) - f''(x+i), \text{ u. s. w. . . .},$$

wenn man für x die Abscisse des gegebenen Punktes substituirt, die Differenz:

$$F^{(n+1)}(x+i) - f^{(n+1)}(x+i) \quad (29)$$

die erste, welche nicht mit i verschwindet, und da die Functionen $f^{(n+1)}(x)$, $F^{(n+1)}(x)$ in der Nähe des Berührungspunktes nach der Voraussetzung stetig bleiben; so ist klar, daß die Differenz:

$$F^{(n+1)}(x) - f^{(n+1)}(x) \quad (30)$$

für dieſen Punkt weder einen Werth Null, noch einen unendlich großen Werth bekommt und ſich nothwendig auf eine endliche, von Null verſchiedene Größe reducirt. Bezeichnet man ferner durch θ eine kleinere Zahl als die Einheit, ſo ergibt ſich aus der Formel (19) Seite 40 der Differenzialrechnung:

$$(31) \qquad F(x+i)-f(x+i)=$$

$$\frac{i^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}[F^{n+1}(x+\theta i)-f^{(n+1)}(x+\theta i)],$$

und da für ſehr kleine Werthe von i die Ausdrücke:

$$F^{(n+1)}(x)-f^{(n+1)}(x) \text{ und } F^{(n+1)}(x+\theta i)-f^{(n+1)}(x+\theta i)$$

Größen von demſelben Zeichen ſind; ſo kann man offenbar behaupten, daß, wenn die Abſciſſe $x+i$ ſehr wenig von der Abſciſſe x verſchieden iſt, der zweite Theil der Gleichung (31) eine Größe mit demſelben Zeichen als das des Productes:

$$(32) \qquad i^{n+1}[F^{(n+1)}(x)-f^{(n+1)}(x)]$$

ſein wird. Folglich verändert der Ausdruck $F(x+i)-f(x+i)$, welcher dieſem zweiten Theile gleich iſt, das Zeichen mit i und i^{n+1}, wenn n eine gerade Zahl iſt. Alsdann wird die der Ordinaten $f(x+i)$, $F(x+i)$, welche vor dem Berührungspunkte auf der Seite der negativen x am kleinſten war, auf der andern Seite am größten, woraus folgt, daß ſich die beiden Curven durchſchneiden, indem ſie ſich berühren. Das Gegentheil findet ſtatt, wenn n eine ungerade Zahl iſt. Da alsdann i^{n+1} eine gerade Potenz von i iſt, ſo hat das Product (32) immer daſſelbe Zeichen, als der Factor $F^{(n+1)}(x)-f^{(n+1)}(x)$ und folglich iſt die Ordinate $F(x+i)$ in der Nähe des Berührungspunktes beſtändig größer oder beſtändig kleiner als die Ordinate $f(x+i)$, je nachdem dieſer Factor poſitiv oder negativ iſt, d. h. je nachdem die Größe $F^{(n+1)}(x)$ größer oder kleiner als die Größe $f^{(n+1)}(x)$ iſt. Ferner ſind die Ausdrücke (30) und (32) in der erſten, wie in der zweiten Vorausſetzung für poſitive Werthe von i Größen von demſelben Zeichen und folglich entſpricht die der Ordinaten $f(x)$, $F(x)$, welche jenſeits des Berührungspunktes am größten wird, immer derjenigen der abgeleiteten Functionen $f^{(n+1)}(x)$, $F^{(n+1)}(x)$ welche in demſelben Punkte den größten Werth erhält.

Zuſatz 1. Da die in einem gegebenen Punkte an eine Curve gezogene Tangente im Allgemeinen mit dieſer Curve nur eine Berührung von der erſten Ordnung eingeht, ſo liegt gewöhnlich eine dieſer beiden Linien vor und nach dem Berührungspunkte über der andern. Jedoch können ſie ſich in gewiſſen beſonderen Fällen durchkreuzen und dieſes findet für einen gegebenen Werth von x ſtatt, wenn die aus der Gleichung der Curve abgeleiteten Werthe von:

$$(33) \qquad y'', y''', \text{ etc.}\ldots$$

eine Reihe bilden, in welcher das erſte nicht verſchwindende Glied

einen endlichen Werth behält, und wenn dieſes Glied eine abgeleitete Function von ungerader Ordnung iſt, welche in der Nähe des Berührungspunktes continuirlich bleibt. Denn bezeichnen wir durch n irgend eine gerade ganze Zahl und nehmen an, daß, indem die Gleichungen:

$$(34) \qquad y''=0,\ y'''=0,\ \ldots\ y^{(n)}\neq 0$$

für einen gewiſſen Werth von x erfüllt werden, der correſpondirende Werth von $y^{(n+1)}$ endlich und von Null verſchieden bleibt, und es ſei überdies:

$$(35) \qquad y=a+bx$$

die Gleichung der Tangente. Da aus dieſer Gleichung allgemein:

$$(36) \qquad y'=a,\ y''=0,\ y'''=0,\ \ldots\ y^{(n)}=0,\ y^{(n+1)}=0,\ \text{etc.}$$

folgt, ſo iſt klar, daß man, indem man von der Curve zu der Tangente übergeht, für den Berührungspunkt nicht blos dieſelben Werthe von y und y', ſondern auch von y'', y''', $\ldots y^{(n)}$ erhält, und da bei dieſem Uebergange $y^{(n+1)}$ den Werth verändert, ſo dürfen wir ſchließen, daß zwiſchen der Curve und der Tangente eine Berührung von gerader Ordnung ſtattfindet. Wenn alſo der aus der Gleichung der Curve abgeleitete Werth von $y^{(n+1)}$ in der Nähe des betrachteten Punktes eine ſtetige Function von x iſt, ſo durchſchneiden ſich die Curve und ihre Tangente vermöge des Lehrſatzes 2 gegenſeitig, und alsdann iſt der Berührungspunkt ein Inflexionspunkt der gegebenen Curve.

Zuſatz 2. Da der Krümmungskreis einer Curve in einem gegebenen Punkte mit dieſer Curve im Allgemeinen eine Berührung der zweiten Ordnung eingeht, ſo durchſchneiden ſich dieſe beiden Curven gewöhnlich. Jedoch kann es in gewiſſen beſondern Fällen auch geſchehen, daß die Ordnung der Berührung höher iſt und durch eine ungerade Zahl ausgedrückt wird. Alsdann kann es auch ſein, daß der Krümmungskreis und die Curve ſich nicht gegenſeitig durchſchneiden. Wenn z. B. die gegebene Curve eine Parabel, Ellipſe oder Hyperbel iſt, ſo findet zwiſchen dem Krümmungskreiſe und dieſen Curven eine Berührung der dritten Ordnung ſtatt und beide durchkreuzen ſich nicht, wenn man den Berührungspunkt mit dem Scheitel der Parabel, mit den Endpunkten der Axen der Ellipſe oder mit den Endpunkten der reellen Axe der Hyperbel zuſammenfallen läßt.

Elfte Vorlesung.

Ueber den Gebrauch der Polarcoordinaten zum Ausdrücken und Auffinden verschiedener Eigenschaften ebener Curven.

In den vorhergehenden Vorlesungen haben wir im Allgemeinen vorausgesetzt, daß eine ebene Curve durch eine Gleichung zwischen zwei rechtwinkligen Coordinaten x, y ausgedrückt sei. Aber oft ist es von Nutzen statt dieser Coordinaten die schon in den Vorerinnerungen (Seite 5) angewandten Polarcoordinaten r und p anzuwenden, welche mit den Veränderlichen x und y durch die Gleichungen:

$$x = r\cos p, \quad y = r\sin p \tag{1}$$

verbunden sind. Wir wollen hier einige der Resultate anführen, auf welche man durch diese Substitution geführt wird.

Zunächst wollen wir bemerken, daß die Größe r, durch welche der vom Anfangspunkte oder Pole nach einem beweglichen Punkte gezogene Radiusvector bezeichnet wird, immer als positiv betrachtet werden muß. Was den Winkel p anlangt, welchen dieser Radiusvector mit einer gegebenen Halbaxe bildet, so kann er positiv oder negativ sein und einen größern oder kleinern Zahlenwerth als 2π annehmen, wie auch bereits erwähnt ist (s. Vorer. Seite 6). Der Bequemlichkeit wegen, soll in Zukunft die Halbaxe der positiven x, von welcher aus der Winkel p gezählt wird, die Polarhalbaxe genannt werden.

Hiernach ist klar: 1) daß die Polargleichung jedes Kreises, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte oder Pole liegt, von der Form:

$$r = R \tag{2}$$

ist, wo R eine dem Halbmesser des Kreises gleiche positive Constante ist; 2) daß die Polargleichung einer vom Anfangspunkte ausgehenden Halbaxe von der Form:

$$p = P \tag{3}$$

ist, wo P eine positive oder negative Constante bezeichnet. Die Gleichung (3) drückt auch dieselbe Halbaxe noch aus, wenn die Größe P so zu- oder abnimmt, daß diese Zu- oder Abnahme ein Vielfaches des Kreisumfanges, oder mit andern Worten, das Product aus π und einer geraden Zahl zum Maße hat. Endlich erhält man für die in Rede stehende Halbaxe eine andere, welche nach demselben, oder nach entgegengesetztem Sinne gerichtet ist, wenn die Zu- oder

Abnahme der Größe P das Produkt aus dem halben Kreisumfange π und einer ungeraden Zahl ist.

Wenn eine ebene Curve durch eine Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y ausgedrückt ist, so kann man vermittelst der Formeln (1) für die Veränderlichen x, y unmittelbar die Polarcoordinaten substituiren und auf diese Weise die sogenannte Polargleichung der Curve erhalten. Wenn man z. B. die rechtwinkligen Coordinaten eines festen Punktes mit ξ, η und mit R, P die Polarcoordinaten desselben bezeichnet, welche mit den ersten durch die Gleichungen:

$$(4) \qquad \xi = R\cos P, \quad \eta = R\sin P$$

verbunden sind; so sieht man leicht ein, daß die Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten der durch diesen Punkt so gezogenen Geraden, daß sie mit der Halbaxe der positiven x den Winkel ψ bildet, folgende ist:

$$(5) \qquad \frac{y-\eta}{x-\xi} = tang\,\psi, \text{ oder } \frac{x-\xi}{\cos\psi} = \frac{y-\eta}{\sin\psi},$$

und ihre Polargleichung:

$$(6) \qquad \frac{r\cos p - R\cos P}{\cos\psi} = \frac{r\sin p - R\sin P}{\sin\psi},$$

oder was dasselbe ist:

$$(7) \qquad r\sin(p-\psi) = R\sin(P-\psi).$$

Wenn die Länge R verschwindet, so geht die Gerade durch den Anfangspunkt und ihre Polargleichung verwandelt sich in:

$$(8) \qquad \sin(p-\psi) = 0.$$

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet, wenn man für n irgend eine ganze Zahl nimmt, und

$$p = \psi \pm 2n\pi \text{ oder } p = \psi \pm (2n+1)\pi$$

setzt. Jede dieser beiden letzten Gleichungen ist der Gleichung (3) ähnlich und drückt eine der beiden Halbaxen aus, welche nach derselben Geraden, aber nach entgegengesetztem Sinne gerichtet sind und vom Anfangspunkte ausgehen.

Man kann in der Gleichung (7) für den Winkel $p-\psi$ den Winkel $p-P$ leicht substituiren: denn es ist:

$$p-\psi = (p-P)+(P-\psi),$$

und folglich:

$$\sin(p-\psi) = \sin(p-P)\cos(P-\psi) + \sin(P-\psi)\cos(P-p).$$

Nun folgt aber mit Berücksichtigung dieser letzten Formel aus der Gleichung (7):

(9) $$\frac{r\cos(p-P)-R}{\cos(\psi-P)}=\frac{r\sin(p-P)}{\sin(\psi-P)},$$

oder:

(10) $$\frac{r\cos(p-P)-R}{r\sin(p-P)}=\cot(\psi-P).$$

Um übrigens die Gleichung (9) unmittelbar aus der Gleichung (6) abzuleiten, braucht man nur zu bemerken, daß man für die drei Winkel p, P und φ, welche drei gegebene Richtungen mit der Polarhalbare bilden, die drei Winkel $p-P$, 0 und $\psi-P$, welche dieselben Richtungen mit der Halbare bilden, deren Gleichung $p=P$ ist, substituiren kann.

Wenn man aus dem Punkte (ξ, η) als Mittelpunkt mit dem Halbmesser ϱ einen Kreis beschreibt, dessen Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten:

(11) $$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\varrho^2$$

ist, so ist seine Polargleichung offenbar:

$$(r\cos p-R\cos P)^2+(r\sin p-R\sin P)^2=\varrho^2,$$

oder:

(12) $$r^2-2Rr\cos(p-P)+R^2=\varrho^2.$$

In dem besonderen Falle, wo der Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte zusammenfällt, reducirt sich R auf Null und die Gleichung (12) verwandelt sich in:

$$r^2=\varrho^2, \text{ oder } r=\varrho,$$

d. h. sie nimmt die Form der Gleichung (2) wieder an.

Auch kann man sich leicht überzeugen, daß die beiden Parabeln, die Ellipse oder Hyperbel, welche resp. durch die drei Gleichungen zwischen rechtwinkligen Coordinaten:

(13) $y^2=2ax$, (14) $y^2=-2ax$,

(15) $$Ax^2+2Bxy+Cy^2=K$$

ausgedrückt werden, folgende Polargleichungen haben:

(16) $r=\frac{2a\cos p}{\sin^2 p}$, (17) $r=-\frac{2a\cos p}{\sin^2 p}$,

(18) $$r^2=\frac{K}{A\cos^2 p+2B\sin p\cos p+C\sin^2 p}$$
$$=\frac{2K}{A+C+2B\sin 2p+(A-C)\cos 2p}.$$

Wenn sich die Formel (15) auf eine der folgenden:

(19) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, (20) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

reducirt, so verwandelt sich die Gleichung (18) in:

$$(21) \qquad r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 p + b^2 \cos^2 p},$$

oder:

$$(22) \qquad r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 p - a^2 \sin^2 p}.$$

Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß die Constanten a, b positiv sind und daß $a > b$ ist, so drückt die Constante a in den Parabeln (12) und (14) die doppelte Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel, in der Ellipse (19) die halbe große Axe und in der Hyperbel (20) die halbe reelle Axe aus. Verlegt man nun den Anfangspunkt in den Brennpunkt der Parabel (14) und setzt $\frac{a}{2} = R$, so nimmt die Gleichung dieser Parabel zwischen rechtwinklichen Coordinaten die Form:

$$(23) \qquad y^2 = -4R(x - R), \text{ oder } x^2 + y^2 = (2R - x)^2$$

an, und hieraus folgt, daß, wenn man erwägt, daß die Größe:

$$R - x = \frac{y^2}{4R}$$

und umsomehr die Größe $2R - x$ immer positiv bleiben muß,

$$(24) \qquad \sqrt{(x^2 + y^2)} = 2R - x,$$

oder:

$$x + \sqrt{(x^2 + y^2)} = 2R$$

ist. Substituirt man nun die Polarcoordinaten für die Veränderlichen x, y, so erhält man für die Polargleichung der Parabel:

$$(25) \qquad r + r\cos p = 2R, \text{ oder } r = \frac{2R}{1 + \cos p}.$$

Verrichtet man dieselbe Substitution in die Formel (23), so ergibt sich daraus:

$$(26) \quad \begin{cases} r^2 = (2R - r\cos p)^2, \\ \text{oder:} \\ [r(1 + \cos p) - 2R][r(1 - \cos p) + 2R] = 0. \end{cases}$$

Da ferner die Größen r, R nothwendig positiv sind, und da die Größe $1 - \cos p$ positiv oder Null ist, so ist klar, daß der Factor:

$$r(1 - \cos p) + 2R$$

immer einen endlichen von Null verschiedenen Werth hat. Man kann also diesen Factor in der Formel (26) hinweglassen, welche dadurch offenbar auf die Gleichung (25) zurückgeführt wird.

In einer Ellipse oder Hyperbel nennt man das Verhältniß zwischen der Entfernung eines Brennpunktes vom Mittelpunkte und der

halben großen oder reellen Axe die Excentricität. Es sei ε dieses Verhältniß, so ist die Entfernung des Mittelpunktes von einem der Brennpunkte für die Ellipse (19):

$$a\varepsilon = \sqrt{(a^2 - b^2)}, \tag{27}$$

und für die Hyperbel (20):

$$a\varepsilon = \sqrt{(a^2 + b^2)}. \tag{28}$$

Verlegt man nun den Anfangspunkt der Coordinaten für die Ellipse in den auf der Seite der positiven x liegenden Brennpunkt und für die Hyperbel in den auf der Seite der negativen x liegenden, so erscheinen die Gleichungen dieser Curven zwischen rechtwinkligen Coordinaten unter den Formen:

$$\frac{(x + a\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{(x - a\varepsilon)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Wenn man in diese letzten Gleichungen für b seinen aus den Gleichungen (27) und (28) abgeleiteten Werth substituirt, so verwandeln sie sich resp. in:

$$y^2 = (1 - \varepsilon^2)\,[a^2 - (x + a\varepsilon)^2],$$

und

$$y^2 = (\varepsilon^2 - 1)\,[(x - a\varepsilon)^2 - a^2],$$

oder:

$$x^2 + y^2 = [a(1 - \varepsilon^2) - \varepsilon x]^2 \tag{29}$$

und

$$x^2 + y^2 = [a(\varepsilon^2 - 1) - \varepsilon x]^2. \tag{30}$$

Endlich, wenn man in den Gleichungen (29) und (30) statt der rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten setzt, so erhält man für die Polargleichung der Ellipse:

$$[r - a(1 - \varepsilon^2) + \varepsilon r\cos p] \times [r + a(1 - \varepsilon^2) + \varepsilon r\cos p] = 0, \tag{31}$$

und für die der Hyperbel:

$$[r - a(\varepsilon^2 - 1) + \varepsilon r\cos p] \times [r + a(\varepsilon^2 - 1) - \varepsilon r\cos p] = 0. \tag{32}$$

Da in der Formel (31) die Zahl $\varepsilon = \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}$ kleiner ist als die Einheit, so hat der Factor:

$$r + a(1 - \varepsilon^2) - \varepsilon r\cos p = r(1 - \varepsilon\cos p) + a(1 - \varepsilon^2)$$

immer einen positiven, von Null verschiedenen Werth. Man kann

denselben also hinweggelassen und die Polargleichung der Ellipse auf die Form:

$$(33)\quad \begin{cases} r(1+\varepsilon\cos p) - a(1-\varepsilon^2) = 0, \\ \text{oder:} \\ r = \dfrac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos p}, \end{cases}$$

reduciren. Wenn man in dieser letzten Gleichung successive:

$$p = 0, \quad p = \pi$$

setzt, so ergibt sich daraus:

$$r = a(1-\varepsilon), \quad r = a(1+\varepsilon).$$

Diese beiden Werthe, deren Summe $= 2a$ ist, drücken die Entfernungen des zum Anfangspunkte genommenen Brennpunktes von den beiden Endpunkten der großen Axe aus. Was die Gleichung (32) anlangt, in welcher die Zahl $\varepsilon = \sqrt{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}$ offenbar größer als die Einheit ist, so läßt sie sich in zwei andere, nämlich:

$$(34)\quad \begin{cases} r(1+\varepsilon\cos p) - a(\varepsilon^2-1) = 0, \\ \text{oder:} \\ r = \dfrac{a(\varepsilon^2-1)}{1+\varepsilon\cos p}, \end{cases}$$

und:

$$(35)\quad \begin{cases} r(1-\varepsilon\cos p) + a(\varepsilon^2-1) = 0, \\ \text{oder:} \\ r = \dfrac{a(\varepsilon^2-1)}{\varepsilon\cos p - 1}, \end{cases}$$

zerlegen. Nun kann man sich aber leicht überzeugen, daß jede dieser letztern nur einen der beiden Zweige der Hyperbel ausdrückt und zwar daß die Gleichung (34), aus welcher:

$$r = a(\varepsilon-1) \text{ für } p = 0$$

und

$$r = \infty \text{ für } p = \pm arc\cos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

folgt, dem Zweige angehört, dessen Brennpunkt mit dem Anfangspunkte der Coördinaten zusammenfällt, während die Gleichung (35), aus welcher:

$$r = a(\varepsilon+1), \text{ für } p = 0$$

und

$$r = \infty \text{ für } p = \pm arc\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

folgt, dem anderen Zweige angehört. Die beiden Werthe von p, welchen in jedem Zweige unendliche Werthe von r entsprechen, geben die Richtungen zweier Halbaren an, welche Asymptoten dieses Zweiges bilden. Was die beiden Längen

$$r' = a(\varepsilon + 1), \quad r = a(\varepsilon - 1)$$

anlangt, deren Differenz $= 2a$ ist, so drücken sie die Entfernungen des zum Anfangspunkte genommenen Brennpunktes von den beiden Endpunkten der reellen Axe der Hyperbel aus.

Durch geometrische Betrachtungen könnte man die meisten der vorhergehenden Formeln direct aufstellen, wenn man die bekannten Eigenschaften der Linien, welche diese Formeln ausdrücken, mittelst Polarcoördinaten ausdrückte. Bezeichnen z. B. P, R die Polarcoordinaten eines festen Punktes und ψ einen beliebigen positiven oder negativen Winkel, so läßt sich leicht die Polargleichung der durch den Punkt (P, R) parallel zu der durch die Gleichung:

$$(36) \qquad p = \psi$$

ausgedrückten Geraden gezogenen Geraden finden. Denn wenn man nach einem beliebigen Punkte der Geraden einen Radiusvector r zieht, und den spitzen oder stumpfen Winkel, welchen dieser unbestimmt verlängerte Radiusvector mit der Halbaxe (36) bildet, mit δ bezeichnet; so wird der Werth von p, welcher dem in Rede stehenden Radiusvector entspricht, offenbar durch eine der Formeln:

$$(37) \qquad p = \psi + \delta, \quad p = \psi + \delta \pm 2n\pi,$$

oder:

$$(38) \qquad p = \psi - \delta, \quad p = \psi - \delta \pm 2n\pi$$

gegeben, wo n eine beliebige ganze Zahl ist. Zu bemerken ist ferner, daß die Formeln (37) genommen werden müssen, wenn der um den Anfangspunkt bewegliche Radiusvector, indem er von der Lage, in welcher er mit der Halbaxe (36) zusammenfällt, ausgeht, zur Beschreibung des Winkels δ eine directe Rotationsbewegung annehmen muß, während die Formeln (38) im entgegengesetzten Falle angewandt werden müssen. Projicirt man nun den Radiusvector r auf eine, auf der gegebenen Geraden senkrechte Axe, so erhält man die kürzeste Entfernung des Anfangspunktes von dieser Geraden zur Projection, und diese kürzeste Entfernung wird durch das Product:

$$r \sin \delta$$

ausgedrückt, welches sich vermöge der Formeln (37) auf:

$$r \sin (p - \psi),$$

und vermöge der Formeln (38) auf:

$$r \sin (\psi - p)$$

reducirt. Da nun die in Rede stehende kürzeste Entfernung offenbar von den veränderlichen Coordinaten r und p unabhängig ist, so sind wir zu dem Schlusse berechtigt, daß das Product $r \sin (p - \psi)$ oder: $r \sin (\psi - p)$ nicht geändert wird, wenn man darin P für p und R für r setzt. Man hat also die Gleichungen:

$$r \sin(p - \psi) = R \sin(P - \psi),$$

oder: $$r \sin(\psi - p) = R \sin(\psi - P),$$

wovon jede mit der Gleichung (7) übereinkommt.

Wir wollen nun die Polargleichung des aus dem Punkte (P, R) als Mittelpunkt mit dem Halbmesser ϱ beschriebenen Kreises suchen. Wenn man die Coordinaten eines beliebigen Punktes des Kreisumfanges mit p, r und den Winkel zwischen den beiden Radienvectoren r, R mit δ bezeichnet, so hat man:

$$p = P \pm \delta, \text{ oder } p = P \pm \delta \pm 2n\pi,$$

und folglich:

$$\pm \delta = p - P \mp 2n\pi, \tag{39}$$

wo n eine ganze Zahl bezeichnet, welche sich auch auf Null reduciren kann. Da ferner in dem Dreiecke, dessen Seiten r, R und ϱ sind, der Winkel δ dem Radius ϱ gegenüberliegt, so hat man nach einem bekannten Lehrsatze der Trigonometrie:

$$\cos\delta = \frac{R^2 + r^2 - \varrho^2}{2Rr}, \tag{40}$$

und wenn man für δ seinen Werth $p - P \mp 2n\pi$ setzt, so erhält man die Gleichung:

$$\cos(p - P) = \frac{R^2 + r^2 - \varrho^2}{2Rr}, \tag{41}$$

welche mit der Gleichung (12) übereinstimmt.

Suchen wir noch die Polargleichung einer Parabel, deren Scheitel mit dem Punkte (P, R) und deren Brennpunkt mit dem Anfangspunkte zusammenfällt. Wenn man die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Curve mit p, r und den Winkel zwischen den Radienvectoren r, R mit δ bezeichnet, so behält die Formel (39) ihre Richtigkeit. Ferner hat die Projection des Radiusvectors r auf die Axe der Parabel den Zahlenwerth des Productes:

$$r \cos\delta = r \cos(p - P)$$

zum Maße und da die Entfernung des Brennpunktes von der Richtlinie (Directrix) $= 2R$ ist; so ist die Entfernung des Punktes (p, r) von der Richtlinie offenbar

$$= 2R + r\cos(p - P).$$

Aber nach der bekannten Eigenschaft der Parabel muß diese Entfernung auch dem Radiusvector r gleich sein. Man hat also:

$$(42)\quad \begin{cases} r = 2R + r\cos(p - P), \\ \text{oder } r = \dfrac{2R}{1 + \cos(p - P)}. \end{cases}$$

Soll diese letzte Gleichung mit der Gleichung (25) übereinstimmen, so braucht man zur Polarhalbare nur die zu nehmen, welche vom Brennpunkte der Parabel gegen den Scheitel dieser Curve gerichtet ist, und folglich nur $P = 0$ zu setzen.

Mit derselben Leichtigkeit ergibt sich die Polargleichung einer Ellipse, wovon ein Brennpunkt mit dem Anfangspunkte und ein Endpunkt der großen Axe mit dem Punkte (P, R) zusammenfällt. Denn es seien p, r wieder die Polarcoordinaten eines beliebigen Punktes der Curve und δ der Winkel zwischen den Radienvectoren r und R, außerdem a die halbe große Axe und ε die Excentricität; so ist in dem Dreiecke, dessen drei Winkelspitzen die beiden Brennpunkte und der Punkt (p, r) sind, eine der Seiten, nämlich die Entfernung der Brennpunkte, dem Producte aus der großen Axe und der Excentricität oder der Größe $2a\varepsilon$ gleich und die beiden andern Seiten, deren Summe nach einer bekannten Eigenschaft der Ellipse der großen Axe gleich sein muß, werden durch r und $2a - r$ ausgedrückt. In demselben Dreiecke ist ferner der der Seite $2a - r$ gegenüberliegende Winkel $= \delta$, wenn der Punkt (P, R) mit dem vom Anfangspunkte am weitesten entfernten Endpunkte der großen Axe zusammenfällt und gleich dem Supplemente des Winkels δ, d. h. $\pi - \delta$, im entgegengesetzten Falle. Wenn man, um die Begriffe zu fixiren, die zweite Voraussetzung macht, so findet man:

$$(43)\quad \begin{cases} \cos(\pi - \delta) = \dfrac{r^2 + (2a\varepsilon)^2 - (2a - r)^2}{2(2a\varepsilon)r} \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{a(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon r}, \end{cases}$$

oder:

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos\delta},$$

und wenn man für δ seinen aus der Gleichung (39) abgeleiteten Werth substituirt:

$$(44)\qquad r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos(p - P)}.$$

Diese letzte Gleichung enthält nebst dem constanten Winkel P noch zwei andere Constanten a, ε, wovon die eine durch den Radiusvector $R = a(1 - \varepsilon)$ ersetzt werden kann. Ferner wollen wir bemerken, daß die Gleichung (44) auf die Gleichung (33) zurückgeführt wird, wenn man zur Polarhalbare diejenige nimmt, welche von dem Anfangspunkte gegen den nächsten Endpunkt der großen Axe der Ellipse gerichtet ist und wenn man folglich $P = 0$ setzt.

Endlich wollen wir einen Hyperbelzweig betrachten, dessen Brennpunkt mit dem Anfangspunkte und dessen Scheitel mit dem Punkte (P, R) zusammenfällt. Es seien p, r die Coordinaten eines beliebigen Punktes dieses Hyperbelzweiges, δ der Winkel zwischen den Radienvectoren r, R, ferner $2a$ die reelle Axe der Hyperbel und ε die Excentricität derselben; so ist in dem Dreiecke, dessen drei Winkelspitzen in den beiden Brennpunkten und dem Punkte (p, r) liegen, eine der Seiten, nämlich die gegenseitige Entfernung der beiden Brennpunkte, dem Producte $2a\varepsilon$ gleich, und die beiden andern Seiten, deren Differenz der reellen Axe der Hyperbel gleich sein muß, werden resp. durch r und $2a+r$ ausgedrückt. Ferner ist in diesem Dreiecke der der Seite $2a+r$ gegenüberliegende Winkel genau gleich dem Winkel δ. Man hat also:

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\delta &= \frac{r^2+(2a\varepsilon)^2-(2a+r)^2}{2(2a\varepsilon)r} \\ &= \frac{a(\varepsilon^2-1)}{\varepsilon r}-\frac{1}{\varepsilon}, \end{aligned}\right.$$

oder:

$$r=\frac{a(\varepsilon^2-1)}{1+\varepsilon\cos\delta},$$

und wenn man für δ seinen aus der Gleichung (39) gezogenen Werth substituirt, so findet man:

$$(46)\qquad r=\frac{a(\varepsilon^2-1)}{1+\varepsilon\cos(p-P)}.$$

In dieser letzten Gleichung könnte man für eine der Constanten a, ε den Radiusvector $R=a(\varepsilon-1)$ setzen. Ferner wollen wir bemerken, daß die Gleichung (46) auf die Gleichung (31) zurückgeführt wird, wenn man zur Polarhalbare diejenige nimmt, welche vom Anfangspunkte gegen den Scheitel des betrachteten Hyperbelzweiges gerichtet ist, und wenn man folglich $P=0$ setzt.

Wenn man den Anfangspunkt nicht in den Brennpunkt des Hyperbelzweiges verlegte, dessen Polargleichung verlangt wird, sondern in den Brennpunkt des andern Hyperbelzweiges, so müßte man in der Gleichung (46) offenbar $r-2a$ für $2a+r$ setzen. Man hätte folglich alsdann:

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\delta &= \frac{r^2+(2a\varepsilon)^2-(r-2a)^2}{2(2a\varepsilon)r} \\ &= \frac{a(\varepsilon^2-1)}{\varepsilon r}+\frac{1}{\varepsilon}, \end{aligned}\right.$$

oder:

$$r=\frac{a(\varepsilon^2-1)}{\varepsilon\cos\delta-1},$$

und folglich:

$$(48)\qquad r=\frac{a(\varepsilon^2-1)}{\varepsilon\cos(p-P)-1}.$$

Wenn man in dieser letzten Formel die Constante P auf Null reducirt, so erhält man die Gleichung (35) wieder.

Der Polarcoordinaten kann man sich nicht blos zum Ausdrücken, sondern auch zum Auffinden der verschiedenen Eigenschaften ebener Curven und zur Bestimmung ihrer Mittelpunkte, ihrer Axen, ihrer Durchmesser, ihrer singulären Punkte, u. s. w. mit Vortheil bedienen. Gesetzt z. B. man suchte die beiden Axen oder die reelle Axe der durch die Gleichung (18) ausgedrückte Ellipse oder Hyperbel, so ist es zu diesem Zwecke offenbar hinreichend, den grösten oder kleinsten Werth des Radiusvectors r doppelt zu nehmen. Ferner ist einleuchtend, daß dieser grösste oder kleinste Werth dem kleinsten oder grösten Werthe des Ausdruckes

$$2B\sin 2p + (A - C)\cos 2p \tag{49}$$

und folglich dem durch die Gleichung:

$$\left\{\begin{array}{l} 2B\cos 2p - (A-C)\sin 2p = 0, \\ \text{oder } tang\, 2p = \dfrac{2B}{A-C} \end{array}\right. \tag{50}$$

bestimmten Werthe von p entspricht, welchen man erhält, wenn man die abgeleitete Function des Ausdruckes (49) gleich Null setzt. Nun wird aber der Gleichung (50) genügt, wenn man

$$p = \tfrac{1}{2}\, arc\, tang \frac{2B}{A-C} \pm n\pi, \tag{51}$$

oder:

$$p = \tfrac{1}{2}\, arc\, tang \frac{2B}{A-C} \pm \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\pi \tag{52}$$

nimmt, wo n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet.

Diese beiden letzten Gleichungen, welche der Gleichung (3) ähnlich sind, drücken zwei Gerade aus, welche sich unter rechten Winkeln schneiden und mit den gesuchten Axen der betrachteten Curve zusammenfallen. Ferner wollen wir bemerken, daß aus der Gleichung (50)

$$\frac{\sin 2p}{2B} = \frac{\cos 2p}{A-C} = \pm\frac{1}{\sqrt{[4B^2 + (A-C)^2]}} = \frac{2B\sin 2p + (A-C)\cos 2p}{4B^2 + (A-C)^2}$$

folgt, und daß mithin der grösste oder kleinste Werth des Ausdruckes (49) gleich

$$\pm\sqrt{[4B^2 + (A-C)^2]} \tag{53}$$

ist.

Zu diesem Schlusse würde man auch gelangen, wenn man von der Gleichung:

$$[2B\sin 2p + (A-C)\cos 2p]^2$$
$$+ [2B\cos 2p - (A-C)\sin 2p]^2$$
$$= 4B^2 + (A-C)^2$$

ausginge, aus welcher folgt, daß der Zahlwerth des Ausdruckes (49) immer kleiner iſt, als die Quadratwurzel aus der Summe $4B^2 + (A-C)^2$, wenn die Differenz $2B\cos 2p - (A-C)\sin 2p$ einen von Null verſchiedenen Werth hat, und dieſer Quadratwurzel gleich wird, wenn dieſe Differenz verſchwindet. Subſtituirt man nun ſtatt des Ausdruckes (49) ſeinen kleinſten Werth $-\sqrt{[4B^2 + (A-C)^2]}$ und ſeinen größten Werth $+\sqrt{[4B^2 + (A-C)^2]}$ ſucceſſive in die Formel (18), ſo erhält man die beiden Gleichungen:

$$(54) \qquad r^2 = \frac{2K}{A + C - \sqrt{[4B^2 + (A-C)^2]}},$$

$$(55) \qquad r^2 = \frac{2K}{A + C + \sqrt{[4B^2 + (A-C)^2]}}.$$

Man kann ſich leicht überzeugen, daß die vorhergehenden Werthe von r^2 die beiden Wurzeln der bereits in der Differenzialr. Seite 243 erhaltenen Gleichung:

$$\left(\frac{K}{r^2} - A\right)\left(\frac{K}{r^2} - C\right) = B^2$$

ſind. Da ihr Product, nämlich:

$$\frac{K^2}{AC - B^2}$$

immer daſſelbe Zeichen hat, als die Differenz $AC - B^2$, ſo iſt klar, daß ſie beide poſitiv ſind, wenn, indem $AC - B^2$ poſitiv iſt, A, C und K Größen von demſelben Zeichen ſind, und alsdann geben die größten und kleinſten Werthe von r^2 zwei reelle größte und kleinſte Werthe des Radiusvectors r. Dagegen bleibt nur einer der beiden Werthe von r^2 poſitiv und der correſpondirende Werth von r allein reell, wenn $AC - B^2$ negativ wird. In der That findet bei der Ellipſe, welche zwei reelle Axen hat, bekanntlich die Bedingung $AC - B^2 > 0$ und bei der Hyperbel, welche nur eine reelle Axe hat, die Bedingung $AC - B^2 < 0$ ſtatt.

Von den Curven, deren verſchiedene Eigenſchaften leichter erkannt werden können, wenn man Polarcoordinaten anwendet, wollen wir noch die Spiralen anführen, welche gewöhnlich eine große Anzahl und oft ſogar unendlich viele Windungen um den Anfangspunkt machen, indem ſich dieſe Windungen dieſem Anfangspunkte immer mehr nähern, oder ſich immer weiter davon entfernen. Die Spiralen, welche beſonders die Aufmerkſamkeit der Geometer auf ſich gezogen haben, ſind die archimediſche, die hyperboliſche und die logarithmiſche Spirale.

In der archimediſchen Spirale, wächſt der Radiusvector r dem Winkel p proportional. Ihre Polargleichung iſt folglich:

(56) $$r = ap,$$

wo a eine constante Größe bezeichnet. Wenn diese Constante positiv ist, so kann man p nur positive Werthe beilegen, weil r niemals negativ werden darf. Wenn man in dieser Voraussetzung durch R den $p = 2\pi$ entsprechenden Werth von r bezeichnet, so hat man:

$$R = 2a\pi,$$

und wenn man den Winkel p von Null bis ins positive Unendliche wachsen läßt, so variirt der Radiusvector r zwischen denselben Grenzen. Man kann sich also vorstellen, daß die Curve durch einen beweglichen Punkt beschrieben wird, welcher vom Anfangspunkte der Coordinaten ausgeht, sich mit einer directen Rotationsbewegung um diesen Anfangspunkt unendlich viele Male bewegt und sich fortwährend davon entfernt. Wenn man für die Constante a den Radiusvector R in die Gleichung (56) substituirt, so verwandelt sie sich in:

(57) $$r = R\frac{p}{2\pi},$$

und wenn man mit Archimedes den Radiusvector R zur Längeneinheit nimmt, so hat man blos:

(58) $$r = \frac{p}{2\pi}.$$

Die hyperbolische Spirale ist diejenige, deren Polargleichung man erhält, wenn man in der Gleichung $xy = a$, welche zwischen rechtwinkligen Coordinaten eine auf ihre Asymptoten bezogene gleichseitige Hyperbel ausdrückt, für die rechtwinkligen Coordinaten x und y die Polarcoordinaten r und p substituirt. Diese Spirale wird also durch die Gleichung:

(59) $$rp = a, \text{ oder } r = \frac{a}{p}$$

ausgedrückt. Wenn die Constante a positiv angenommen wird, so muß es p ebenfalls sein, und wenn man p zwischen den Grenzen 0, ∞ variiren läßt, so variirt r zwischen den Grenzen ∞, 0, so daß man

$$r = \infty \text{ für } p = 0,$$

und

$$r = 0 \text{ für } p = \infty$$

hat. Die Curve kann also als durch einen beweglichen Punkt beschrieben angesehen werden, welcher sich unendlich viele Male mit einer directen Rotationsbewegung um den Anfangspunkt bewegt, indem er von einer Lage ausgeht, worin er unendlich weit von diesem Anfangspunkte entfernt ist und sich demselben ohne Ende nähert, ohne ihn jemals erreichen zu können, weil r nur dann verschwinden kann, wenn die Anzahl der Umdrehungen unendlich groß wird. Noch wollen wir bemerken, daß die hyperbolische Spirale die zu der

Axe der x parallele Gerade, deren Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten:

$$y = a \tag{60}$$

ist, zur Asymptote hat, denn aus der Gleichung (59) in Verbindung mit der zweiten der Gleichungen (1) folgt:

$$y = a \frac{\sin p}{p} \tag{61}$$

und folglich $y = a$ für $p = 0$, welchem letztern Werthe, wie bereits bemerkt worden, ein unendlicher Werth von r entspricht.

Die logarithmische Spirale ist diejenige, in welcher der Winkel p dem Logarithmus des Radiusvectors r gleich ist. Wenn die Logarithmen in dem Systeme von der Basis A genommen und durch das Zeichen L angedeutet werden, so erhält man, wenn man

$$L(e) = \frac{1}{l(A)}$$

setzt, als Polargleichung der logarithmischen Spirale:

$$p = L(r) = a\, l(r), \tag{62}$$

oder:

$$r = e^{\frac{p}{a}}$$

Wenn die Zahl A größer ist als die Einheit, so ist die Constante a positiv. Während alsdann p zwischen den Grenzen:

$$p = -\infty \; ; \; p = \infty$$

variirt, ist r immer positiv und variirt zwischen den Grenzen:

$$r = 0, \; r = \infty .$$

Ferner ist $r = 1$ für $p = 0$. Demnach kann man die logarithmische Spirale offenbar als von einem beweglichen Punkte beschrieben ansehen, welcher zuerst auf der Polarhalbaxe in der Entfernung $= 1$ vom Anfangspunkte liegt und sich dann mit einer directen oder retrograden Rotationsbewegung um diesen Anfangspunkt unendlich viele Male so dreht, daß er sich im ersten Falle ohne Ende davon entfernt und im zweiten Falle sich beständig demselben nähert, ohne ihn aber jemals erreichen zu können.

Wenn eine ebene Curve durch eine Gleichung zwischen Polarcoordinaten ausgedrückt ist, und man will sie so um den Anfangspunkt drehen, daß jeder Radiusvector einen Winkel $= P$ beschreibt, so braucht man offenbar nur für die Polarcoordinate p den Werth $p - P$ zu setzen, wo die Größe P einen positiven Werth haben muß, wenn die Rotationsbewegung direct ist und einen negativen Werth im entgegengesetzten Falle. Verfährt man auf diese Weise mit der Gleichung (62), so erhält man die Gleichung:

(63) $$r = e^{\frac{p-P}{a}}$$

welche die logarithmiſche Spirale in einer neuen Lage ausdrückt. Bezeichnet man alsdann mit R den $p = 0$ correſpondirenden Radiusvector, ſo hat man:

(64) $$R = e^{-\frac{P}{a}}$$

und die Gleichung (63) kann auf die Form:

(65) $$r = R\, e^{\frac{p}{a}}, \text{ oder } p = a\,[l(r) - l(R)]$$

gebracht werden. Wenn man in dieſer letzten Gleichung für die Coordinaten r und p ihre aus den Gleichungen (1) abgeleiteten Werthe in x und y, nämlich:

(66) $$p = arc\,tang\left(\left(\frac{y}{x}\right)\right),\ r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

ſubſtituirt, ſo findet man genau die Gleichung (47) der erſten Vorleſung, d. h. die Gleichung der logarithmiſchen Spirale zwiſchen rechtwinkligen Coordinaten wieder.

Zwölfte Vorlesung.

Anwendung der Polarcoordinaten zur Bestimmung der Neigung, des Bogens, des Krümmungshalbmessers, u. s. f. einer ebenen Curve.

Wenn man in den Formeln, welche die Neigung, den Bogen oder den Krümmungshalbmesser einer ebenen Curve bestimmen, für die rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten substituiren will, so braucht man nur die Gleichungen:

$$(1) \qquad x = r\cos p,\ y = r\sin p$$

anzuwenden, und alsdann verwandelt sich z. B. die Formel:

$$(2) \qquad tang\,\psi = \frac{dy}{dx},$$

welche wir in der ersten Vorlesung abgeleitet haben und für den Winkel ψ unendlich viele Zahlenwerthe gibt, wovon der kleinste die Neigung der Curve ist, vermöge der Gleichungen (1) in:

$$(3) \qquad tang\,\psi = \frac{\sin p\,dr + r\cos p\,dp}{\cos p\,dr - r\sin p\,dp} = \frac{tang\,p + \frac{r\,dp}{dr}}{1 - tang\,p\,\frac{r\,dp}{dr}}$$

und hieraus ergibt sich:

$$\frac{r\,dp}{dr} = \frac{tang\,\psi - tang\,p}{1 + tang\,\psi\,tang\,p} = tang\,(\psi - p);$$

oder:

$$(4) \qquad cot\,(\psi - p) = \frac{dr}{r\,dp}.$$

Man könnte übrigens die Formel (4) auch direct ableiten; denn da vermöge der Gleichungen (1) und (2)

$$\frac{\cos p}{x} = \frac{\sin p}{y}, \quad \frac{\cos \psi}{dx} = \frac{\sin \psi}{dy}$$

ist, so ergibt sich daraus:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \cot(\psi - p) &= \frac{\cos(\psi - p)}{\sin(\psi - p)} \\ &= \frac{\cos p \cos \psi + \sin p \sin \psi}{\sin p \cos \psi - \cos p \sin \psi} \\ &= \frac{x\,dx + y\,dy}{x\,dy - y\,dx} \end{aligned} \right.$$

Ueberdies folgt aus den Gleichungen (1):

$$(6) \quad r^2 = x^2 + y^2, \qquad p = arc\ tang\left(\left(\frac{y}{x}\right)\right),$$

und folglich:

$$2r\,dr = 2x\,dx + 2y\,dy,$$

$$dp = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{r^2},$$

oder was dasselbe ist:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} r\,dr &= x\,dx + y\,dy, \\ r^2\,dp &= x\,dy - y\,dx. \end{aligned} \right.$$

Hieraus folgt, daß der letzte Theil der Gleichung (5) auf

$$\frac{r\,dr}{r^2\,dp} = \frac{dr}{r\,dp}$$

und diese Gleichung selbst auf die Gleichung (4) reducirt werden kann.

Zu der Gleichung (4) könnte man auch sehr leicht gelangen, wenn man sich auf die in der neunten Vorlesung aufgestellten Sätze stützte; denn in der vorhergehenden Vorlesung haben wir gesehen, daß die Polargleichung einer Geraden, deren veränderliche Coordinaten r und p sind, von der Form:

$$(8) \quad r \sin(p - \psi) = R \sin(P - \psi) = Const.$$

ist, und damit diese Gerade eine ebene Curve in einem gegebenen Punkte berührt, müssen die Werthe der Größen:

$$p, r \text{ und } \frac{dr}{dp}$$

für diesen Punkt bei dem Uebergange von der Geraden zur Curve ungeändert bleiben. Differenzirt man nun aber die Gleichung (8), so erhält man die folgende

$$(9) \qquad \sin(p-\psi)\,dr + \cos(p-\psi)\,r\,dp = 0,$$

welche mit der Gleichung (4) übereinstimmt. Folglich muß diese letzte Gleichung für den Berührungspunkt durch die aus der Gleichung der Curve abgeleiteten Werthe von r und $\frac{dr}{dp}$ verificirt werden.

In dem Falle, wo man p zur unabhängigen Veränderlichen nimmt und durch:

$$r', r'', r''', \text{etc.} \ldots$$

die successiven abgeleiteten Functionen von r in Beziehung auf p, nämlich:

$$\frac{dr}{dp}, \frac{d^2 r}{dp^2}, \frac{d^3 r}{dp^3}, \text{etc.} \ldots$$

bezeichnet, reducirt sich die Gleichung (4) auf:

$$(10) \qquad \cot(\psi - p) = \frac{r'}{r}.$$

Ist die Gleichung (4) oder (10) einmal erhalten, so lassen sich leicht die Polargleichungen der Tangente und Normale einer ebenen Curve für einen gegebenen Punkt finden. Gesetzt z. B. p, r bezeichnen wieder die Polarcoordinaten des Berührungspunktes und P, R die veränderlichen Coordinaten der Tangente, so ist die Polargleichung dieser Geraden:

$$(11) \qquad R \sin(P-\psi) = r \sin(p-\psi),$$

wofern man den Winkel ψ durch die Gleichung (4) oder (10) bestimmt. Schließt man nun aber, wie bei der Ableitung der Gleichung (10) in Vorles. 11, so ergibt sich, daß die Gleichung (11) folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

$$(12) \qquad \frac{R\cos(P-p) - r}{R\sin(P-p)} = \cot(\psi - p).$$

Wenn man also für $\cot(\psi - p)$ seinen Werth setzt, so erhält man endlich:

$$(13) \qquad \frac{R\cos(P-p) - r}{R\sin(P-p)} = \frac{dr}{r\,dp} = \frac{r'}{r}.$$

Dieses ist die Polargleichung der Tangente. Um die der Normale zu erhalten, braucht man offenbar nur in der Gleichung (12) für den Winkel ψ den Winkel $\psi \pm \frac{\pi}{2}$ zu setzen. Man hat also wenn P, R die veränderlichen Coordinaten der Normale bezeichnen:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{B\cos(P-p)-r}{B\sin(P-p)} = \pm\, tang\,(\psi - p) \\ = \pm \dfrac{r\,dp}{dr} = \pm \dfrac{r}{r'}. \end{cases}$$

Es sei nun v der Winkel zwischen der betrachteten Curve und dem aus dem Anfangspunkte mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreise, d. h. der spitze Winkel, welcher von der Tangente der Curve und dem Perpendikel auf diesem Halbmesser gebildet wird; so ist $\frac{\pi}{2} - v$ der spitze Winkel zwischen demselben Halbmesser und der Tangente und folglich der kleinste der Zahlenwerthe von $\psi - p$. Man hat also:

$$tang\, v = cot\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \pm\, cot\,(\psi - p),$$

und folglich:

$$(15)\qquad tang\, v = \pm \frac{dr}{r\,dp} = \pm \frac{dl(r)}{dp},$$

oder:

$$(16)\qquad tang\, v = \pm \frac{r'}{r}.$$

Da ferner die Größe $tang\, v$ nothwendig positiv ist und für sehr kleine Zahlenwerthe von Δp das Verhältniß $\frac{\Delta r}{\Delta p}$ immer dasselbe Zeichen hat, als seine Grenze $\frac{dr}{dp} = r'$, so muß man offenbar in den zweiten Theilen der Gleichungen (15) und (16) das Zeichen $+$ nehmen, wenn der Radiusvector r von dem Punkte (p, r) aus mit dem Winkel p zugleich wächst und das Zeichen $-$ im entgegengesetzten Falle.

Noch wollen wir bemerken, daß sich aus der Gleichung (16) unmittelbar die beiden folgenden ergeben:

$$(17)\quad cos\, v = \pm \frac{r}{\sqrt{(r^2 + r'^2)}},\quad sin\, v = \pm \frac{r'}{\sqrt{(r^2 + r'^2)}}.$$

Es bezeichne nun s den auf der gegebenen Curve von einem festen Punkte aus gezählten Bogen und ϱ den Krümmungshalbmesser, so hat man (Vorl. 5 und 6):

$$(18)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

$$(19)\qquad \frac{1}{\varrho} = \pm \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Substituirt man in diese letzten Formeln die aus den Gleichungen (1) abgeleiteten Werthe von x, y, so erhält man nach verrichteter Reductionen:

(20) $ds^2 = dr^2 + r^2 dp^2,$

(21) $$\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{r(dr\,d^2p - dp\,d^2r) + (2dr^2 + r^2 dp^2)dp}{(dr^2 + r^2 dp^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und wenn man p zur unabhängigen Veränderlichen nimmt, so ergibt sich:

(22) $$\frac{ds^2}{dp^2} = r^2 + r'^2,$$

(23) $$\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{r^2 - rr'' + 2r'^2}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Es verdient bemerkt zu werden, daß die Rechnungen sehr abgekürzt werden und daß man keine Reduction mehr zu verrichten hat, wenn man statt der Gleichungen (1) die folgenden anwendet:

(24) $$x + y\sqrt{-1} = re^{p\sqrt{-1}}$$
$$x - y\sqrt{-1} = re^{-p\sqrt{-1}}.$$

Nimmt man z. B. p zur unabhängigen Veränderlichen, so ergibt sich aus den Gleichungen (24):

(25) $$\begin{cases} dx + dy\sqrt{-1} = (r' + r\sqrt{-1})\,e^{p\sqrt{-1}}\,dp, \\ dx - dy\sqrt{-1} = (r' - r\sqrt{-1})\,e^{-p\sqrt{-1}}\,dp, \end{cases}$$

(26) $$\begin{cases} d^2x + d^2y\sqrt{-1} = (r'' - r + 2r'\sqrt{-1})\,e^{p\sqrt{-1}}\,dp^2, \\ d^2x - d^2y\sqrt{-1} = (r'' - r - 2r'\sqrt{-1})\,e^{-p\sqrt{-1}}\,dp^2. \end{cases}$$

Multiplicirt man nun 1) die Gleichungen (25) und 2) die zweite der Gleichungen (25) und die erste der Gleichungen (26) mit einander, so erhält man unmittelbar:

(27) $$dx^2 + dy^2 = (r^2 + r'^2)\,dp^2,$$

und es ergibt sich, daß die Differenz $dx\,d^2y - dy\,d^2x$ dem Coefficienten von $\sqrt{-1}$ in dem Producte:

$$(r' - r\sqrt{-1})(r'' - r + 2r'\sqrt{-1})\,dp^2$$

gleich ist, so daß

(28) $$dx\,d^2y - dy\,d^2x = (2r'^2 - rr'' + r^2)\,dp^2$$

ist. Wenn p nicht mehr zur unabhängigen Veränderlichen genommen würde, so fände man:

(29) $$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\,dp^2,$$

(30) $$dx\,d^2y - dy\,d^2x = r(dx\,d^2p - dp\,d^2r) + (2dr^2 + r^2 dp^2)\,dp.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (27) und (28) oder (29)

und (30) ergeben sich offenbar die Gleichungen (22) und (23) oder (20) und (21) aus den Gleichungen (18) und (19).

Es seien nun ξ und η die rechtwinkligen Coordinaten des dem Punkte (x, y) entsprechenden Krümmungsmittelpunktes und P, R die Polarcoordinaten dieses Krümmungsmittelpunktes, welche mit den erstern durch die Gleichungen:

$$\xi = R\cos P,\quad \eta = R\sin P \tag{31}$$

verbunden sind, so hat man (Vorles. 7):

$$\frac{\eta - y}{dx} = \frac{\xi - x}{-dy} = \frac{dx^2 + dy^2}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \tag{32}$$

und hieraus folgt:

$$\frac{y(\eta - y) + x(\xi - x)}{y\,dx - x\,dy} = \frac{x(\eta - y) - y(\xi - x)}{x\,dx + y\,dy} = \frac{dx^2 + dy^2}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

oder was dasselbe ist:

$$\frac{x\xi + y\eta - (x^2 + y^2)}{y\,dx - x\,dy} = \frac{x\eta - y\xi}{x\,dx + y\,dy} = \frac{dx^2 + dy^2}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}, \tag{33}$$

und wenn man vermittelst der Formeln (1), (7), (29), (30) und (31) für die rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten substituirt, so findet man:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{R\cos(P-p) - r}{-r\,dp} = \frac{R\sin(P-p)}{dr} \\ &= \frac{dr^2 + r^2\,dp^2}{r(dr\,d^2p - dp\,d^2r) + (2dr^2 + r^2\,dp^2)\,dp} \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Wenn man p zur unabhängigen Veränderlichen nähme, so hätte man blos:

$$\left\{\begin{aligned} &1 - \frac{R}{r}\cos(P-p) = \frac{R}{r}\sin(P-p) \\ &= \frac{r^2 + r'^2}{2r^2 - rr'' + r^2} \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Aus dieser letzten Formel folgt:

$$\left\{\begin{aligned} &R\sin(P-p) = r\,\frac{r^2 + r'^2}{2r^2 - rr'' + r^2} \\ &R\cos(P-p) = r\left(1 - \frac{r^2 + r'^2}{2r^2 - rr'' + r^2}\right) = r\,\frac{r^2 - rr''}{2r^2 - rr'' + r^2} \end{aligned}\right. \tag{36}$$

und folglich:

$$(37)\quad \begin{cases} tang\,(P-p) = \dfrac{r'}{r}\,\dfrac{r^2+r'^2}{rr''}, \\ R^2 = \dfrac{r'^2\,(r^2+r'^2)^2 + r^2\,(r'^2-rr'')^2}{(2r'^2-rr''+r^2)^2}. \end{cases}$$

Ferner wollen wir bemerken, daß die Formel (35) auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$(38)\quad \begin{cases} 1-\dfrac{R}{r}\cos(P-p) = \dfrac{R}{r}\sin(P-p) \\ \qquad = \pm\,\dfrac{\varrho}{\sqrt{(r^2+r'^2)}}, \end{cases}$$

und alsdann hat sie die beiden andern zur Folge:

$$(39)\quad \begin{cases} R\sin(P-p) = \pm\,\dfrac{r'}{\sqrt{(r^2+r'^2)}}\,\varrho = \pm\,\varrho\sin v, \\ R\cos(P-p)-r = \mp\,\dfrac{r}{\sqrt{(r^2+r'^2)}}\,\varrho = \mp\,\varrho\cos v. \end{cases}$$

Wenn man von den in der neunten Vorlesung aufgestellten Principien ausgeht, so kann man leicht zu den Formeln (21) und (24) gelangen. Denn die Polargleichung des aus dem Punkte (R, P) als Mittelpunkt mit dem Halbmesser ϱ beschriebenen Kreises ist (s. vorherg. Vorl.):

$$(40)\quad r^2 - 2Rr\cos(P-p) + R^2 = \varrho^2.$$

Nun wollen wir annehmen, daß derselbe Kreis Krümmungskreis einer gegebenen Curve in einem gewissen Punkte derselben werde, d. h. daß er in diesem Punkte mit der Curve eine Berührung der weiten oder einer höhern Ordnung eingehe; so müssen nicht blos die Coordinaten p, r sondern auch die Differenziale dp, d^2p, dr, d^2r für den Berührungspunkt bei dem Uebergange von dem Kreise zu der Curve dieselben Werthe behalten. Mit andern Worten, die aus der Gleichung der Curve abgeleiteten Werthe von:

$$p,\ dp,\ d^2p;\quad r,\ dr,\ d^2r$$

müssen der endlichen Gleichung des Kreises und ihren Differenzialgleichungen der ersten und zweiten Ordnung Genüge leisten. Ueberdies können diese drei letzten Gleichungen unter der Form:

$$(41)\quad \begin{cases} [R\sin(p-P)]^2 + [R\cos(p-P)-r]^2 = \varrho^2, \\ Rr\sin(p-P)\,dp - [R\cos(p-P)-r]\,dr = 0, \\ R\sin(p-P)\,[r\,d^2p + 2\,dp\,dr] \\ \quad -[R\cos(p-P)-r]\,(d^2r - r\,dp^2) = -(dr^2+r^2dp^2) \end{cases}$$

ausgedrückt werden, und alsdann ergibt sich daraus unmittelbar die Formel:

$$\frac{R\cos(p-P)-r}{r\,dp} = \frac{R\sin(p-P)}{dr}$$

$$= \pm \frac{\sqrt{[R\sin(p-P)]^2+[R\cos(p-P)-r]^2}}{\sqrt{(dr^2+r^2dp^2)}}$$

$$= \pm \frac{\varrho}{\sqrt{(dr^2+r^2dp^2)}} =$$

$$\frac{R\sin(p-P).(r\,d^2p+2\,dp\,dr)-[R\cos(p-P)-r](d^2r-r\,dp^2)}{r(dr\,d^2p-dp\,d^2r)+(2\,dr^2+r^2dp^2)\,dp}$$

$$= -\frac{dr^2+r^2dp^2}{r(dr\,d^2p-dp\,d^2r)+(2\,dr^2+r^2dp^2)\,dp},$$

welche die Gleichungen (21) und (34) in sich begreift.

Es verdient bemerkt zu werden, daß man die meisten der vorhergehenden Formeln auch durch rein geometrische Betrachtungen erhalten könnte, wie wir nun kurz zeigen wollen.

Auf einer ebenen Curve wollen wir zwei einander sehr nahe liegende Punkte betrachten, deren Polarcoordinaten resp. p, r und $p+\Delta p$, $r+\Delta r$ sind, durch s wollen wir, wie gewöhnlich, den Bogen der Curve bezeichnen, welcher zwischen einem festen Punkte und dem Punkte (p,r) liegt, und durch v den spitzen Winkel, welchen die Curve und der aus dem Anfangspunkte als Mittelpunkt mit dem Halbmesser r beschriebene Kreis mit einander bilden, wenn sie sich durchschneiden. Die auf der Curve und dem Kreise zwischen den Radienvectoren r und $r+\Delta r$ liegenden Bogen werden offenbar durch die Zahlenwerthe der beiden Ausdrücke:

$$\Delta s, \quad r\Delta p$$

ausgedrückt, und wenn man den spitzen Winkel, welchen ihre Sehnen mit einander bilden, mit ω bezeichnet; so ist die Grenze von ω genau der Größe v gleich. Ferner bilden die beiden Sehnen und die Länge $\pm\Delta r$ ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Seite $\pm\Delta r$ dem Winkel ω gegenüberliegt. Wenn der Bogen $\pm\Delta s$ unendlich klein wird, so wird der in diesem Dreiecke der Sehne dieses Bogens gegenüberliegende Winkel sehr wenig von einem rechten verschieden und kann folglich durch:

$$\frac{\pi}{2}\pm\varepsilon$$

ausgedrückt werden, wo $\pm\varepsilon$ eine unendlich kleine Größe bezeichnet. Folglich ist der dritte, der Sehne des Bogens $\pm r\Delta p$ gegenüberliegende Winkel:

$$\frac{\pi}{2}-\omega\pm\varepsilon,$$

und wenn man die Sinus der Winkel mit den ihnen gegenüberliegenden Seiten vergleicht; so erhält man die Gleichungen:

$$\pm\frac{\Delta r}{\Delta s}=\frac{\sin\omega}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\pm\varepsilon},\quad \pm\frac{r\Delta p}{\Delta s}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\omega\mp\varepsilon\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\varepsilon\right)},$$

woraus sich, wenn man $\cos\left(\omega\pm\varepsilon\right)$ statt $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\omega\mp\varepsilon\right)$ setzt und zu den Grenzen übergeht, ergibt:

$$\pm\frac{dr}{ds}=\sin v,\quad \pm\frac{r\,dp}{ds}=\cos v. \tag{42}$$

Wenn man die Gleichungen (42) durch einander dividirt, so erhält man die Gleichung (15) wieder. Wenn man sie dagegen addirt, nachdem man beide Theile derselben zum Quadrate erhoben hat, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{dr^2+r^2dp^2}{ds^2}=1,$$

welche mit der Gleichung (20) übereinstimmt.

Betrachten wir nun das Dreieck, dessen Spitzen der Anfangspunkt der Coordinaten, der Punkt (p, r) der ebenen Curve und der diesem Punkte entsprechende Krümmungsmittelpunkt sind. Wenn man den Krümmungshalbmesser mit ϱ und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes mit (P, R) bezeichnet, so sind die drei Seiten des Dreieckes resp. r, R und ϱ. Ferner ist klar, daß in demselben Dreiecke der spitze oder stumpfe Winkel zwischen dem Radiusvector r und dem auf der Tangente senkrechten Krümmungshalbmesser ϱ dem Winkel v zwischen der Tangente und dem Perpendikel auf dem Radiusvector oder dem Supplemente dieses Winkels gleich ist, und wenn man endlich den Winkel zwischen den Radienvectoren r und R mit δ bezeichnet; so ist offenbar (s. vorherg. Vorles. Gleich. (39)):

$$\pm\delta=p-P\pm 2n\pi, \tag{43}$$

wo n eine ganze Zahl bezeichnet, die sich auch auf Null reduciren kann. Was den dritten Winkel anlangt, so hat er die Summe der beiden andern, nämlich:

$$\delta+v \text{ oder } \delta+\pi-v$$

zum Supplemente. Vergleicht man nun die Sinus der drei Winkel mit den drei gegenüberliegenden Seiten, so erhält man:

$$\frac{\sin v}{R}=\frac{\sin\delta}{\varrho}=\frac{\sin(v\pm\delta)}{r}, \tag{44}$$

und hieraus ergibt sich:

$$(45)\qquad \begin{cases} R\sin\delta = \varrho\sin v, \\ R\cos\delta - r = \mp\varrho\cos v. \end{cases}$$

Wenn man in diesen letzten Gleichungen für den Winkel δ seinen aus der Gleichung (43) abgeleiteten Werth setzt, so erhält man die Gleichungen (39) wieder.

Wir haben nun blos noch einige Anwendungen von den eben abgeleiteten Formeln zu machen.

Wenn man die archimedische Spirale betrachtet, welche durch die Gleichung:

$$(46)\qquad r = ap$$

ausgedrückt wird, so erhält man:

$$(47)\qquad r' = a,\ r'' = 0,$$

und folglich, wenn die Constante a als positiv angenommen wird:

$$(48)\qquad tang\, v = cot\,(\psi - p) = \frac{1}{p},$$

$$(49)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{2+p^2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{a} = \left(1+\frac{1}{1+p^2}\right)\frac{1}{a\sqrt{(1+p^2)}}.$$

Zu gleicher Zeit geben die Gleichungen (37):

$$(50)\qquad \begin{cases} tang\,(P-p) = p + \dfrac{1}{p}, \\ R^2 = a^2\,\dfrac{p^2+(1+p^2)^2}{(2+p^2)^2} \\ \quad = a^2\left[1 - \dfrac{1}{2+p^2} - \left(\dfrac{1}{2+p^2}\right)^2\right]. \end{cases}$$

Demnach hat man für $p = 0$:

$$(51)\qquad tang\, v = cot\,(\psi) = tang\, P = \frac{1}{0},\ v = \frac{\pi}{2},\ \varrho = R = \frac{a}{2},$$

und für $p = \infty$:

$$(52)\qquad tang\, v = 0,\ v = 0,\ tang\,(P-p) = \frac{1}{0},\ \frac{1}{\varrho} = 0,\ R = a.$$

Aus diesen Formeln ergibt sich leicht: 1) daß die archimedische Spirale die Polarhalbare im Anfangspunkte der Coordinaten berührt, 2) daß der Winkel v und die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ für wachsende Werthe von p ohne Ende abnehmen, während der Werth von R fortwährend zunimmt, aber so, daß er zwischen den Grenzen $R = \frac{a}{2}$, $R = a$ bleibt, und 3) daß der vom Anfangspunkte nach dem Krüm-

mungsmittelpunkte gezogene Radiusvector R für sehr große Werthe von p fast der Länge a gleich und auf dem Radiusvector r senkrecht wird. Ferner, wenn man in die erste der Gleichungen (50) den aus der zweiten oder aus der Gleichung:

$$\frac{1}{2+p^2}=\frac{1\pm\sqrt{\left(5-\frac{4R^2}{a^2}\right)}}{2}$$

abgeleiteten reellen und positiven Werth von p substituirt, so erhält man für die Polargleichung der Evolute:

$$(53)\quad \left\{ tang\left\{ P-\frac{\left[\sqrt{\left(5-\frac{4R^2}{a^2}\right)}-3+\frac{4R^2}{a^2}\right]^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{R^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}= \frac{\frac{2R^2}{a^2}-1+\sqrt{\left(5-\frac{4R^2}{a^2}\right)}}{2^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{R^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sqrt{\left(5-\frac{4R^2}{a^2}\right)}-3+\frac{4R^2}{a^2}\right]^{\frac{1}{2}}}.\right.$$

Diese Evolute ist offenbar wieder eine Spirale, welche einen den Coordinaten $R=\frac{a}{2}$, $P=\frac{\pi}{2}$ entsprechenden Schlußpunkt darbietet, in diesem Punkte auf dem mit dem Halbmesser $\frac{a}{2}$ aus dem Anfangspunkte als Mittelpunkt beschriebenen Kreise senkrecht ist, und indem sie sich von diesem Kreise entfernt, unendlich viele Windungen von der Beschaffenheit um den Anfangspunkt macht, daß sie sich dem Umfange eines zweiten Kreises immer mehr und mehr nähert, welcher zu dem ersten concentrisch und mit einem doppelt so großen Halbmesser beschrieben ist. Da sich die neue Spirale und der Kreisumfang, welchem sie sich unbestimmt nähert, niemals treffen, so kann man sagen, daß die eine dieser beiden Curven die Asymptote der andern ist.

Wenn man statt der archimedischen Spirale die nähme, deren Gleichung:

$$(54)\qquad r=ap^n$$

ist, so fände man:

$$(55)\quad \begin{cases} r'=nap^{n-1}=\frac{nr}{p}, \\ r''=n(n-1)ap^{n-2}=\frac{n(n-1)r}{p^2}, \end{cases}$$

und folglich:

$$(56) \qquad tang\, v = cot\,(\psi - p) = \frac{n}{p},$$

$$(57) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{n(n+1)+p^2}{(n^2+p^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{a p^{n-1}},$$

$$(58) \qquad \begin{cases} tang\,(P-p) = p + \dfrac{n^2}{p}, \\ R^2 = \dfrac{p^2+(n^2+p^2)^2}{[n(n+1)+p^2]^2}\, n^2 a^2 p^{2n-2} \end{cases}$$

Wenn in den vorhergehenden Formeln die Constante n positiv angenommen wird, so findet man wieder für $p=0$:

$$(59) \qquad tang\, v = cot\,\psi = \frac{1}{0}, \quad v = \frac{\pi}{2},$$

und für $p=\infty$:

$$(60) \qquad tang\, v = 0, \quad v = 0, \quad tang\,(P-p) = \frac{1}{0}.$$

Hieraus folgt, daß die Curve die Polarhalbaxe im Anfangspunkte berührt und für große Werthe von p auf dem Radiusvector r fast senkrecht wird. In derselben Voraussetzung werden die $p=0$ und $p=\infty$ entsprechenden Werth von ϱ und R resp. $=0$ und $=\infty$, wofern man nicht $n=1$ setzt, d. h. die Curve (54) sich nicht auf die archimedische Spirale reducirt. Um ferner die Evolute zu erhalten, braucht man nur p zwischen den Gleichungen (58) zu eliminiren.

Wenn man die durch die Gleichung:

$$(61) \qquad rp = a$$

ausgedrückte hyperbolische Spirale betrachtet, so findet man:

$$(62) \qquad r' = -\frac{a}{p^2}, \quad r'' = \frac{2a}{p^3},$$

und folglich, wenn die Constante a positiv angenommen wird:

$$(63) \qquad tang\, v = -cot\,(\psi - p) = \frac{1}{p},$$

$$(64) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{p^4}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{a},$$

$$(65) \qquad \begin{cases} tang\,(P-p) = p + \dfrac{1}{p}, \\ R^2 = \left[\dfrac{1}{p^2} + \left(1+\dfrac{1}{p^2}\right)^2\right] \dfrac{a^2}{p^4}. \end{cases}$$

Demnach erhält man für $p=0$:

$$(66)\quad \begin{cases} tang\, v = -cot\, \psi = tang\, P = \frac{1}{0}, \\ v = \frac{\pi}{2},\quad \varrho = R = \frac{1}{0}, \end{cases}$$

und für $p = \infty$:

$$(67)\quad \begin{cases} tang\, v = 0,\quad v = 0, \\ tang\,(P - p) = \frac{1}{0},\quad \varrho = R = 0. \end{cases}$$

Aus diesen verschiedenen Formeln ergibt sich leicht: 1) daß für sehr große Werthe von p, d. h. in dem Theile der hyperbolischen Spirale, welcher sehr weit vom Anfangspunkte entfernt liegt und fast mit der Asymptote zusammenfällt, der Winkel v fast ein rechter und die Krümmung fast Null ist, und 2) daß für wachsende Werthe des Winkels p der Winkel v von $v = \frac{\pi}{2}$ bis $v = 0$ beständig abnimmt, und daß dasselbe von dem Krümmungshalbmesser ϱ und von dem Radiusvector R gilt, deren Werthe anfangs sehr groß sind und zuletzt verschwinden. Um ferner die Gleichung der Evolute, welche eine neue Spirale ist und wie die hyperbolische Spirale die merkwürdige Eigenschaft hat, daß sie sich dem Anfangspunkte beständig nähert, ohne ihn je erreichen zu können, zu erhalten, braucht man nur p zwischen den Gleichungen (65) zu eliminiren.

Betrachten wir endlich die durch die Gleichung:

$$(68)\qquad r = e^{\frac{p}{a}}$$

ausgedrückte logarithmische Spirale, so finden wir:

$$(69)\qquad r' = \frac{r}{a},\quad r'' = \frac{r}{a^2},$$

und folglich:

$$(70)\qquad tang\, v = cot\,(\psi - p) = \frac{1}{a},$$

$$(71)\qquad \varrho = \left(1 + \frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{p}{a}} = \left(1 + \frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} r = r\, sec\, v.$$

Die Gleichung (70) genügt, um zu zeigen, daß die Tangente und Normale dieser Curve beständig dieselben Winkel mit dem Radiusvector r bilden. Aus dieser Bemerkung ergeben sich unmittelbar die früher angegebenen geometrischen Constructionen, welche alle Tangenten und Normalen geben, die man durch einen gegebenen Punkt an die Curve ziehen kann. Ferner folgt aus den Formeln (36):

$$(72) \quad \begin{cases} R \sin(P-p) = r' = \frac{r}{a}, \\ R \cos(P-p) = 0; \end{cases}$$

und folglich:

$$(73) \quad \cos(P-p) = 0, \quad \sin(P-p) = 1,$$

$$(74) \quad R = \frac{r}{a}.$$

Da der kleinste Werth von P, welcher den Gleichungen (73) Genüge leisten kann,

$$(75) \quad P = p + \frac{\pi}{2},$$

ist, so kann man behaupten, daß sich die Radienvectoren r und R der Curve und ihrer Evolute unter rechten Winkeln schneiden, oder mit andern Worten, daß r und R die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind, welches den Krümmungshalbmesser zur Hypotenuse hat. Wenn man endlich r und p zwischen den Gleichungen (68), (74) und (75) eliminirt, so erhält man als Polargleichung der Evolute:

$$R = \frac{1}{a} e^{\frac{1}{a}\left(P-\frac{\pi}{2}\right)} = e^{\frac{1}{a}\left[P-\frac{\pi}{2}-al(a)\right]}.$$

Wenn man in dieser letzten Gleichung r für R und $p + \frac{\pi}{2} + al(a)$ für P setzte, so käme man offenbar wieder auf die Gleichung (68). Hieraus folgt: 1) daß die logarithmische Spirale und ihre Evolute zwei Curven von derselben Form und denselben Dimensionen sind, und 2) daß man, um die Evolute zu erhalten, nur die Evolvente so um den Anfangspunkt zu drehen braucht, daß jeder ihrer Punkte einen Winkel $= \frac{\pi}{2} + al(a)$ mit einer directen Rotationsbewegung beschreibt.

Dreizehnte Vorlesung.

Von der Tangente und den Berührungsebenen, den Normalen und der Normalebene in einem gegebenen Punkte einer beliebigen Curve. Asymptoten und singuläre Punkte der im Raume beschriebenen Curven.

Wir wollen eine beliebige, durch zwei Gleichungen zwischen drei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, ausgedrückte Curve betrachten, durch $\triangle x$, $\triangle y$, $\triangle z$ die gleichzeitigen Incremente, welche x, y, z bei dem Uebergange von einem Punkte zu einem andern annehmen und durch a, b, c die Winkel, welche die von dem Punkte (x, y, z) nach dem Punkte $(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z)$ gezogene Sehne oder Secante mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet, bezeichnen; so geben die Gleichungen (4) und (6) der Vorerinnerungen:

$$(1)\quad \begin{cases} \cos a = \dfrac{\triangle x}{\sqrt{(\triangle x^2+\triangle y^2+\triangle z^2)}}, \cos b = \dfrac{\triangle y}{\sqrt{(\triangle x^2+\triangle y^2+\triangle z^2)}}, \\ \cos c = \dfrac{\triangle z}{\sqrt{(\triangle x^2+\triangle y^2+\triangle z^2)}}; \end{cases}$$

$$(2)\quad \frac{\cos a}{\triangle x} = \frac{\cos b}{\triangle y} = \frac{\cos c}{\triangle z}.$$

Wenn man überdies durch ξ, η, ζ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der erwähnten Sehne bezeichnet, so hat man auch:

$$(3)\quad \frac{\xi-x}{\cos a} = \frac{\eta-y}{\cos b} = \frac{\zeta-z}{\cos c},$$

und folglich:

$$(4)\quad \frac{\xi-x}{\triangle x} = \frac{\eta-y}{\triangle y} = \frac{\zeta-z}{\triangle z}.$$

Man könnte übrigens diese letzte Gleichung auch direct aufstellen, wenn man die beiden Längen zwischen dem Punkte (x, y, z) und dem Punkte (ξ, η, ζ) und zwischen dem Punkte (x, y, z) und $(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z)$ successive auf die drei Axen der x,

y, z projicirte. Denn alsdann ergäbe sich leicht: 1) daß jeder der Brüche in der Formel (4), bis auf das Zeichen, dem Verhältnisse zwischen den Projectionen der beiden Längen auf dieselbe Axe und folglich dem Verhältnisse der Längen selbst gleich ist, und 2) daß diese drei Brüche Größen von einerlei Zeichen sind, nämlich positive Größen, wenn die Punkte (ξ, η, ζ) und $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ in Beziehung auf den Punkt (x, y, z) auf derselben Seite liegen, und negative Größen im entgegengesetzten Falle. Die auf diese Weise abgeleitete Formel (4) erstreckt sich offenbar auch auf den Fall, wo x, y, z schiefwinklige Coordinaten bezeichnen.

Stellen wir uns nun vor, daß der Punkt $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ sich dem Punkte (x, y, z) unendlich nähert, so nähert sich die diese beiden Punkte verbindende Secante einer gewissen Geraden, welche man die Tangente an der gegebenen Curve nennt und sie in dem Punkte (x, y, z) berührt. Um die Winkel α, β, γ zu erhalten, welche diese nach einem gewissen Sinne verlängerte Tangente mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet, braucht man nur die Grenzen zu suchen, gegen welche die Winkel a, b, c convergiren, während die Differenzen Δx, Δy, Δz unendlich klein werden. Demnach erhält man mit Berücksichtigung des in der Differenzialr. Seite 25 aufgestellten Prinzipes aus den Gleichungen (1) und (2):

$$(5)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}, & \cos\beta = \dfrac{dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}, \\ & \cos\gamma = \dfrac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}, \end{cases}$$

$$(6)\quad \frac{\cos\alpha}{dx} = \frac{\cos\beta}{dy} = \frac{\cos\gamma}{dz}.$$

Wenn ferner ξ, η, ζ nicht mehr die Coordinaten irgend eines Punktes der Secante, sondern die eines beliebigen Punktes der Tangente an der Curve bezeichnen, so gibt die Formel (18) der Vorerinnerungen:

$$(7)\quad \frac{\xi-x}{\cos\alpha} = \frac{\eta-y}{\cos\beta} = \frac{\zeta-z}{\cos\gamma},$$

und hieraus folgt:

$$(8)\quad \frac{\xi-x}{dx} = \frac{\eta-y}{dy} = \frac{\zeta-z}{dz}.$$

Die Formeln (5), (6), (8) findet statt, welches auch die unabhängige Veränderliche sein mag. Die letzte Gleichung kann unmittelbar aus der Gleichung (4) abgeleitet werden und folglich gilt die Formel (8) auch für den Fall, wo x, y, z schiefwinklige Coordinaten bezeichnen.

Man sagt, eine Ebene berühre eine Curve in einem gegebenen Punkte, wenn sie durch die Tangente der Curve in diesem Punkte

geht. Nach dieſer Definition iſt klar, daß man durch einen auf einer beliebigen Curve gegebenen Punkt unendlich viele Berührungsebenen an dieſe Curve legen kann.

Man ſagt, eine Gerade ſei auf einer Curve normal in einem gegebenen Punkte, wenn ſie auf ihrer Tangente in dieſem Punkte ſenkrecht iſt. Demnach kann man offenbar in jedem Punkte einer Curve unendlich viele Normalen ziehen, welche alle in derſelben Ebene liegen. Dieſe Ebene wird die Normalebene genannt. Wenn man die Winkel, welche die Tangente an der betrachteten Curve mit den Halbaxen der poſitiven Coordinaten bildet, mit α, β, γ und die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Normalebene mit ξ, η, ζ bezeichnet, ſo iſt die Gleichung dieſer Ebene (ſ. Formel (66) der Vorer.):

$$(9) \qquad (\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\cos\beta + (\zeta - z)\cos\gamma = 0,$$

oder, wenn man die Gleichung (6) berückſichtigt:

$$(10) \qquad (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0.$$

Dieſe letzte Formel findet ſtatt, welches auch die unabhängige Veränderliche ſein mag.

Es ſeien nun:

$$(11) \qquad u = 0, \quad v = 0$$

die beiden Gleichungen der gegebenen Curve, d. h. die Gleichungen der Flächen, worin ſie liegt, ſo daß u und v zwei Functionen der drei Veränderlichen x, y, z bezeichnen. Aus den Gleichungen (11) folgt:

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dx}\,dx + \dfrac{du}{dy}\,dy + \dfrac{du}{dz}\,dz = 0, \\ \dfrac{dv}{dx}\,dx + \dfrac{dv}{dy}\,dy + \dfrac{dv}{dz}\,dz = 0; \end{cases}$$

und wenn man die Gleichung (6) berückſichtigt:

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dx}\cos\alpha + \dfrac{du}{dy}\cos\beta + \dfrac{du}{dz}\cos\gamma = 0, \\ \dfrac{dv}{dx}\cos\alpha + \dfrac{dv}{dy}\cos\beta + \dfrac{du}{dz}\cos\gamma = 0. \end{cases}$$

Dieſe letztern Gleichungen ſind in Verbindung mit der Gleichung:

$$(14) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

zur Beſtimmung der Werthe von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, von ihrem Zeichen abſtrahirt, hinreichend. Es ergibt ſich in der That daraus:

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos\alpha}{\dfrac{du}{dy}\dfrac{dv}{dz}-\dfrac{du}{dz}\dfrac{dv}{dy}}=\dfrac{\cos\beta}{\dfrac{du}{dz}\dfrac{dv}{dx}-\dfrac{du}{dx}\dfrac{dv}{dz}} \\ \qquad\qquad =\dfrac{\cos\gamma}{\dfrac{du}{dx}\dfrac{dv}{dy}-\dfrac{du}{dy}\dfrac{dv}{dx}} \end{array}\right.$$

$$=\pm\frac{1}{\left[\left(\frac{du}{dy}\frac{dv}{dz}-\frac{du}{dz}\frac{dv}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{dv}{dz}\right)^2+\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Demnach verwandeln sich die Gleichungen (7) und (9), d. h. die Gleichungen der Tangente und der Normalebene in:

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\xi-x}{\dfrac{du}{dy}\dfrac{dv}{dz}-\dfrac{du}{dz}\dfrac{dv}{dy}}=\dfrac{\eta-y}{\dfrac{du}{dz}\dfrac{dv}{dx}-\dfrac{du}{dx}\dfrac{dv}{dz}} \\ \qquad\qquad =\dfrac{\zeta-z}{\dfrac{du}{dx}\dfrac{dv}{dy}-\dfrac{du}{dy}\dfrac{dv}{dx}}, \end{array}\right.$$

und:

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{du}{dy}\dfrac{dv}{dz}-\dfrac{du}{dz}\dfrac{dv}{dy}\right)(\xi-x)+\left(\dfrac{du}{dz}\dfrac{dv}{dx}-\dfrac{du}{dx}\dfrac{dv}{dz}\right)(\eta-y) \\ \qquad +\left(\dfrac{du}{dx}\dfrac{dv}{dy}-\dfrac{du}{dy}\dfrac{dv}{dx}\right)(\zeta-z)=0. \end{array}\right.$$

Statt der Gleichung (16) kann man auch die beiden Gleichungen:

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} (\xi-x)\dfrac{du}{dx}+(\eta-y)\dfrac{du}{dy}+(\zeta-z)\dfrac{du}{dz}=0, \\ (\xi-x)\dfrac{dv}{dx}+(\eta-y)\dfrac{du}{dy}+(\zeta-z)\dfrac{dv}{dz}=0 \end{array}\right.$$

setzen, welche sich unmittelbar aus den Gleichungen (12) in Verbindung mit der Gleichung (8) ergeben. Da die Gleichungen (18) beide in Beziehung auf ξ, η, ζ vom ersten Grade sind, so drücken sie zwei Ebenen aus, welche sich nach der Tangente schneiden und den beiden Flächen entsprechen, aus deren Durchschnitte die gegebene Curve entsteht. Ferner folgt offenbar aus der Vergleichung der Formeln (12) und (18), daß man, um die Gleichungen der Tangente einer beliebigen Curve zu erhalten, in den Differenzialgleichungen der Curve für die Differenziale dx, dy, dz nur die Differenzen $\xi-x$, $\eta-y$, $\zeta-z$ zu setzen braucht.

Wenn u blos eine Function der Veränderlichen x, y ist, so

drückt die erste der Gleichungen (11) die Projection der Curve auf die Ebene der x, y aus. In diesem Falle reducirt sich die erste der Gleichungen (18) auf die Form:

$$(19) \qquad (\xi - x)\frac{du}{dx} + (\eta - y)\frac{du}{dy} = 0,$$

und drückt zugleich die Tangente der Projection und die Projection der Tangente aus. Da die eben gemachte Bemerkung von der Lage der Ebene der x, y unabhängig ist, so darf man schließen, daß die Projection der Tangente einer beliebigen Curve auf eine gegebene Ebene immer mit der Tangente der auf dieselbe Ebene projicirten Curve zusammenfällt.

Man könnte diesen Satz auch rein geometrisch darthun; denn es sei (P) ein auf einer beliebigen Curve willkührlich gewählter Punkt und (Q) ein zweiter, dem ersten sehr nahe liegender Punkt. Ferner sei, wenn die Curve auf eine gegebene Ebene projicirt wird, (p) die Projection des Punktes (P) und (q) die des Punktes (Q). Endlich wollen wir uns vorstellen, daß sich der Punkt (Q) dem Punkte (P) ohne Ende nähert, so muß sich auch der Punkt (q) dem Punkte (p) fortwährend nähern. Die Secante PQ der im Raume betrachteten Curve hat offenbar die Secante pq der projicirten Curve zur Projection, und da dieses der Fall ist, wie klein die Entfernung der Punkte (P) und (Q) auch sein mag; so kann man behaupten, daß es auch noch an der Grenze statt findet, d. h. wenn sich die Secanten PQ, pq resp. in die durch den Punkt (P) der gegebenen Curve und durch den Punkt (p) der projicirten Curve gezogenen Tangenten verwandeln.

Wir wollen nun von den vorhergehenden Formeln einige Anwendungen machen.

Beispiel 1. Betrachten wir die Ellipse, welche aus dem Durchschnitte des Cylinders mit kreisförmiger Basis, dessen Gleichung:

$$(20) \qquad x^2 + y^2 = R^2$$

ist und der Ebene:

$$(21) \qquad Ax + By + Cz = D$$

entspringt. Da die Differenzialgleichungen dieser Ellipse resp.

$$(22) \qquad xdx + ydy = 0, \quad Adx + Bdy + Cdz = 0$$

sind, so leisten die Winkel α, β, γ, welche die Tangente mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet, den beiden Gleichungen:

$$(23) \qquad x\cos\alpha + y\cos\beta = 0, \quad A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0$$

Genüge. Man hat folglich:

$$(24)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\cos\alpha}{y} = \dfrac{\cos\beta}{-x} = \dfrac{\cos\gamma}{\frac{1}{C}(Bx - Ay)} = \\ \qquad \pm \dfrac{1}{\left[R^2 + \left(\dfrac{Bx - Ay}{C}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}. \end{array} \right.$$

Ferner erhält man für die Gleichungen der Tangente:

$$x(\xi - x) + y(\eta - y) = 0,$$
$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0,$$

oder was daſſelbe iſt:

$$(25)\qquad x\xi + y\eta = R^2,\ A\xi + B\eta + C\zeta = D,$$

und die Gleichung der Normalebene verwandelt ſich in:

$$(26)\qquad C(\xi y - \eta x) + (Bx - Ay)(\zeta - z) = 0.$$

Die Gleichungen (25) drücken, wie ſich erwarten ließ, die Tangente an dem Kreiſe aus, welcher die Baſis des Cylinders bildet und in der Ebene der x, y liegt, und die Ebene der betrachteten Curve ſelbſt.

Beiſpiel 2. Wir wollen nun die Curve betrachten, welche aus dem Durchſchnitte des geraden Kegels mit kreisförmiger Baſis, deſſen Gleichung

$$(27)\qquad x^2 + y^2 = a^2 z^2$$

iſt, mit der Ebene:

$$(28)\qquad Ax + By + Cz = D$$

entſpringt. Für die Gleichung der Tangente erhält man:

$$(29)\qquad x\xi + y\eta = a^2 z\zeta,\ A\xi + B\eta + C\zeta = D,$$

und für die Gleichungen der Normalebene:

$$(30)\qquad C(\xi y - \eta x) + (B\xi - A\eta)a^2 z + Bx - Ay)(\zeta - z - a^2 z) = 0.$$

Die Gleichungen (29) drücken, wie zu erwarten war, zwei Ebenen aus, wovon die eine durch den Anfangspunkt und durch eine Erzeugungslinie des Kegels geht, während die andere mit der Ebene der Curve zuſammenfällt. Um die Tangente an der gegebenen Curve, welche ein beliebiger Kegelſchnitt ſein kann, zu conſtruiren, braucht man nur dieſe beiden Ebenen zu conſtruiren.

Beiſpiel 3. Wir wollen jetzt die aus dem Durchſchnitte der Kugel:

$$(31)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

und des geraden Cylinders:

$$(32)\quad (x - \tfrac{1}{2}R)^2 + z^2 = \tfrac{1}{4}R^2,\ \text{oder}\ x^2 - Rx + z^2 = 0,$$

deſſen Grundfläche ein Kreis iſt, welcher dem Halbmeſſer der Kugel zum Durchmeſſer hat, entſpringende Curve betrachten. Die Projection dieſer Curve auf die Ebene der x, y iſt offenbar die Parabel:

$$y^2 = R(R-x), \tag{33}$$

die auf die Ebene der xz der Kreis der Grundfläche des Cylinders und die auf die Ebene der yz die Lemniscate, welche durch die Gleichung:

$$R^2 z^2 = y^2 (R^2 - y^2) \tag{34}$$

ausgedrückt wird. Folglich ſind die Projectionen der Tangente der gegebenen Curve auf die Coordinatenebenen reſp. die Tangenten an der Parabel, an dem Kreiſe und an der Lemniscate, d. h. die drei Geraden, welche durch die Gleichungen:

$$\begin{cases} y\eta + \frac{1}{2}R\xi = R(R - \frac{1}{2}x), \\ (x - \frac{1}{2}R)\xi + z\zeta = \frac{1}{2}Rx, \\ R^2 z\zeta - (R^2 - 2y^2)\, y\eta = y^4 \end{cases} \tag{35}$$

ausgedrückt werden. Was die Gleichung der Normalebene betrifft, ſo kann ſie unter der Form:

$$\frac{\xi}{x} - \frac{\zeta}{z} = \frac{R}{2x}\left(\frac{\eta}{y} - \frac{\zeta}{z}\right), \tag{36}$$

ausgedrückt werden. Aus der Betrachtung dieſer letzten Gleichung ergibt ſich unmittelbar, daß der vom Anfangspunkte nach dem Punkte (x, y) gezogene Radiusvector in der Normalebene liegt.

Beiſpiel 4. Eine Curve, welche auf der Oberfläche eines geraden Cylinders mit kreisförmiger Baſis ſo gezogen iſt, daß ihre Tangente mit der Erzeugungslinie des Cylinders immer denſelben Winkel bildet, wird die Schraubenlinie genannt. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß die Axe des Cylinders, welche auch die Axe der Schraubenlinie genannt werden kann, mit der Axe der z und der Kreis der Grundfläche des Cylinders mit dem durch die Gleichung:

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{37}$$

ausgedrückten Kreiſe zuſammenfalle. In dieſem letzten Kreiſe wollen wir uns einen beweglichen Halbmeſſer denken, welcher zuerſt mit der Halbaxe der poſitiven x zuſammenfällt und ſich dann mit einer directen oder retrograden Rotationsbewegung um den Anfangspunkt dreht. Endlich wollen wir den veränderlichen Winkel, welchen dieſer Halbmeſſer beſchreibt, mit $+p$ bezeichnen, wenn die Rotationsbewegung eine directe iſt, und im entgegengeſetzten Falle mit $-p$. Um die Schraubenlinie zu conſtruiren, braucht man ſich nur vorzuſtellen, daß von dem Endpunkte des beweglichen Halbmeſſers aus auf der Erzeugungslinie des Cylinders nach dem Sinne der poſitiven z, wenn p poſitiv iſt, und nach dem Sinne der negativen z, wenn p negativ wird, eine dem Winkel $\pm p$ oder dem zwiſchen den Schenkeln dieſes Winkels liegenden Bogen $\pm Rp$, welcher durch

ein Produkt von der Form $\pm aRp$ ausgedrückt werden kann (wo a eine constante Zahl ist) proportionale Länge genommen sei. Denn es seien x, y, z die Coordinaten der durch den Endpunkt dieser Länge beschriebenen Curve, so hat man offenbar:

$$(38) \qquad x = R\cos p, \quad y = R\sin p, \quad z = aRp,$$

und hieraus folgt:

$$(39) \qquad dx = -R\sin p\,dp, \quad dy = R\cos p\,dp, \quad dz = aR\,dp.$$

Demnach geben die Gleichungen (5):

$$(40) \qquad \begin{cases} \cos\alpha = -\dfrac{\sin p}{\sqrt{(1+a^2)}}; & \cos\beta = \dfrac{\cos p}{\sqrt{(1+a^2)}}, \\ \cos\gamma = \dfrac{a}{\sqrt{(1+a^2)}}. \end{cases}$$

Nun folgt aber offenbar aus der letzten der Gleichungen (40), daß der Winkel γ, welchen die Tangente an der Curve mit der Axe der z und folglich mit der Erzeugungslinie des Cylinders bildet, constant ist.

Um die Gleichung der Schraubenlinie zwischen rechtwinkligen Coordinaten zu erhalten, braucht man nur p zwischen den Gleichungen (38) zu eliminiren. Wenn man p zuerst zwischen den beiden ersten dieser Gleichungen eliminirte, so fände man die Gleichung (37) wieder, welche in der That eine der Gleichungen der Curve ist. Ferner folgt aus den Gleichungen (38):

$$\frac{y}{x} = tang\,p, \quad p = arc\,tang\left(\left(\frac{y}{x}\right)\right),$$

und folglich:

$$(41) \qquad \frac{y}{x} = tang\frac{z}{aR}, \text{ oder } z = aR\,arc\,tang\left(\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

Diese letzte Gleichung drückt die Schraubenfläche aus, welche durch eine Gerade erzeugt wird, die immer in einer auf der Axe der z senkrechten beweglichen Ebene liegt, die diese Axe in demselben Punkte als die Ebene schneidet und sich um den Durchschnittspunkt so dreht, daß sie in der beweglichen Ebene Winkel beschreibt, welche den von dem in Rede stehenden Punkte durchlaufenen Längen proportional sind. Da diese Fläche den Cylinder offenbar nach zwei Schraubenlinien schneidet, deren correspondirende Punkte auf der geraden Erzeugungslinie der Fläche in gleichen Entfernungen von der Axe der z liegen; so kann man behaupten, daß das System der Gleichungen (37) und (41) diese beiden Schraubenlinien ausdrückt, wovon die eine mit der gegebenen Curve zusammenfällt.

Wenn man die Veränderliche p zwischen der ersten und dritten der Gleichungen (38) statt zwischen der zweiten und dritten eliminirte, so erhielte man statt der Gleichung (41) eine der folgenden:

$$(42) \qquad x = R\cos\frac{z}{aR}, \text{ oder } z = aR\,arc\cos\left(\left(\frac{x}{R}\right)\right),$$

$$(43) \qquad y = R\sin\frac{z}{aR}, \text{ oder } z = aR\,arc\sin\left(\left(\frac{y}{R}\right)\right).$$

Verbindet man eine dieser Gleichungen mit der Gleichung (37), so erhält man wieder ein System zweier Gleichungen, welche die beiden Schraubenlinien, wovon die eine mit der gegebenen zusammenfällt, und welche beide auf der Ebene der zx oder auf der Ebene der yz dieselbe Projection haben, ausdrücken können.

Wenn man endlich die Gleichung (42) mit der Gleichung (43), oder eine von diesen mit der Gleichung (41) verbände, so erhielte man ein System von zwei Gleichungen, welches nur die erste Schraubenlinie, wozu die Gleichungen (38) gehören, ausdrücken könnte. Ferner wollen wir bemerken, daß man bei der Untersuchung der Eigenschaften der Schraubenlinie das System der Gleichungen (38) mit Vortheil für die Gleichungen zwischen rechtwinkligen Coordinaten substituiren kann. Wir haben bereits gesehen, wie sich aus diesen letztern die Werthe von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ableiten lassen. Wendet man sie nun auf die Bestimmung der Tangente und Normalebene an, so erhält man für die Gleichungen der Tangente:

$$(44) \qquad \frac{\xi - x}{-\sin p} = \frac{\eta - y}{\cos p} = \frac{\zeta - z}{a},$$

und für die Gleichung der Normalebene:

$$(45) \qquad (\eta - y)\cos p - (\xi - x)\sin p + a(\zeta - z) = 0.$$

In der dritten Vorlesung haben wir gezeigt, wie sich die Asymptoten der ebenen Curven bestimmen lassen und mit derselben Leichtigkeit könnte man die Asymptoten einer im Raume beschriebenen und durch zwei Gleichungen zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z ausgedrückten Curve, d. h. die Geraden, welchen sich diese Curve ohne Ende nähert, ohne sie jemals treffen zu können, bestimmen. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir zuerst annehmen, daß die nicht zu der Ebene der yz parallelen Asymptoten gesucht würden, und es seien:

$$(46) \qquad y = kx + l, \quad z = Kx + L$$

die Gleichungen einer derselben, so kann man aus den Gleichungen der Curve die Werthe von y und z als Functionen von x ableiten, welche sich für sehr große Zahlenwerthe von x fast auf die durch die Gleichungen (46) gegebenen Werthe von y und z reduciren und unter den Formen:

$$(47) \qquad y = kx + l + i, \quad z = K + L + I$$

erscheinen, wo i und I zwei veränderliche Größen bezeichnen, welche

mit $\frac{1}{x}$ zugleich verschwinden. Wenn man aber $\frac{1}{x}$ gegen die Grenze Null convergiren läßt, so ergibt sich successive aus den Gleichungen (47):

$$(48) \qquad lim\,\frac{y}{x}=k,\quad lim\,\frac{z}{x}=K,$$

$$(49) \qquad lim\,(y-kx)=l,\quad lim\,(z-Kx)=L.$$

Um also die Constanten k, K zu bestimmen, braucht man in den Gleichungen der Curve nur:

$$(50) \qquad y=sx,\quad z=Sx$$

zu setzen und dann die Grenze oder Grenzen zu suchen, gegen welche die Veränderlichen s und S convergiren, während der Zahlenwerth von x ohne Ende wächst. Nachdem man die Constanten k, K gefunden hat, erhält man ferner die Constanten l, L, wenn man in den Gleichungen der Curve

$$(51) \qquad y=kx+t,\quad z=Kx+T$$

setzt und die Grenzen sucht, welchen sich t und T für wachsende Zahlenwerthe von x ohne Ende nähern. Jedem Systeme endlicher Werthe der Größen k, K, l, L entspricht alsdann eine Asymptote der gegebenen Curve.

Schließt man auf dieselbe Weise, indem man aber die Coordinaten x, y, z mit einander vertauscht, so erhält man offenbar die nicht zu der Ebene der $z\,x$ oder zu der Ebene der $x\,y$ parallelen Asymptoten.

Man könnte die Asymptoten einer im Raume beschriebenen Curve auch bestimmen, wenn man erwägt, daß ihre Projectionen auf jede der drei Coordinatenebenen im Allgemeinen Asymptoten der auf diese Ebenen projicirten Curve sind. Nur würde sich die Projection einer der ersten Asymptoten auf eine der drei Coordinatenebenen auf einen Punkt reduciren, wenn diese Asymptote auf dieser Ebene senkrecht wäre und alsdann würde dieser Punkt ein Schließungspunkt der projicirten Curve.

Wenn man z. B. die Hyperbel betrachtet, welche aus dem Durchschnitte einer Ebene und eines Hyperboloides, die resp. durch zwei Gleichungen von der Form:

$$(52) \qquad fx+gy+hz=0,$$

und

$$(53) \qquad Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy=const.$$

ausgedrückt werden, entspringt; so kann man, wenn man sich einer der oben angegebenen Methoden bedient, leicht beweisen, daß diese Hyperbel die Geraden zu Asymptoten hat, welche durch das System der beiden Gleichungen:

$$(54)\quad \begin{cases} fx+gy+hz=0, \\ Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy=0 \end{cases}$$

ausgedrückt werden.

Zum Schlusse dieser Vorlesung wollen wir noch bemerken, daß die Projectionen der Schließungspunkte, Rückkehrpunkte, vorspringenden Punkte, vielfachen Punkte und überhaupt der singulären Punkte einer im Raume beschriebenen Curve auf jede der drei Coordinatenebenen Punkte derselben Art sind, welche aber der projicirten Curve angehören, weswegen wir auch zu dem in der vierten Vorlesung über die singulären Punkte Gesagten hier nichts weiter hinzufügen wollen.

Vierzehnte Vorlesung.

Von den Berührungsebenen und den Normalen der krummen Flächen.

Betrachten wir eine, durch die Gleichung:

$$u = 0 \qquad (1)$$

ausgedrückte krumme Fläche, wo u eine Function der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bezeichnet. Wenn man durch einen auf dieser Fläche gegebenen Punkt (x, y, z) eine zweite Fläche gehen läßt, welche die erste nach einer gewissen Curve schneidet; so ist die in diesem Punkte an die Durchschnittscurve gezogene Tangente der Durchschnitt der beiden, durch die Gleichungen (18) der vorhergehenden Vorlesung ausgedrückten Ebenen. Nun ist aber die eine dieser Ebenen, nämlich die, deren veränderliche Coordinaten ξ, η, ζ der Gleichung:

$$(\xi - x)\frac{du}{dx} + (\eta - y)\frac{du}{dy} + (\zeta - z)\frac{du}{dz} = 0 \qquad (2)$$

Genüge leisten, offenbar von der Natur der zweiten krummen Fläche und folglich auch von der der Durchschnittscurve unabhängig. Folglich liegen die Tangenten aller auf der ersten krummen Fläche durch den Punkt (x, y, z) gezogenen Curven für diesen Punkt in derselben Ebene. Diese Ebene, deren Gleichung mit der Gleichung (2) übereinstimmt, wird die an die erste krumme Fläche durch den gegebenen Punkt gelegte Berührungsebene getrennt.*)

Die eben gemachten Schlüsse finden immer statt und die Gleichung der Berührungsebene würde dieselbe Form behalten, wenn die Veränderlichen x, y, z in der Function u nicht mehr rechtwinklige, sondern schiefwinklige Coordinaten bezeichneten.

Wenn man, indem man x, y und z zu gleicher Zeit variiren läßt, die endliche Gleichung der gegebenen Fläche differenzirt, so erhält man ihre Differenzialgleichung der ersten Ordnung, nämlich:

*) Die eben zur Bestimmung der Berührungsebene einer krummen Fläche angegebene Methode hat Ampère zuerst in seinen Vorlesungen an der polytechnischen Schule gegeben.

$$(3) \qquad \frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz=0.$$

Vergleicht man diese letzte Gleichung mit der Gleichung (2) so ergibt sich, daß man, um die Gleichung der Berührungsebene zu erhalten, in der Differenzialgleichung der krummen Fläche nur die endlichen Differenzen $\xi-x$, $\eta-y$, $\zeta-z$ für die Differenziale dx, dy, dz zu setzen braucht.

Wenn man durch den Punkt (x, y, z) der gegebenen krummen Fläche eine auf der Berührungsebene senkrechte Gerade zieht, so wird dieselbe die diesem Punkte entsprechende Normale genannt. Es seien λ, μ, ν die Winkel, welche diese, nach einem gewissen Sinne verlängerte Normale mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet; so kann die Gleichung der Berührungsebene auf die Form gebracht werden:

$$(4) \qquad (\xi-x)\cos\lambda+(\eta-y)\cos\mu+(\zeta-z)\cos\nu=0$$

(s. Vorer. Aufg. 4). Sollen nun die Gleichungen (2) und (4) übereinstimmen und für beliebige Werthe der Veränderlichen ξ, η dieselben Werthe von $\zeta-z$ geben, so ist erforderlich und hinreichend, daß die Cosinus der Winkel λ, μ, ν den beiden Gleichungen:

$$(5) \qquad \frac{\cos\lambda}{\cos\nu}=\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dz}\right)}, \qquad \frac{\cos\mu}{\cos\nu}=\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{du}{dz}\right)},$$

welche beide in der Gleichung:

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\cos\lambda}{\left(\frac{du}{dx}\right)}=\dfrac{\cos\mu}{\left(\frac{du}{dy}\right)}=\dfrac{\cos\nu}{\left(\frac{du}{dz}\right)} \\ =\pm\dfrac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]}} \end{cases}$$

enthalten sind, Genüge leisten.

Setzt man nun der Kürze wegen:

$$(7) \qquad R=\pm\sqrt{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]},$$

so ergibt sich aus der Gleichung (6), wenn man das doppelte Zeichen auf das Zeichen + reducirt:

$$(8) \qquad \cos\lambda=\frac{1}{R}\frac{du}{dx}, \quad \cos\mu=\frac{1}{R}\frac{du}{dy}, \quad \cos\nu=\frac{1}{R}\frac{du}{dz},$$

und wenn man für das doppelte Zeichen das Zeichen − setzt:

$$(9)\quad \cos\lambda = -\frac{1}{R}\frac{du}{dx},\quad \cos\mu = -\frac{1}{R}\frac{du}{dy},\quad \cos\nu = -\frac{1}{R}\frac{du}{dz}.$$

Um ferner die Winkel λ, μ, ν zu bestimmen, muß man entweder die Gleichungen (8), oder die Gleichungen (9) anwenden, je nachdem die Normale von dem Punkte (x, y, z) aus nach dem einen oder andern Sinne verlängert ist.

Ist die Formel (6) einmal aufgestellt, so lassen sich die beiden Gleichungen der durch den Punkt (x, y, z) gezogenen Normale leicht finden. Denn wenn man die veränderlichen Coordinaten dieser Geraden mit ξ, η, ζ bezeichnet, so hat man nach dem, was in den Vorerinnerungen S. 6 und 7 gesagt ist:

$$(10)\quad \frac{\xi - x}{\cos\lambda} = \frac{\eta - y}{\cos\mu} = \frac{\zeta - z}{\cos\nu},$$

und wenn man für die Größen:

$$\cos\lambda,\quad \cos\mu,\quad \cos\nu$$

die partiellen abgeleiteten Functionen:

$$\frac{du}{dx},\quad \frac{du}{dy},\quad \frac{du}{dz}$$

substituirt, welche ihnen proportional sind, so erhält man die Gleichung:

$$(11)\quad \frac{\xi - x}{\left(\frac{du}{dx}\right)} = \frac{\eta - y}{\left(\frac{du}{dy}\right)} = \frac{\zeta - z}{\left(\frac{du}{dz}\right)},$$

welche die beiden gesuchten Gleichungen in sich begreift.

Der spitze Winkel, welchen die Berührungsebene in Punkte (x, y, z) mit der Ebene der xy bildet, wird die Neigung der Tangente oder die der krummen Fläche in diesem Punkte genannt. Dieser Winkel ist offenbar dem spitzen Winkel gleich, welchen die Normale mit der Axe der z bildet. Wenn man diese Neigung der krummen Fläche im Punkte (x, y, z) mit τ bezeichnet, so ist der Werth von τ einer von denen, welche die Gleichungen (8) und (9) für den Winkel ν geben. Man hat folglich:

$$(12)\quad \cos\tau = \pm\frac{1}{R}\frac{du}{dz},\qquad (13)\quad \sec\tau = \pm\frac{R}{\left(\frac{du}{dz}\right)},$$

wo man für das Zeichen $\pm$ das Zeichen $+$ nehmen muß, wenn der Werth von $\frac{du}{dz}$ positiv ist, und das Zeichen $-$ im entgegengesetzten Falle.

Es verdient bemerkt zu werden, daß die Gleichungen (2), (3), (6), (8), (9) und (11) nicht geändert würden, wenn die gegebene

krumme Fläche nicht durch die Gleichung (1), sondern durch die folgende:

$$u = c, \tag{14}$$

wo c eine constante Größe bezeichnet, ausgedrückt würde.

Wenn man in der Gleichung (2) die Coordinaten ξ, η, ζ als constant und die Coordinaten x, y, z als veränderlich betrachtet, so erhält man nicht mehr die Gleichung der Berührungsebene der krummen Fläche (1) oder (14), sondern die Gleichung einer andern krummen Fläche, welche der geometrische Ort der Punkte ist, wo die aus der Gleichung (14) abgeleiteten krummen Flächen, indem man der Constante c successive verschiedene Werthe beilegt, von den Ebenen berührt werden, welche den Punkt (ξ, η, ζ) enthalten.

Desgleichen, wenn man in der Gleichung (11) die Coordinaten x, y, z allein als veränderlich betrachtet, so erhält man nicht mehr die Gleichungen der Normale der krummen Fläche (1) oder (14), sondern die Gleichungen einer Curve, welche der geometrische Ort der Punkte ist, wo die eben erwähnten Flächen von den im Punkte (ξ, η, ζ) zusammenlaufenden Normalen geschnitten werden.

Wenn die Gleichung der gegebenen krummen Fläche unter der Form:

$$z = f(x, y) \text{ oder } f(x, y) - z = 0 \tag{15}$$

erscheinen soll, so braucht man in der Gleichung (1) nur

$$u = f(x, y) - z \tag{16}$$

zu setzen. Wenn man in diesem besondern Falle der Kürze wegen

$$\frac{df(x, y)}{dx} = p, \quad \frac{df(x, y)}{dy} = q \tag{17}$$

setzt, so hat man offenbar:

$$\frac{du}{dx} = p, \quad \frac{du}{dy} = q, \quad \frac{du}{dz} = -1, \tag{18}$$

und die Differenzialgleichung der krummen Fläche verwandelt sich in:

$$p\,dx + q\,dy - dz = 0, \text{ oder } dz = p\,dx + q\,dy. \tag{19}$$

Ferner reducirt sich die Gleichung der Berührungsebene auf:

$$\xi - z = p(\xi - x) + q(\eta - y), \tag{20}$$

und aus der Gleichung (11) folgt:

$$\frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = z - \zeta, \tag{21}$$

oder was dasselbe ist:

$$\xi - x + p(\xi - z) = 0 \text{ und } \eta - y + q(\xi - z) = 0. \tag{22}$$

Alsdann geben auch die Gleichungen (12) und (13):

$$\cos\tau = \frac{1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}, \tag{23}$$

$$\sec\tau = \sqrt{(1+p^2+q^2)}. \tag{24}$$

Wenn endlich die betrachtete krumme Fläche durch eine Gleichung von der Form:

$$u+v+w+\ldots = o, \tag{25}$$

wo u, v, w, ... verschiedene Functionen der Veränderlichen x, y, z bezeichnen, ausgedrückt würde, so müßte man in die Gleichungen (2), (3), (6), (8), (9) und (11) für u offenbar $u+v+w+\ldots$ setzen, und man erhielte folglich für die Gleichung der Berührungsebene:

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}\right)\xi+\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dy}\right)\eta \\ &+\left(\frac{du}{dz}+\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dz}\right)\zeta = x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}+z\frac{du}{dz} \\ &+x\frac{dv}{dx}+y\frac{dv}{dy}+z\frac{dv}{dz}+x\frac{dw}{dx}+y\frac{dw}{dy}+z\frac{dw}{dz} \\ &+\ldots \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Wenn in der Gleichung (25) die Größen u, v, w, ... ganze und homogene Functionen sind und zwar die erste vom Grade m, die zweite vom Grade $m-1$, die dritte vom Grade $m-2$, u. s. f., so drückt diese Gleichung eine sogenannte krumme Fläche des $m$ten Grades aus. Alsdann folgt aus der Formel (26) und aus dem Lehrsatze über die homogenen Functionen:

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}+\ldots\right)\xi+\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dy}+\ldots\right)\eta \\ &+\left(\frac{du}{dz}+\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dz}+\ldots\right)\zeta = mw+(m-1)v+(m-2)w+\ldots \end{aligned}\right. \tag{27}$$

und wenn man die Gleichung (25) berücksichtigt:

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}+\ldots\right)\xi+\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dy}+\ldots\right)\eta \\ &+\left(\frac{du}{dz}+\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dz}+\ldots\right)\zeta = mc-v-2w-\text{u.s.w.} \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Wenn man in der Gleichung (28) die Coordinaten ξ, μ, ζ als constant und die Coordinaten x, y, z als veränderlich betrachtet, so erhält man nicht mehr die Gleichung einer Berührungsebene der krummen Fläche (25), sondern die Gleichung einer zweiten krummen Fläche vom Grade $m-1$, welche die Berührungspunkte der ersten mit den durch den Punkt (ξ, η, ζ) gelegten Berührungsebenen enthält. Wenn die erste Fläche vom zweiten Grade ist, so reducirt

sich die zweite auf eine Fläche vom ersten Grade, d. h. auf eine Ebene. Man kann also folgenden Lehrsatz aussprechen:

Lehrsatz. Wenn man durch einen gegebenen Punkt an eine Fläche des zweiten Grades Berührungsebenen legt, so liegen alle Berührungspunkte auf einer ebenen Curve.

Wenn man $v=0$, $w=0$, etc., $\ldots$ setzt, so reducirt sich die Gleichung (25) auf die Gleichung (14), in welcher u eine ganze und homogene Function des Grades m bezeichnet und die Gleichung der Berührungsebene oder die Gleichung (28) verwandelt sich in:

$$\frac{du}{dx}\xi+\frac{du}{dy}\eta+\frac{du}{dz}\zeta=mc. \tag{29}$$

Es kann geschehen, daß die durch einen gegebenen Punkt (x, y, z) an eine krumme Fläche gelegte Berührungsebene sie nur in diesem Punkte trifft, oder daß sie dieselbe nach einer oder mehrern Linien berührt, oder sie endlich an einer andern Stelle durchschneidet. Wenn man in den beiden letzten Fällen die Gleichung der gegebenen krummen Fläche durch:

$$f(x, y, z)=0, \tag{30}$$

und die veränderlichen Coordinaten einer der Linien, nach welcher diese Fläche von der Berührungsebene berührt oder durchschnitten wird, durch ξ, η, ζ bezeichnet, so müssen die Coordinaten ξ, η, ζ den beiden Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} f(\xi, \eta, \zeta)=0, \\ \frac{df(x, y, z)}{dx}(\xi-x)+\frac{df(x, y, z)}{dy}(\eta-y) \\ +\frac{df(x, y, z)}{dz}(\zeta-z)=0 \end{array}\right. \tag{31}$$

offenbar Genüge leisten. Wenn man auf der krummen Fläche eine oder mehrere gerade Linien ziehen kann, welche durch den Punkt (x, y, z) gehen, so fällt jede dieser Linien nothwendig mit ihrer Tangente zusammen und liegt folglich in der Berührungsebene. Eliminirt man alsdann ζ zwischen den Gleichungen (31), so erhält man eine Gleichung zwischen den Veränderlichen ξ, η, welcher Genüge geschieht, wenn man für η eine lineäre Function von ξ setzt. Wenn dieses nicht blos der Fall ist für einen bestimmten Punkt der betrachteten Fläche, sondern für alle Punkte dieser Fläche und folglich für alle Werthe von x, y, z, welche der Gleichung (30) Genüge leisten; so gehört diese Fläche zu denen, welche durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden können und welche man deswegen geradlinige Flächen nennt. Unter den Flächen dieser Art sind besonders die developpabeln Flächen zu bemerken, welche von jeder Berührungsebene nach einer Erzeugungslinie berührt werden. Unter den developpabeln Flächen unterscheidet man insbeson-

dere die cylindrischen Flächen, welche durch die Bewegung einer stets zu sich selbst parallel bleibenden Geraden erzeugt werden, und die Kegelflächen, deren Erzeugungslinie beständig durch denselben Punkt geht. Die geradlinigen Flächen, welche nicht developpabel sind, werden windschiefe Flächen genannt. Wir wollen nun von den vorhin abgeleiteten Formeln einige Anwendungen geben.

Beispiel 1. Zuerst wollen wir die aus dem Anfangspunkte als Mittelpunkt mit dem Halbmesser R beschriebene Kugelfläche betrachten, welche durch die Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{32}$$

ausgedrückt wird. Die Differenzialgleichung dieser Fläche ist:

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0. \tag{33}$$

Man erhält also für die Gleichung der Berührungsebene:

$$\left\{\begin{array}{l} x(\xi - x) + y(\eta - y) + z(\zeta - z) = 0, \\ \text{oder } x\xi + y\eta + z\zeta = R^2, \end{array}\right. \tag{34}$$

während die Gleichungen der Normale in der Formel:

$$\frac{\xi - x}{x} = \frac{\eta - y}{y} = \frac{\zeta - z}{z},$$

welche man auf:

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta}{z} \tag{35}$$

reduciren kann, enthalten sind.

Die dem Punkte (x, y, z) entsprechende Neigung τ kann ferner durch eine der Gleichungen:

$$\cos\tau = \pm\frac{z}{R}, \quad \sec\tau = \pm\frac{R}{z}. \tag{36}$$

bestimmt werden. Wenn man in den Gleichungen (34) x, y, z allein als veränderlich betrachtet, so drückt die erste eine neue Kugelfläche aus, welche die Entfernung des Punktes (ξ, η, ζ) vom Anfangspunkte zum Durchmesser hat und die zweite drückt eine neue Ebene aus. Diese Ebene schneidet die beiden Kugelflächen nach einem einzigen Kreise, welcher der geometrische Ort der Berührungspunkte der gegebenen Kugelfläche mit den an dieselbe durch den Punkt (ξ, η, ζ) gelegten Berührungsebenen ist.

Was die Gleichung (35) anlangt, so gibt sie immer dieselbe Linie, man mag die Coordinaten des Punktes (ξ, η, ζ) oder die des Punktes (x, y, z) als veränderlich betrachten und sie drückt in allen Fällen eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade aus, wie auch zu erwarten war.

Beispiel 2. Wir wollen ferner annehmen, die gegebene krumme Fläche wäre eine cylindrische, deren Erzeugungslinie zu der Axe der z parallel und deren Basis eine in der Ebene der xy lie-

gende Curve ist; so wird diese Fläche sowohl als ihre Basis durch eine Gleichung von der Form:

$$f(x, y) = 0 \tag{37}$$

ausgedrückt. Setzt man also der Kürze wegen:

$$\frac{df(x, y)}{dx} = \varphi(x, y), \quad \frac{df(x, y)}{dy} = \chi(x, y), \tag{38}$$

so wird die Gleichung der Berührungsebene:

$$(\xi - x)\varphi(x, y) + (\eta - y)\chi(x, y) = 0. \tag{39}$$

Ferner folgt aus der Gleichung (11):

$$\frac{\xi - x}{\varphi(x, y)} = \frac{\eta - y}{\chi(x, y)} = \frac{\zeta - z}{0},$$

und man erhält folglich für die Gleichungen der Normale:

$$(\xi - x)\chi(x, y) - (\eta - y)\varphi(x, y) = 0, \quad \zeta = z. \tag{40}$$

Aus den Gleichungen (39) und (40) folgt offenbar, daß die Berührungsebene immer zu der Axe der z parallel und die Normale immer auf dieser Axe senkrecht ist. Da ferner die Gleichung (39) von z unabhängig ist, so wird die krumme Fläche von jeder Berührungsebene nach einer Erzeugungslinie berührt, was leicht vorher zu sehen war.

Wenn man eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel zur Basis der cylindrischen Fläche nimmt, so ist sie die Oberfläche eines parabolischen, elliptischen oder hyperbolischen Cylinders.

Beispiel 3. Betrachten wir ferner eine Kegelfläche, deren Spitze, d. h. der gemeinschaftliche Punkt aller Erzeugungslinien mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfällt und nehmen wir zur Basis derselben eine ebene Curve, deren Ebene zu der der xy parallel ist, und die Halbaxe der positiven z in der Entfernung 1 vom Anfangspunkte schneidet. Endlich seien ξ, η die veränderlichen Coordinaten dieser Curve und:

$$f(\xi, \eta) = 0 \tag{41}$$

ihre Gleichung. Die Erzeugungslinie, welche durch den Punkt (ξ, η) dieser Curve geht, wird offenbar durch die beiden Gleichungen:

$$\frac{x}{z} = \xi, \quad \frac{y}{z} = \eta \tag{42}$$

ausgedrückt. Wenn man nun zwischen diesen letzten Gleichungen und der Gleichung (41) ξ und η eliminirt, so ist klar, daß die resultirende Gleichung:

$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0 \tag{43}$$

für alle Punkte aller Erzeugungslinien erfüllt wird, und sie drückt

folglich die Kegelfläche aus. Wenn man nun dieſelben Bezeichnungen, wie im vorhergehenden Beiſpiele anwendet, ſo findet man für die Differenzialgleichung der Kegelfläche:

$$(44)\qquad \varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)dx+\chi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)dy$$
$$-\frac{1}{z}\left[x\varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)+y\chi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)\right]dz=0.$$

Bezeichnen nun ξ,η,ζ nicht mehr die Coordinaten einer auf der Kegelfläche beſchriebenen Curve, ſondern die Coordinaten der Berührungsebene oder der Normale im Punkte (x,y,z), ſo ergibt ſich 1) daß die Gleichung der Berührungsebene auf:

$$(45)\qquad \begin{cases} \xi\varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)+\eta\chi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)= \\ \left[\frac{x}{z}\varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)+\frac{y}{z}\chi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)\right]\zeta, \end{cases}$$

reducirt werden kann, und 2) daß die Gleichungen der Normale in der Formel:

$$(46)\qquad \begin{cases} \frac{\xi-x}{\varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)}=\frac{\eta-y}{\chi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)} \\ =\frac{z(z-\zeta)}{x\varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)+y\chi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)} \end{cases}$$

enthalten ſind. Da die Gleichung (45) nicht geändert wird, wenn man darin x,y und z ſo variiren läßt, daß die Verhältniſſe $\frac{x}{z},\frac{y}{z}$ conſtant bleiben, ſo kann man behaupten, daß jede Berührungsebene die krumme Fläche nach einer Erzeugungslinie berührt, was leicht vorher einzuſehen war.

Zu demſelben Schluſſe würde man gelangen, wenn man erwägt, daß in dem gegenwärtigen Falle die Gleichungen (31) durch die folgenden erſetzt werden:

$$(46)\qquad \begin{cases} f\left(\frac{\xi}{\zeta},\frac{\eta}{\zeta}\right)=0, \\ \left(\frac{\xi}{\zeta}-\frac{x}{z}\right)\varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{\eta}{\zeta}-\frac{y}{z}\right)\chi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0, \end{cases}$$

und da die Coordinaten x,y,z immer der Gleichung (43) Genüge leiſten müſſen; ſo iſt klar, daß man den Gleichungen (47) Genüge leiſtet, wenn man:

$$(48)\qquad \frac{\xi}{\zeta}=\frac{x}{z},\quad \frac{\eta}{\zeta}=\frac{y}{z}$$

nimmt. Nun drücken aber diese beiden letzten Gleichungen zwischen den veränderlichen Coordinaten ξ, η, ζ offenbar eine gerade Linie aus, welche durch die Spitze und durch den Punkt x, y, z der Kegelfläche geht, d. h. eine Erzeugungslinie dieser Fläche.

Wenn die Kegelfläche die eines geraden Kegels mit kreisförmiger Basis sein soll, so braucht man nur die Curve (41) auf einen Kreisumfang zu reduciren, dessen Mittelpunkt auf der Axe der z liegt. Wenn man den Halbmesser dieses Kreises mit R bezeichnet, so verwandeln sich die Formeln (41) und (42) resp. in:

$$\xi^2 + \eta^2 = R^2, \tag{49}$$

$$x^2 + y^2 = R^2 z^2. \tag{50}$$

Alsdann kann die Differenzialgleichung der Kegelfläche auf die Form gebracht werden:

$$x\,dx + y\,dy = R^2 z\,dz. \tag{51}$$

Man findet also für die Gleichung der Berührungsebene:

$$x(\xi - x) + y(\eta - y) = R^2 z(\xi - z), \text{ oder} \tag{52}$$

$$x\xi + y\eta = R^2 z\zeta, \tag{53}$$

und die Gleichungen der Normale sind in der Formel:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\xi - x}{x} = \dfrac{\eta - y}{y} = \dfrac{\xi - z}{-R^2 z} \\ = \dfrac{x(\xi - x) + y(\eta - y) + z(\xi - z)}{x^2 + y^2 - R^2 z^2} \\ = \dfrac{x(\xi - x) + y(\eta - y) + z(\xi - z)}{0}, \end{array}\right. \tag{54}$$

enthalten, aus welcher folgt:

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y},\ x(\xi - x) + y(\eta - y) + z(\xi - z) = 0. \tag{55}$$

Endlich kann die Neigung τ der krummen Fläche durch eine der Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\tau = \dfrac{R}{\sqrt{(1 + R^2)}},\ \sec\tau = \sqrt{\left(1 + \dfrac{1}{R^2}\right)}, \\ \operatorname{tang}\tau = \dfrac{1}{R} \end{array}\right. \tag{56}$$

bestimmt werden. Aus diesen letzten Gleichungen folgt, daß die Neigung der krummen Fläche constant und daß sie, wie zu erwarten, dem Complemente des Winkels zwischen der Axe und der Erzeugungslinie der Kegelfläche gleich ist. Ferner folgt offenbar aus den Gleichungen (55), 1) daß die Projection der Normale auf die Ebene der xy mit der Projection der Erzeugungslinie zusammenfällt und

2) daß diese Normale in der Berührungsebene der Kugelfläche liegt, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt ist und welche durch den Punkt (x, y, z) geht.

Die Gleichung (52) drückt, wenn man darin x, y und z allein als veränderlich betrachtet, ein Hyperboloid mit einem Fache aus, dessen reelle Axen zu den Axen der x und y parallel sind und worin ein Durchmesser mit der Entfernung des Anfangspunktes vom Punkte (ξ, η, ζ) zusammenfällt. In demselben Falle drückt die Gleichung (53) eine neue Ebene aus, welche durch den Anfangspunkt geht. Dieses Hyperboloid und diese Ebene schneiden die Kegelfläche im Allgemeinen nach zwei Erzeugungslinien, welche die Berührungslinien dieser Fläche mit den durch den Punkt (ξ, η, ζ) gelegten Berührungsebenen sind.

Was die Gleichungen (55) anlangt, so drücken sie offenbar, wenn man darin x, y, z allein als veränderlich betrachtet, einen Kreis aus, welcher die Entfernung des Anfangspunktes von dem Punkte (ξ, η, ζ) zum Durchmesser hat, und welcher die Kegelfläche in demselben Orte schneidet, als das von diesem Punkte auf die Kegelfläche gefällte Perpendikel.

Wenn man für die Gleichung einer beliebigen krummen Fläche die Gleichung (50) substituirt, so reduciren sich die Gleichungen (31) auf:

$$(57) \qquad \xi^2 + \eta^2 = R^2 \zeta^2 \quad , x\xi + y\eta = R^2 z\zeta.$$

Wenn man zwischen diesen letzten Gleichungen und der Gleichung (50) z und ζ eliminirt, so findet man:

$$(x^2 + y^2)(\xi^2 + \eta^2) - (x\xi + y\eta)^2 = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$(x\eta - \xi y)^2 = 0;$$

und hieraus folgt:

$$(58) \qquad \frac{\xi}{\eta} = \frac{x}{y}.$$

Wenn man die Gleichung (58) mit der zweiten der Gleichungen (57) verbindet, so sind die veränderlichen Coordinaten ξ, η, ζ offenbar die Coordinaten einer Geraden, welche durch den Anfangspunkt und durch den Punkt (x, y, z) geht. Diese Gerade ist in der That die einzige gemeinschaftliche Linie der Kegelfläche und der durch den Punkt (x, y, z) an sie gelegten Berührungsebene. Wenn man eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel zur Basis der Kegelfläche nähme, so wäre sie die Oberfläche eines paraboliſchen, elliptiſchen oder hyperboliſchen Kegels.

Beiſpiel 4. Wir wollen durch a, b, c drei positive Constanten bezeichnen, und die durch die endliche Gleichung:

$$(59) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}$$

ausgedrückte krumme Fläche betrachten. Diese krumme Fläche, welche Ellipsen als Durchschnitte gibt, wenn man sie mit Ebenen schneidet, welche auf der Axe der z senkrecht sind, und Parabeln, wenn man sie mit Ebenen durchschneidet, welche auf der Axe der x oder der y senkrecht sind, ist die Oberfläche eines elliptischen Paraboloides. Da man, wenn man die Gleichung (59) differenzirt,

$$\frac{x}{a^2}dx+\frac{y}{b^2}dy=\frac{1}{c}dz \tag{60}$$

findet, so ist die Gleichung der Berührungsebene des elliptischen Paraboloides:

$$\frac{x}{a^2}(\xi-x)+\frac{y}{b^2}(\eta-y)=\frac{1}{c}(\zeta-z), \tag{61}$$

oder:

$$\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}=\frac{\xi+z}{c}. \tag{62}$$

Was die Gleichungen der Normale anlangt, so sind sie in der Formel enthalten:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{a^2(\xi-x)}{x}=\dfrac{b^2(\eta-y)}{y}=-c(\zeta-z)\\ \qquad=\dfrac{x(\xi-x)+y(\eta-y)+2z(\zeta-z)}{0},\end{array}\right. \tag{63}$$

aus welcher folgt:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{a^2(\xi-x)}{x}=\dfrac{b^2(\eta-y)}{y},\\ x(\xi-x)+y(\eta-y)+2z(\zeta-z)=0.\end{array}\right. \tag{64}$$

Die letzte der Gleichungen (64) zeigt, daß die Normale des elliptischen Paraboloides in einem gegebenen Punkte in der durch diesen Punkt an ein Rotationsellipsoid, dessen Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte zusammenfällt, und dessen Gleichung von der Form

$$x^2+y^2+2z^2=const.$$

ist, gelegten Berührungsebene liegt.

Wenn man in der Gleichung (61) x, y und z allein als veränderlich betrachtet, so drückt sie ein zweites Paraboloid von derselben Form, als das erste aus, aber dessen Axe mit der durch die Gleichungen:

$$x=\frac{\xi}{2},\quad y=\frac{\eta}{2} \tag{65}$$

ausgedrückten Geraden zusammenfällt und dessen Scheitel in einem Punkte dieser Axe liegt, welcher der Ordinate:

$$z = \zeta - \frac{c}{4}\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}\right) \tag{66}$$

entspricht. In demselben Falle drückt die Gleichung (62) eine neue Ebene aus, welche die Axe der z in einem Punkte trifft, dessen Ordinate $z = -\zeta$ ist. Diese neue Ebene schneidet ferner die beiden Paraboloide nach einer Ellipse, welche der geometrische Ort der Berührungspunkte des gegebenen Paraboloides mit den durch den Punkt (ξ, η, ζ) an dasselbe gelegten Berührungsebenen ist.

Um zu erfahren, ob die durch den Punkt (x, y, z) an die gegebene krumme Fläche gelegte Berührungsebene dieselbe durchschneidet oder nicht, braucht man nur zu untersuchen, ob man den Veränderlichen ξ, η, ζ mehrere Systeme reeller Werther beilegen kann, welche zu gleicher Zeit den beiden Gleichungen:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 2\frac{\zeta}{c}, \quad \frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} = \frac{\zeta + z}{c} \tag{67}$$

Genüge leisten können. Wenn man aber zwischen diesen letzten Gleichungen und der Gleichung (59) die Veränderlichen ζ und z eliminirt, so findet man:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\left(\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2}\right) = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$\left(\frac{\xi - x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\eta - y}{b}\right)^2 = 0,$$

Der vorhergehenden Gleichung kann man nur Genüge leisten, wenn man

$$\xi = x, \quad \eta = y$$

setzt, und alsdann folgt aus den Gleichungen (59) und (67):

$$\zeta = z.$$

Folglich ist der Punkt (x, y, z) der einzige gemeinschaftliche Punkt des Paraboloides und der Berührungsebene, was leicht vorher einzusehen war.

Beispiel 5. Wir wollen ferner die durch die endliche Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c} \tag{68}$$

ausgedrückte krumme Fläche betrachten. Diese Fläche, welche Hyperbeln als Durchschnitte gibt, wenn man sie mit Ebenen schneidet, die zu der Ebene der xy parallel sind und Parabeln, wenn sie mit Ebenen geschnitten wird, welche auf der Axe der x oder der y senkrecht sind, ist die Oberfläche eines hyperbolischen Paraboloides. Sie schneidet die Ebene der xy offenbar nach zwei geraden Linien, welche durch die Gleichung:

(69) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

oder durch die sich daraus ergebenden beiden Gleichungen:

(70) $$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad (71)\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

ausgedrückt werden. Verfährt man nun, wie im vierten Beispiele, so erhält man für die Gleichung der Berührungsebene des hyperbolischen Paraboloides:

(72) $$\frac{x(\xi - x)}{a^2} + \frac{y(\eta - y)}{b^2} = \frac{\zeta + z}{c}, \text{ oder}$$

(73) $$\frac{x\xi}{a^2} - \frac{y\eta}{b^2} = \frac{\zeta + z}{c};$$

und für die Gleichungen der Normale:

(74) $$\begin{cases} \dfrac{a^2(\xi - x)}{x} + \dfrac{b^2(\eta - y)}{y} = 0, \\ x(\xi - x) + y(\eta - y) + 2z(\zeta - z) = 0. \end{cases}$$

Die letzte der Gleichungen (74) zeigt, daß die Normale des hyperbolischen Paraboloides in der Berührungsebene eines Rotationsellipsoides liegt, dessen Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte zusammenfällt und dessen Gleichung von der Form ist:

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = const.$$

Wenn man in der Gleichung (72) die Coordinaten x, y, z allein als veränderlich betrachtet, so drückt sie ein zweites Paraboloid von derselben Form als das erste aus, aber dessen Axe mit der Geraden zusammenfällt, welche durch die Gleichungen (65) ausgedrückt wird, und der Scheitel desselben mit einem auf dieser Axe liegenden, der Ordinate:

(75) $$z = \xi - \frac{c}{4}\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}\right)$$

entsprechenden Punkte. In demselben Falle drückt die Gleichung (73) eine neue Ebene aus, welche die Axe der z in einem Punkte schneidet, dessen Ordinate $= -\zeta$ ist. Diese neue Ebene schneidet ferner die beiden Paraboloide nach einer Hyperbel, welche der geometrische Ort der Berührungspunkte des gegebenen Paraboloides mit den durch den Punkt (ξ, η, ζ) an dasselbe gelegten Berührungsebenen ist.

Wenn man die durch den Punkt (x, y, z) der gegebenen Fläche gehenden Linien haben will, welche ihr und der Berührungsebene gemein sind, so braucht man nur die Bedingung aufzustellen, daß die veränderlichen Coordinaten ξ, η, ζ den beiden Gleichungen:

$$(76) \qquad \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 2\frac{\xi}{c}, \quad \frac{x\xi}{a^2} - \frac{y\eta}{b^2} = \frac{\xi + z}{c}$$

Genügen müssen. Wenn man zwischen diesen letzten Gleichungen und der Gleichung (68) die Coordinaten ξ und z eliminirt, so erhält man:

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2\left(\frac{x\xi}{a^2} - \frac{y\eta}{b^2}\right) = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$(77) \qquad \left(\frac{\xi - x}{a}\right)^2 = \left(\frac{\eta - y}{b}\right)^2;$$

und hieraus folgt:

$$(78) \qquad \frac{\xi - x}{a} = \frac{\eta - y}{b}, \text{ oder:}$$

$$(79) \qquad \frac{\xi - x}{a} = -\frac{\eta - y}{b}.$$

Wenn man die Gleichungen (78) und (79) successive mit der zweiten der Gleichungen (76) verbindet, so erhält man zwei Systeme von Gleichungen, welche zwei auf dem Paraboloide durch den Punkt (x, y, z) gezogene Gerade ausdrücken. Wenn sich dieser Punkt bewegt, so erzeugt jede der beiden Geraden ein hyperbolisches Paraboloid, wenn sie sich so bewegt, daß ihre Projection auf der Ebene der xy immer zu einer der Geraden parallel bleibt, nach welchen diese Ebene das Paraboloid schneidet.

Es ist wohl zu bemerken, daß alle Erzeugungslinien die Ebene der xy schneiden und daß die Untersuchung ihrer Gleichungen vereinfacht wird, wenn man annimmt, daß der Punkt (x, y, z) in dieser Ebene, d. h. auf einer der Geraden (70) oder (71) liegt. Alsdann ergibt sich unmittelbar, daß ein erstes System von Erzeugungslinien durch die Gleichungen:

$$(80) \qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad \frac{x\xi}{a^2} - \frac{y\eta}{b^2} = \frac{\xi}{c}, \quad \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 2\frac{\xi}{c},$$

welche man auf:

$$(81) \qquad \frac{\xi}{a} - \frac{\eta}{b} = \frac{a}{x}\frac{\xi}{c}, \quad \frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} = 2\frac{x}{a}$$

reduciren kann, und ein zweites System durch die Gleichungen:

$$(82) \qquad \frac{x}{a} = -\frac{y}{b}, \quad \frac{x\xi}{a^2} - \frac{y\eta}{b^2} = \frac{\xi}{c}, \quad \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 2\frac{\xi}{c},$$

welche man auf:

(83) $$\frac{\xi}{a}+\frac{\eta}{b}=\frac{a}{x}\frac{\zeta}{c},\quad \frac{\xi}{a}-\frac{\eta}{b}=2\frac{x}{a}$$

reduciren kann, ausgedrückt wird. Ferner ist zu bemerken, daß das Verhältniß $\frac{2x}{a}$ für dieselbe Erzeugungslinie constant bleibt und bei dem Uebergange von der einen Erzeugungslinie zu der andern den Werth verändert. Dieses Verhältniß ist folglich eine sogenannte willkührliche Constante. Wenn man diese Constante durch $\mathfrak{C}$ bezeichnet und außerdem in den Gleichungen (81) und (83) x, y, z statt ξ, η, ζ setzt, so verwandeln sich diese Gleichungen resp. in:

(84) $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\mathfrak{C},\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{2z}{\mathfrak{C}c},$$

oder:

(85) $$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\mathfrak{C},\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{2z}{\mathfrak{C}c}.$$

Man kann sich leicht direct überzeugen, daß jede der, durch das System der Gleichungen (84) oder (85) ausgedrückten Geraden ganz in der Oberfläche des hyperbolischen Paraboloides liegt; denn wenn man entweder die Gleichungen (84), oder die Gleichungen (85) mit einander multiplicirt, so erhält man offenbar die Gleichung (68) wieder.

Da die durch einen gegebenen Punkt der Oberfläche des hyperbolischen Paraboloides gelegte Berührungsebene sie nur in diesem einem Punkte berührt, so ist klar, daß diese Fläche keine developpabele ist und zu den sogenannten windschiefen Flächen gehört.

Beispiel 6. Wenn man das durch die Gleichung:

(86) $$xy=cz$$

ausgedrückte hyperbolische Paraboloid betrachtet, so erhält man für die Gleichung der Berührungsebene:

(87) $$y(\xi-x)+x(\eta-y)=c(\zeta+z),$$

oder:

(88) $$x\eta+y\xi=c(\zeta+z);$$

und für die Gleichungen der Normale:

(89) $$\begin{cases} x(\xi-x)=y(\eta-y); \\ x(\xi-x)+y(\eta-y)+2z(\zeta-z)=0. \end{cases}$$

Aus diesen letzten Gleichungen folgt, daß die Normale die gerade Durchschnittslinie der durch den Punkt (x, y, z) an einen hyperbolischen Cylinder und an ein Rotationsellipsoid, welche resp. durch die Gleichungen:

$$x^2-y^2=const.,\quad x^2+y^2+2z^2=const.$$

ausgedrückt werden, gelegten Berührungsebenen ist.

Bezeichnet man ferner die veränderlichen Coordinaten einer der Erzeugungslinien, worin der Punkt (x, y, z) liegt, mit ξ, η, ζ, so hat man:

$$\xi\eta = c\zeta, \quad x\eta + y\xi = c(\zeta + z); \tag{90}$$

und aus den Gleichungen (90) in Verbindung mit der Gleichung (86) folgt:

$$\xi\eta + xy - x\eta - y\xi = 0,$$

oder was daſſelbe iſt:

$$(\xi - x)(\eta - y) = 0. \tag{91}$$

Die beiden Erzeugungslinien werden alſo durch die zweite der Gleichungen (90), verbunden mit einer der Gleichungen:

$$\xi = x, \tag{92}$$

$$\eta = y \tag{93}$$

ausgedrückt, und die eine derſelben iſt beſtändig auf der Axe der x und die andere beſtändig auf der Axe der y ſenkrecht.

Beiſpiel 7. Betrachten wir nun die krumme Fläche des zweiten Grades, welche durch die Gleichung:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = K \tag{94}$$

ausgedrückt wird; ſo iſt die Differenzialgleichung dieſer Fläche:

$$(Ax + Fy + Ez)\,dx + (Fx + By + Dz)\,dy + (Ex + Dy + Cz)\,dz = 0,$$

und für die Gleichung der Berührungsebene erhält man folglich:

$$\left\{\begin{array}{l}(Ax + Fy + Ez)(\xi - x) + (Fx + By + Dz)(\eta - y) \\ + (Ex + Dy + Cz)(\zeta - z) = 0,\end{array}\right. \tag{95}$$

oder:

$$\left\{\begin{array}{l}(Ax + Fy + Ez)\xi + (Fx + By + Dz)\eta \\ + (Ex + Dy + Cz)\zeta = K,\end{array}\right. \tag{96}$$

während die Gleichungen der Normale in der Formel:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\xi - x}{Ax + Fy + Ez} = \dfrac{\eta - y}{Fx + By + Dz} \\ \qquad\qquad = \dfrac{\zeta - z}{Ex + Dy + Cz}\end{array}\right. \tag{97}$$

enthalten ſind. Wenn man in den Gleichungen (95) und (96) die Coordinaten x, y, z allein als veränderlich betrachtet, ſo drückt die erſte eine neue Fläche des zweiten Grades aus, welche der gegebenen ähnlich iſt, und wovon ein Durchmeſſer mit dem vom Anfangspunkte nach dem Punkte (ξ, η, ζ) gezogenen Radiusvector zuſammen-

fällt, und die zweite drückt eine neue Ebene aus. Diese Ebene schneidet die beiden Flächen des zweiten Grades nach einer einzigen Curve, welche der geometrische Ort der Berührungspunkte der gegebenen Fläche mit den an sie durch den Punkt (ξ, η, ζ) gelegten Berührungsebenen ist.

Was die Winkel λ, μ, ν betrifft, welche die durch den Punkt (x, y, z) gezogene Normale mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet, so ergeben sie sich aus der Gleichung (6), welche gibt:

$$(98)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\cos\lambda}{Ax+Fy+Ez} = \dfrac{\cos\mu}{Fx+By+Dz} \\ \qquad\qquad = \dfrac{\cos\nu}{Ex+Dy+Cz}. \end{array} \right.$$

Beispiel 8. Durch a, b, c wollen wir positive Constanten bezeichnen und ein Ellipsoid betrachten, dessen, zu den Coordinatenaxen parallele Axen durch $2a$, $2b$, $2c$ ausgedrückt werden, so ist die Gleichung dieses Ellipsoides:

$$(99)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

und die Gleichung der Berührungsebene:

$$(100)\qquad \frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}+\frac{z\zeta}{c^2}=1,$$

während sich die Gleichungen der Normale aus der Formel:

$$(101)\qquad \frac{a^2(\xi-x)}{x}=\frac{b^2(\eta-y)}{y}=\frac{c^2(\zeta-z)}{z}$$

ergeben. Um ferner zu erfahren, ob die durch den Punkt (x, y, z) gelegte Berührungsebene das Ellipsoid schneidet, oder nicht, braucht man nur zu untersuchen, ob man den Veränderlichen ξ, η, ζ mehrere Systeme reeller Werthe beilegen kann, welche zu gleicher Zeit den beiden Gleichungen:

$$(102)\qquad \frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1,\quad \frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}=1$$

Genüge leisten. Nun folgt aber aus diesen letzten Gleichungen in Verbindung mit der Gleichung (99):

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}\right)$$
$$-\left(\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}\right)^2=0,$$

oder was dasselbe ist:

$$\left(\frac{y\zeta-z\eta}{bc}\right)^2+\left(\frac{z\xi-x\zeta}{ca}\right)^2+\left(\frac{x\eta-y\xi}{ab}\right)^2=0.$$

Um der vorhergehenden Gleichung Genüge zu leisten, muß man:

$$y\xi - z\eta = 0,\ z\xi - x\xi = 0,\ x\eta - y\xi = 0,$$

und folglich:

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta}{z} = \frac{\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} + \frac{z\zeta}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} = 1,$$

d. h.

$$\xi = x,\ \eta = y,\ \zeta = z$$

setzen. Folglich ist der Punkt (x, y, z) der einzige gemeinschaftliche Punkt des Ellipsoides und der Berührungsebene, was leicht vorher zu sehen war.

Beispiel 9. Wir wollen nun die durch die endliche Gleichung:

$$(103) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ oder: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}$$

ausgedrückte krumme Fläche betrachten. Diese Fläche, welche Ellipsen als Durchschnitte gibt, wenn die schneidenden Ebenen auf der Axe der z senkrecht sind und Hyperbeln, wenn sie auf der Axe der x oder der y senkrecht sind, ist die Oberfläche des Hyperboloides mit einem Fache. Wenn man durch den Punkt (x, y, z) eine Berührungsebene und eine Normale an dieses Hyperboloid legt, so erhält man als Gleichung der Berührungsebene:

$$(104) \qquad \frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} - \frac{z\zeta}{c^2} = 1, \text{ oder: } \frac{x\xi}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1 + \frac{z\zeta}{c^2},$$

während die Gleichungen der Normale in der Formel:

$$(105) \qquad \frac{a^2(\xi - x)}{x} = \frac{b^2(\eta - y)}{y} = \frac{c^2(\zeta - z)}{-z}$$

enthalten sind. Um ferner zu erfahren, ob die Berührungsebene dieses Hyperboloid schneidet oder nicht, braucht man nur zu untersuchen, ob man den Veränderlichen ξ, η, ζ mehrere Systeme reeller Werthe beilegen kann, welche den beiden Gleichungen:

$$(106) \qquad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 + \frac{\zeta^2}{c^2},\ \frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} = 1 + \frac{z\zeta}{c^2}$$

zu gleicher Zeit Genüge leisten können. Nun folgt aber aus diesen letzten Gleichungen, in Verbindung mit den Gleichungen (103):

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}\right) - \left(\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2}\right)^2$$
$$= \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{\zeta^2}{c^2}\right) - \left(1 + \frac{z\zeta}{c^2}\right)^2,$$

oder, was daſſelbe iſt:

$$\left(\frac{x\eta - y\xi}{ab}\right)^2 = \left(\frac{\zeta - z}{c}\right)^2, \tag{107}$$

und folglich:

$$\frac{x\eta - y\xi}{ab} = \frac{\zeta - z}{c}, \tag{108}$$

oder:

$$\frac{x\eta - y\xi}{ab} = -\frac{\zeta - z}{c}. \tag{109}$$

Verbindet man ſucceſſive die Gleichungen (108) und (109) mit der zweiten der Gleichungen (106), ſo erhält man zwiſchen den Coordinaten ξ, η, ζ zwei Syſteme von Gleichungen, welche zwei Gerade ausdrücken, die auf dem Hyperboloide durch den Punkt (x, y, z) gezogen ſind. Wenn ſich dieſer Punkt bewegt, ſo bewegt ſich jede der beiden Geraden auch und erzeugt das Hyperboloid mit einem Fache.

Da alle Erzeugungslinien die Ebene der xy treffen, ſo kann man den Punkt (x, y, z) mit einem Punkte der Ellipſe:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{110}$$

nach welcher dieſe Ebene das Hyperboloid ſchneidet, zuſammenfallen laſſen und folglich in den Gleichungen der beiden Syſteme der Erzeugungslinien $z = 0$ ſetzen. Alsdann verwandeln ſich dieſe Gleichungen für das erſte Syſtem in:

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} = 1, \quad \frac{x\eta - y\xi}{ab} = \frac{\xi}{c}, \tag{111}$$

und für das zweite in:

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} = 1, \quad \frac{x\eta - y\xi}{ab} = -\frac{\xi}{c}. \tag{112}$$

Die erſte Gleichung, welche bei dem Uebergange von dem einen Syſteme zum andern dieſelbe bleibt, zeigt offenbar, daß die Projectionen aller Erzeugungslinien auf der Ebene der xy gerade Linien ſind, welche die eben erwähnte Ellipſe berührten.

Wenn man zur Vereinfachung der Rechnungen:

$$x = r\cos p, \quad y = r\sin p, \tag{113}$$

ſetzt, ſo gibt die Gleichung (110):

$$r = \frac{ab}{(a^2\sin^2 p + b^2\cos^2 p)^{\frac{1}{2}}}, \tag{114}$$

und man hat folglich:

$$(115)\quad \begin{cases} x = \dfrac{ab\cos p}{(a^2\sin^2 p + b^2\cos^2 p)^{\frac{1}{2}}}, \\ y = \dfrac{ab\sin p}{(a^2\sin^2 p + b^2\cos^2 p)^{\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

Wenn man die vorhergehenden Werthe von x und y in die Gleichungen (111) und (112) substituirt und dann darin x, y, z für ξ, η, ζ setzt, so verwandeln sich diese Gleichungen resp. in:

$$(116)\quad \begin{cases} \dfrac{b}{a}x\cos p + \dfrac{a}{b}y\sin p = (a^2\sin^2 p + b^2\cos^2 p)^{\frac{1}{2}}, \\ y\cos p - x\sin p = (a^2\sin^2 p + b^2\cos^2 p)^{\frac{1}{2}}\dfrac{z}{c}, \end{cases}$$

und:

$$(117)\quad \begin{cases} \dfrac{b}{a}x\cos p + \dfrac{a}{b}y\sin p = (a^2\sin^2 p + b^2\cos^2 p)^{\frac{1}{2}}, \\ x\sin p - y\cos p = (a^2\sin^2 p + b^2\cos^2 p)^{\frac{1}{2}}\dfrac{z}{c}. \end{cases}$$

Man kann sich leicht direct überzeugen, daß jede der durch das System der Gleichungen (116) oder (117) ausgedrückten Geraden ganz in der Oberfläche des Hyperboloides mit einem Fache liegt; denn, wenn man die beiden Gleichungen (116) oder die beiden Gleichungen (117) zusammenaddirt, nachdem jeder Theil zum Quadrate erhoben ist, so erhält man die Gleichung (103) wieder. Außerdem wollen wir bemerken, daß die Größe p, welche für dieselbe Erzeugungslinie constant bleibt, wieder den Winkel ausdrückt, welchen die Axe der x mit dem vom Anfangspunkte nach dem Punkte, wo die betrachtete Erzeugungslinie die Ebene der xy trifft, gezogenen Radiusvector bildet.

Es sei nun:

$$(118)\qquad \mathfrak{C} = \frac{a\sin p + (a^2\sin^2 p + b^2\cos^2 p)^{\frac{1}{2}}}{b\cos p},$$

so ergibt sich aus den Formeln (116):

$$(119)\qquad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \mathfrak{C}\left(1 - \frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\mathfrak{C}}\left(1 + \frac{y}{b}\right),$$

und aus den Formeln (117):

$$(120)\qquad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mathfrak{C}\left(1 - \frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\mathfrak{C}}\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Wenn man dagegen:

$$(121)\qquad \mathfrak{C} = \frac{a\cos p + (a^2\sin^2 p + b^2\cos^2 p)^{\frac{1}{2}}}{b\sin p}$$

setzte, so folgte aus den Formeln (116):

$$(122) \qquad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\mathfrak{C}\left(1-\frac{x}{a}\right),\ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\mathfrak{C}}\left(1+\frac{x}{a}\right),$$

und aus den Formeln (117):

$$(123) \qquad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\mathfrak{C}\left(1-\frac{x}{a}\right),\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\mathfrak{C}}\left(1+\frac{x}{a}\right).$$

Wenn also der Buchstabe $\mathfrak{C}$ eine willkührliche Constante bezeichnet, so können die Geraden, welche die Erzeugungslinien des Hyperboloides bilden, durch die Gleichungen (119), (120), (122) oder (123) ausgedrückt werden. Ferner wollen wir bemerken, daß sich die Gleichungen (119) und (122) auf eins der beiden Systeme von Erzeugungslinien beziehen, während sich die Gleichungen (120) und (123) auf das andere System beziehen.

Da die durch einen gegebenen Punkt an die Oberfläche des Hyperboloides mit einem Fache gelegte Ebene dieselbe nur in einem einzigen der Punkte, wo sich beide treffen, berührt, so folgt, daß diese Fläche keine developpabele ist und zu den sogenannten windschiefen Flächen gehört.

Beispiel 10. Betrachten wir jetzt die durch die endliche Gleichung:

$$(124) \qquad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ oder } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1$$

ausgedrückte krumme Fläche. Diese Fläche, welche Ellipsen als Durchschnitte gibt, wenn die schneidenden Ebenen auf der Axe der z senkrecht sind und Hyperbeln, wenn sie auf der Axe der x oder der y senkrecht sind, besteht aus zwei Fächern, wo in jedem der, der Ebene der xy am nächsten liegende Punkt auf der Axe der z in der Entfernung c vom Anfangspunkte liegt. Aus diesem Grunde heißt der von der in Rede stehenden Fläche begrenzte Körper ein Hyperboloid mit zwei Fächern. Wenn man durch den Punkt (x, y, z) eine Berührungsebene und eine Normale an dieses Hyperboloid legt, so erhält man als Gleichung der Berührungsebene:

$$(125) \qquad \frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}=\frac{z\zeta}{c^2}-1,$$

während die Gleichungen der Normale in der Formel (105) des vorhergehenden Beispieles enthalten sind. Schließt man ferner wie in diesem Beispiele, so hat man offenbar statt der Gleichung (107) folgende:

$$(126) \qquad \left(\frac{x\eta-y\xi}{ab}\right)^2+\left(\frac{\zeta-z}{c}\right)^2=0,$$

woraus folgt:

$$\frac{\xi}{x}=\frac{\eta}{y},\ \zeta=z,$$

und wenn man die Gleichungen (124) und (125) berücksichtigt:

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = z.$$

Folglich ist der Punkt (x, y, z) der einzige gemeinschaftliche Punkt des Hyperboloides und der Berührungsebene.

Beispiel 11. Betrachten wir endlich die durch die Gleichung (41) in Vorlesung 13, nämlich:

$$(127) \qquad z = aR\, arc\, tang\left(\left(\frac{y}{x}\right)\right), \text{ oder } y = x\, tang\frac{z}{aR}$$

ausgedrückte schraubenförmige Fläche, so ist die Differenzialgleichung derselben:

$$(128) \qquad \begin{cases} dz = aR\,\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}, \\ \text{oder:} \\ \dfrac{x^2+y^2}{aR}\,dz = x\,dy - y\,dx, \end{cases}$$

Folglich ist die Gleichung der Berührungsebene:

$$(129) \qquad x\eta - y\xi = \frac{x^2+y^2}{aR}(\xi - z),$$

während die Gleichungen der Normale in der Formel:

$$(130) \qquad \frac{aR(\xi - z)}{x^2+y^2} = \frac{\eta - y}{-x} = \frac{\xi - x}{y}$$

enthalten sind. Vermittelst dieser verschiedenen Gleichungen kann man leicht verschiedene Eigenschaften der in Rede stehenden Fläche finden und z. B. beweisen, daß die Berührungsebene die krumme Fläche nach unendlich vielen Linien schneidet, wovon die eine mit der Erzeugungslinie, d. h. mit dem vom Berührungspunkte auf die Axe der z gefällten Perpendikel zusammenfällt.

Zu bemerken ist, daß die Axe der z ganz in der durch die Gleichung (127) ausgedrückten krummen Fläche liegt. Wenn man die Gleichung der Berührungsebene für irgend einen auf dieser Axe liegenden Punkt haben will, so muß man in der Gleichung (129) die Coordinaten x und y auf Null reduciren, oder was dasselbe ist, in der Gleichung:

$$\eta - \xi\, tang\frac{z}{aR} = \frac{x}{aR}(\xi - z)\, sec^2\left(\frac{z}{aR}\right),$$

welche aus der Elimination von y zwischen den Gleichungen (127) und (129) entsteht, $x = 0$ setzen. Verfährt man auf diese Weise, so erhält man für die Gleichung der Berührungsebene in einem Punkte der Axe der z:

$$\frac{\eta}{\xi} = tang\frac{z}{aR}.$$

Diese Ebene, welche immer vertical ist und die erwähnte Axe enthält, verändert also ihre Richtung mit der Ordinate z des Berührungspunktes und nimmt dieselbe Richtung wieder an, wenn das Verhältniß $\frac{z}{aR}$ um eine beliebige Anzahl ganzer Kreisumfänge zu- oder abgenommen hat.

Zuweilen bieten die in einer krummen Fläche liegenden Linien oder Punkte ähnliche bemerkenswerthe Eigenschaften dar, wie die singulären Punkte der Curven. Unter den singulären Punkten der krummen Flächen sind besonders die zu bemerken, durch welche man unendlich viele Berührungsebenen legen kann. In jedem solchen Punkte werden die aus den Gleichungen (8) oder (9) abgeleiteten Werthe von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ unbestimmt, welches nur in zwei Fällen stattfinden kann, nämlich 1), wenn wenigstens eine der Größen:

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{du}{dz}$$

einen unbestimmten Werth bekommt, und 2) wenn diese drei Größen alle zugleich Null oder unendlich werden. In dem einen und dem andern Falle verwandelt sich die Gleichung (2), welche die Berührungsebene ausdrückt, durch Substitution der Werthe von x, y, z in eine identische Gleichung, oder wenigstens in eine Gleichung, welche eine willkührliche Constante enthält.

Betrachten wir z. B. die Spitze der durch die Gleichung (50) ausgedrückten Kegelfläche. Da diese Spitze mit dem Anfangspunkte zusammenfällt, so sind die zugehörigen Werthe von x, y, z Null und wenn man diese Werthe in die Gleichung (53) substituirt, so verschwinden ihre beiden Theile. Wenn man jedoch statt der rechtwinkligen Coordinaten x, y die Polarcoordinaten r und p, welche mit den erstern durch die Gleichung (113) verbunden sind, einführt, so gibt die Gleichung (50):

$$(131) \qquad z = \pm\frac{r}{R},$$

und die Gleichung (53) wird allgemein

$$(132) \qquad \xi\cos p + \eta\sin p = R\xi.$$

Die Gleichung der Berührungsebene enthält also nur eine der Polarcoordinaten, nämlich den Winkel p. Dieser Winkel, welcher für alle andern Punkte der Kegelfläche als die Spitze bestimmt ist, ist es aber für die Spitze selbst nicht mehr und verwandelt sich alsdann in eine willkührliche Constante. Den verschiedenen Werthen, welche diese Constante erhalten kann, entsprechen unendlich viele, durch die Gleichung (132) ausgedrückte Berührungsebenen der Kegelfläche.

Funfzehnte Vorlesung.

Mittelpunkte und Durchmesser der krummen Flächen und der im Raume beschriebenen Curven. Axen der krummen Flächen.

Unter dem Mittelpunkte einer Curve oder einer krummen Fläche versteht man einen Punkt von solcher Beschaffenheit, daß die von diesem Punkte nach der Curve oder nach der krummen Fläche gezogenen Radienvectoren je zwei und zwei einander gleich und nach entgegengesetztem Sinne gerichtet sind. Wenn eine krumme Linie oder Fläche einen Mittelpunkt hat und man verlegt den Anfangspunkt der Coordinaten in denselben, so wird die Gleichung oder die Gleichungen dieser krummen Fläche oder Linie zwischen geradlinigen Coordinaten x, y, z nicht geändert, wenn man $-x$ statt x, $-y$ statt y und $-z$ statt z setzt. Wenn der Mittelpunkt mit dem Punkte zusammenfällt, dessen Coordinaten a, b, c sind, so wird die Gleichung der krummen Fläche oder das System der beiden Gleichungen der Curve nicht verändert, wenn man $2a - x$ für x, $2b - y$ für y und $2c - z$ für z substituirt.

Beispiele. Die krumme Fläche des zweiten Grades, welche durch die Gleichung:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz \\ + 2Ezx + 2Fxy = K \end{array} \right.$$

ausgedrückt wird und die Curve, nach welcher diese Fläche durch die Ebene:

$$(2) \quad x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = 0$$

geschnitten wird, haben den Anfangspunkt der Coordinaten zum gemeinschaftlichen Mittelpunkte.

Wenn x, y, z rechtwinklige Coordinaten bezeichnen, so haben die Kugel:

$$(3) \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

und der durch das System der Gleichungen:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, \\ (x-a)\cos\lambda + (y-b)\cos\mu + (z-c)\cos\nu = 0 \end{array} \right.$$

ausgedrückte Kreis den Punkt (a, b, c) zum gemeinschaftlichen Mittelpunkte.

Eine krumme Linie oder Fläche kann unendlich viele Mittelpunkte haben. Wenn man z. B. in einer, auf einer gegebenen Geraden senkrechten Ebene eine Curve beschreibt, welche einen Mittelpunkt auf dieser Geraden hat und man construirt eine cylindrische Fläche, deren Basis diese Curve ist und deren Erzeugungslinie zu der genannten Geraden parallel ist; so ist jeder Punkt dieser Geraden offenbar ein Mittelpunkt der cylindrischen Fläche.

Jede, durch den Mittelpunkt einer krummen Linie oder Fläche gezogene Gerade ist ein Durchmesser dieser krummen Linie oder Fläche.

Eine Axe einer krummen Fläche ist eine gerade Linie, welche so gezogen ist, daß sie jede der ebenen Durchschnittscurven, welche man erhält, wenn man die krumme Fläche mit Ebenen schneidet, die durch diese Gerade gehen, in zwei symmetrische Theile theilt. Eine solche Axe ist nothwendig auf der krummen Fläche in jedem Punkte, wo sie dieselbe trifft, normal, wofern die durch den Durchschnittspunkt gezogene Berührungsebene nicht unbestimmt wird. Ferner ist jeder Punkt der Axe offenbar ein Mittelpunkt der Durchschnittscurve, welche man erhält, wenn man die krumme Fläche mit einer auf der Axe senkrechten und durch diesen Punkt gehenden Ebene schneidet. Wenn also diese Axe mit der Axe der x zusammenfällt und die Coordinaten x, y, z rechtwinklig sind, so wird die Gleichung der krummen Fläche nicht geändert, wenn man darin zu gleicher Zeit $-y$ für y und $-z$ für z setzt.

Es sei nun

$$u = 0 \tag{5}$$

die Gleichung einer überall geschlossenen krummen Fläche, wo $u = f(x, y, z)$ eine Function der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bezeichnet, und wir wollen annehmen, daß ein gewisser Punkt (O) der einzige Mittelpunkt dieser krummen Fläche und aller mit Ebenen, die durch den Punkt (O) gehen, in diese Fläche gemachten Durchschnitte sei. Wenn die krumme Fläche $u = 0$ eine oder mehrere Axen hat, so muß der Punkt (O) auf jeder derselben liegen, weil die, durch diesen Punkt senkrecht auf die Axen gelegten Ebenen die krumme Fläche nach Curven schneiden, deren einziger Mittelpunkt dieser Punkt ist. Wenn man der Bequemlichkeit wegen den Punkt (O) in den Anfangspunkt der Coordinaten verlegt, so bilden der vom Anfangspunkte nach dem Punkte (x, y, z) der krummen Fläche gezogenen Radiusvector und die in diesem Punkte errichtete Normale mit den Halbaxen der positiven Coordinaten Winkel, deren Cosinus einer Seits den Coordinaten:

$$x, \quad y, \quad z$$

und anderer Seits den abgeleiteten Functionen:

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{du}{dz}$$

proportional sind.

Wir wollen nun annehmen, daß der Radiusvector mit einer Axe der krummen Fläche zusammenfalle. Da diese Axe nach dem weiter oben Gesagten im Allgemeinen mit der durch den Punkt (x, y, z) errichteten Normale zusammenfällt, so werden die Größen:

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$$

offenbar den Coordinaten x, y, z proportional und man hat folglich:

$$(6) \qquad \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{x} = \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{y} = \frac{\left(\frac{du}{dz}\right)}{z}.$$

Es ist zu bemerken, daß an der Gleichung (6) nichts zu ändern wäre, wenn die gegebene Fläche nicht durch die Gleichung (5), sondern durch folgende:

$$(7) \qquad u = c,$$

wo c eine constante Größe bezeichnet, ausgedrückt würde.

Die Gleichung (6) ist in Verbindung mit der Gleichung (7) zur Bestimmung der Coordinaten x, y, z der Punkte, wo die durch den Anfangspunkt an die krumme Fläche $u = 0$ gezogenen Normalen diese Fläche treffen, hinreichend. Jeder dieser Normalen entspricht ein besonderes System von Werthen der Veränderlichen x, y, z, und wenn diese Werthe in die Formel:

$$(8) \qquad \frac{\cos\lambda}{x} = \frac{\cos\mu}{y} = \frac{\cos\nu}{z} = \pm\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$$

substituirt werden, so geben sie die Winkel λ, μ, ν, welche die nach dem einen oder andern Sinne verlängerte Normale mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet. Will man nun wissen, ob die betrachtete Normale eine Axe der krummen Fläche $u = c$ ist, so braucht man diese Fläche nur mit Ebenen zu schneiden, welche auf dieser Normale senkrecht sind, und zu untersuchen, ob der Mittelpunkt jeder Durchschnittscurve auf der Normale selbst liegt. Nimmt man nun auf der nach dem einen oder andern Sinne verlängerten Normale einen Punkt, welcher vom Anfangspunkte um die Länge k entfernt ist, so sind die Coordinaten dieses Punktes:

$$k\cos\lambda, \quad k\cos\mu, \quad k\cos\nu$$

und die durch denselben Punkt gehende und auf der Normale senkrechte Ebene wird durch die Gleichung:

$$(9) \qquad x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = k$$

ausgedrückt. Man hat also nach den weiter oben gemachten Bemerkungen nur zu untersuchen, ob das System der Gleichungen (7) und (9) verändert wird, wenn man für die Coordinaten x, y, z die Differenzen:

$$2k\cos\lambda - x, \quad 2k\cos\mu - y, \quad 2k\cos\nu - z$$

substituirt, und da die Gleichung (9) nach dieser Substitution ihre ursprüngliche Form wieder annimmt, so muß man, indem man $f(x, y, z)$ statt u schreibt, blos untersuchen, ob die Gleichung:

$$(10) \qquad f(2k\cos\lambda - x, \quad 2k\cos\mu - y, \quad 2k\cos\nu - z) = 0$$

für jeden Werth von k aus der Verbindung der Gleichungen (7) und (9) hervorgehen kann.

Wenn die Function u eine homogene Function des $m$ten Grades ist, so hat man:

$$(11) \qquad x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} = mu,$$

und die Gleichung (6) hat nachstehende zur Folge:

$$(12) \qquad \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{x} = \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{y} = \frac{\left(\frac{du}{dz}\right)}{z} = \frac{mu}{x^2+y^2+z^2}.$$

Bezeichnet man alsdann den vom Anfangspunkte nach dem Punkte (x, y, z) gezogenen Radiusvector mit r und setzt folglich:

$$(13) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

so ergibt sich aus den Gleichungen (7) und (12):

$$(14) \qquad \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{x} = \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{y} = \frac{\left(\frac{du}{dz}\right)}{z} = \frac{mc}{r^2}.$$

Es ist wohl zu bemerken, daß die Gleichung (6) nach den in der Differenzialrechnung Vorles. 22 aufgestellten Principien für die krumme Fläche $u = 0$ oder $u = c$ die größten und kleinsten Werthe der Function $x^2 + y^2 + z^2$ und folglich die größten oder kleinsten Werthe des Radiusvectors r bestimmt. Wenn also eine krumme Oberfläche eine oder mehrere, durch den Anfangspunkt gehende Axen hat, so muß der Radiusvector nach einer dieser Axen gerichtet sein, um ein Maximum oder Minimum zu werden, was übrigens leicht vorher einzusehen war.

Die eben aufgestellten Prinzipien lassen sich nun leicht auf die Auflösung der folgenden Aufgaben anwenden.

Aufgabe 1. Den Mittelpunkt und die Axen der durch die Gleichung:

$$(15) \qquad \begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx \\ + 2Fxy + Gx + Hy + Iz = K \end{cases}$$

ausgedrückten krummen Fläche des zweiten Grades zu finden, wenn sie solche hat.

Auflösung. Wenn die Fläche (15) einen Mittelpunkt hat und man bezeichnet die Coordinaten desselben durch x_0, y_0, z_0, so

braucht man, um den Anfangspunkt in diesen Punkt zu verlegen, nur $x+x_0$ für x, $y+y_0$ für y und $z+z_0$ für z in die Gleichung (15) zu setzen. Da ferner die transformirte Gleichung, nämlich:

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy \\ +2(Ax_0+Fy_0+Ez_0+G)x \\ +2(Fx_0+By_0+Dz_0+H)y \\ +2(Ex_0+Dy_0+Cz_0+I)z \\ =K-(Ax_0^2+By_0^2+Cz_0^2+2Dy_0z_0 \\ +2Ez_0x_0+2Fx_0y_0+Gx_0+Hy_0+Iz_0) \end{array}\right.$$

nicht verändert werden darf, wenn man zu gleicher Zeit $-x$ für x, $-y$ für y und $-z$ für z substituirt, so müssen sich die Coefficienten von x, y, z in der transformirten Gleichung auf Null reduciren. Man hat also:

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} Ax_0+Fy_0+Ez_0=-G, \\ Fx_0+By_0+Dz_0=-H, \\ Ex_0+Dy_0+Cz_0=-I; \end{array}\right.$$

und folglich:

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} x_0=-\dfrac{(BC-D^2)G+(DE-CF)H+(FD-BE)I}{ABC-D^2A-E^2B-F^2C+2DEF}, \\ y_0=-\dfrac{(DE-CF)G+(CA-E^2)H+(EF-AD)I}{ABC-D^2A-E^2B-F^2C+2DEF}, \\ z_0=-\dfrac{(FD-BE)G+(EF-AD)H+(AB-F^2)I}{ABC-D^2A-E^2B-F^2C+2DEF}. \end{array}\right.$$

Nun geben aber die Gleichungen (18) jedesmal ein einziges System endlicher Werthe von x_0, y_0, z_0, wenn die Größe:

$$(19)\qquad ABC-D^2A-E^2B-F^2C+2DEF$$

einen von Null verschiedenen Werth hat. Die krumme Fläche (15) hat folglich alsdann einen einzigen Mittelpunkt, welcher in einer endlichen Entfernung vom Anfangspunkte liegt. Wenn man dagegen

$$(20)\qquad ABC-D^2A-E^2B-F^2C+2DEF=0$$

setzt, so wird die Entfernung des Mittelpunktes vom Anfangspunkte unendlich groß, d. h. es gibt keinen Mittelpunkt mehr, wofern nicht der zweite Theil jeder der Gleichungen (18) unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint. In diesem letzten Falle erhielte man unendlich viele Systeme von Werthen für x_0, y_0, z_0, welche den Gleichungen (17) Genüge leisten und die krumme Fläche (15) hätte folglich unendlich viele Mittelpunkte.

Wenn die Fläche (15) einen Mittelpunkt oder unendlich viele

Mittelpunkte hat und es wird einer derselben zum Anfangspunkte genommen, so wird die Gleichung (15) auf die Form:

$$(1) \quad Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy=K$$

zurückgeführt. Wenn man außerdem annimmt, daß die Coordinaten x, y, z rechtwinklig sind, so verificiren dieselben jedesmal die auf die Form:

$$(21) \quad \begin{cases} \dfrac{Ax+Fy+Ez}{x}=\dfrac{Fx+By+Dz}{y} \\ =\dfrac{Ex+Dy+Cz}{z}=\dfrac{K}{r^2} \end{cases}$$

reducirte Gleichung (14), wenn der vom Anfangspunkte nach dem Punkte (x, y, z) gezogene Radiusvector auf der gegebenen Fläche normal wird. Man hat folglich alsdann:

$$(22) \quad \begin{cases} \left(A-\dfrac{K}{r^2}\right)x+Fy+Ez=0, \\ Fx+\left(B-\dfrac{K}{r^2}\right)y+Dz=0, \\ Ex+Dy+\left(C-\dfrac{K}{r^2}\right)z=0. \end{cases}$$

Wenn man zwischen diesen letzten Gleichungen x, y und z eliminirt, so erhält man folgende:

$$(23) \quad \begin{cases} \left(A-\dfrac{K}{r^2}\right)\left(B-\dfrac{K}{r^2}\right)\left(C-\dfrac{K}{r^2}\right)+2DEF \\ -D^2\left(A-\dfrac{K}{r^2}\right)-E^2\left(B-\dfrac{K}{r^2}\right)-F^2\left(C-\dfrac{K}{r^2}\right)=0. \end{cases}$$

Setzt man endlich der Kürze wegen:

$$(24) \quad \frac{K}{r^2}=s,$$

so verwandelt sich die Gleichung (23) in:

$$(25) \quad \begin{cases} (A-s)(B-s)(C-s)-D^2(A-s)-E^2(B-s) \\ -F^2(C-s)+2DEF=0, \end{cases}$$

und aus den Gleichungen (22) in Verbindung mit der Gleichung (8) folgt:

$$(26) \quad \begin{cases} A\cos\lambda+F\cos\mu+E\cos\nu=s\cos\lambda, \\ F\cos\lambda+B\cos\mu+D\cos\nu=s\cos\mu, \\ E\cos\lambda+D\cos\mu+C\cos\nu=s\cos\nu. \end{cases}$$

Die Gleichungen (25) und (26) sind zur Bestimmung der Länge:

$$r = \sqrt{\left(\frac{K}{s}\right)}$$

jedes auf der krummen Fläche normalen Radiusvectors und der Winkel λ, μ, ν, welche ein normaler Radiusvector mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet, hinreichend.

Es ist von Wichtigkeit, die Anzahl der Systeme der reellen Werthe, welche die Gleichungen (25) und (26) für die Unbekannten $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ und s geben können, zu bestimmen. Um hierzu zu gelangen, wollen wir zunächst bemerken, daß die Gleichung (25) aus der Elimination von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ zwischen den Gleichungen (26) entspringt und daß sich für einen reellen Werth von s, welcher der Gleichung (25) Genüge leisten kann, aus den Gleichungen (26) ein einziger Werth jedes der Verhältnisse:

$$\frac{\cos\mu}{\cos\lambda} \text{ und } \frac{\cos\nu}{\cos\lambda}$$

ergibt. Denn die beiden ersten der Gleichungen (26) führen auf folgende:

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\lambda}{FD-E(B-s)} = \dfrac{\cos\mu}{EF-D(A-s)} = \dfrac{\cos\nu}{(A-s)(B-s)-F^2} = \\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{\{[FD-E(B-s)]^2+[EF-D(A-s)]^2+[(A-s)(B-s)-F^2]^2\}}} \end{cases}$$

Es entspricht also jedem reellen Werthe der Unbekannten s eine einzige Gerade, welche nach zwei entgegengesetzten Richtungen verlängert werden kann.

Man kann sich auch leicht überzeugen, daß die Gleichung (25) nicht geändert wird, wenn man für die Constanten:

$$A, B, C, D, E, F$$

andere Größen:

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$$

setzt, welche die Coefficienten der Quadrate und der doppelten Producte der Coordinaten in der Gleichung ausdrücken können, welche sich aus der Gleichung (1) ergibt, wenn man für das System der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z ein anderes System rechtwinkliger Coordinaten ξ, η, ζ substituirt. Um dieses zu beweisen, wollen wir annehmen, daß die nach dem Sinne der positiven Coordinaten verlängerten neuen Axen der Coordinaten ξ, η, ζ mit der Halbaxe der positiven x die Winkel α_0, α_1, α_2, mit der Halbaxe der positiven y die Winkel β_0, β_1, β_2 und mit der Halbaxe der positiven z die Winkel γ_0, γ_1, γ_2 bilden; so hat man (s. Vorer. S. 13):

$$(28)\quad \begin{cases} x = \xi\cos\alpha_0 + \eta\cos\alpha_1 + \zeta\cos\alpha_2, \\ y = \xi\cos\beta_0 + \eta\cos\beta_1 + \zeta\cos\beta_2, \\ z = \xi\cos\gamma_0 + \eta\cos\gamma_1 + \zeta\cos\gamma_2. \end{cases}$$

$$(29)\quad \begin{cases} \xi = x\cos\alpha_0 + y\cos\beta_0 + z\cos\gamma_0, \\ \eta = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1, \\ \zeta = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2, \end{cases}$$

und wenn man die als Functionen von ξ, η, ζ ausgedrückten Werthe von x, y, z in den ersten Theil der Gleichung (1) substituirt, so erhält man eine andere Gleichung von der Form:

$$(30)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2 \\ + 2\mathfrak{D}\eta\zeta + 2\mathfrak{E}\zeta\xi + 2\mathfrak{F}\xi\eta = K. \end{cases}$$

Hierbei ist zu bemerken, daß man vermöge der zwischen den beiden Arten von Coordinaten aufgestellten Relationen und für beliebige Werthe der Veränderlichen ξ, η, ζ identisch:

$$(31)\quad \begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy \\ = \mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2 + 2\mathfrak{D}\eta\zeta + 2\mathfrak{E}\zeta\xi + 2\mathfrak{F}\xi\eta \end{cases}$$

hat. Man kann also die Gleichung (31) in Beziehung auf jede der als unabhängig betrachteten Veränderlichen ξ, η, ζ differenziren. Verrichtet man z. B. die Differenziation in Beziehung auf ξ und erwägt, daß man vermöge der Gleichungen (28):

$$\frac{dx}{d\xi} = \cos\alpha_0, \quad \frac{dy}{d\xi} = \cos\beta_0, \quad \frac{dz}{d\xi} = \cos\gamma_0$$

hat, so erhält man:

$$(Ax + Fy + Ez)\cos\alpha_0 + (Fx + By + Dz)\cos\beta_0 + (Ex + Dy + Cz)\cos\gamma_0 = \mathfrak{A}\xi + \mathfrak{F}\eta + \mathfrak{E}\zeta,$$

oder was dasselbe ist:

$$(32)\quad \begin{cases} (Ax + Fy + Ez)\cos\alpha_0 + (Fx + By + Dz)\cos\beta_0 \\ + (Ex + Dy + Cz)\cos\gamma_0 = \mathfrak{A}(x\cos\alpha_0 + y\cos\beta_0 + z\cos\gamma_0) \\ + \mathfrak{F}(x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1) + \mathfrak{E}(x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2). \end{cases}$$

Dagegen fände man, wenn man successive in Bezug auf jede der Veränderlichen η und ζ differenzirte:

$$(33)\quad \begin{cases} (Ax + Fy + Ez)\cos\alpha_1 + (Fx + By + Dz)\cos\beta_1 \\ + (Ex + Dy + Cz)\cos\gamma_1 = \mathfrak{F}(x\cos\alpha_0 + y\cos\beta_0 + z\cos\gamma_0) \\ + \mathfrak{B}(x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1) + \mathfrak{D}(x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2), \end{cases}$$

$$(34)\quad \begin{cases} (Ax+Fy+Ez)\cos\alpha_2+(Fx+By+Dz)\cos\beta_2 \\ +(Ex+Dy+Cz)\cos\gamma_2=\mathfrak{E}(x\cos\alpha_0+y\cos\beta_0+z\cos\gamma_0) \\ +\mathfrak{D}(x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1)+\mathfrak{C}(x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2). \end{cases}$$

Die Gleichungen (32), (33) und (34) sind nothwendig identisch, d. h. sie müssen für alle möglichen Werthe der Veränderlichen x, y, z erfüllt werden. Man könnte daraus leicht die Werthe von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ als Functionen von A, B, C, D, E, F und die Werthe dieser letztern Größen als Functionen den erstern ausgedrückt, ableiten. Wenn man in denselben Gleichungen:

$$x=\cos\lambda,\quad y=\cos\mu,\quad z=\cos\nu$$

und der Kürze wegen:

$$(35)\quad \begin{cases} \cos\alpha_0\cos\lambda+\cos\beta_0\cos\mu+\cos\gamma_0\cos\nu=\cos\mathfrak{L}, \\ \cos\alpha_1\cos\lambda+\cos\beta_1\cos\mu+\cos\gamma_1\cos\nu=\cos\mathfrak{M}, \\ \cos\alpha_2\cos\lambda+\cos\beta_2\cos\mu+\cos\gamma_2\cos\nu=\cos\mathfrak{N} \end{cases}$$

setzt, oder was dasselbe ist, durch $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ die Winkel bezeichnet, welche der Radiusvector r mit den neuen Coordinatenaxen bildet; so erhält man, wenn man die Gleichungen (26) berücksichtigt:

$$(36)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}\cos\mathfrak{L}+\mathfrak{F}\cos\mathfrak{M}+\mathfrak{E}\cos\mathfrak{N}=s\cos\mathfrak{L}, \\ \mathfrak{F}\cos\mathfrak{L}+\mathfrak{B}\cos\mathfrak{M}+\mathfrak{D}\cos\mathfrak{N}=s\cos\mathfrak{M}, \\ \mathfrak{E}\cos\mathfrak{L}+\mathfrak{D}\cos\mathfrak{M}+\mathfrak{C}\cos\mathfrak{N}=s\cos\mathfrak{N}. \end{cases}$$

Das System dieser drei Gleichungen ist dem der Gleichungen (26) gleichgeltend. Wenn man also zwischen den Gleichungen (36) die Cosinus der Winkel $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ eliminirt, so muß man die Gleichung (25) wieder erhalten. Wenn man aber diese Elimination verrichtet, so erhält man die Gleichung:

$$(37)\quad \begin{cases} (\mathfrak{A}-s)(\mathfrak{B}-s)(\mathfrak{C}-s)-\mathfrak{D}^2(\mathfrak{A}-s)-\mathfrak{E}^2(\mathfrak{B}-s) \\ -\mathfrak{F}^2(\mathfrak{C}-s)+2\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F}=0. \end{cases}$$

Folglich ist diese Gleichung mit der Gleichung (25) einerlei, und gibt dieselben reellen oder imaginären Werthe von s. Es ist übrigens einleuchtend, daß man, um die Gleichung (37) zu erhalten, nur in der Gleichung (25) für die Größen A, B, C, D, E, F die Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ zu setzen braucht.

Es verdient bemerkt zu werden, daß man die Gleichungen (36) und (37) direct erhielte, wenn man die auf der Fläche des zweiten Grades normalen Radienvectoren suchte, indem man von der Gleichung (30) ausginge.

Wenn man die Gleichung (25) entwickelt, so verwandelt sie sich in:

$$(38)\quad \begin{cases} s^3-(A+B+C)s^2+(AB+AC+BC-D^2-E^2-F^2)s \\ =ABC-D^2A-E^2B-F^2C+2DEF. \end{cases}$$

Soll diese Gleichung nicht verändert werden, wenn man die Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ für die Größen A, B, C, D, E, F substituirt, so muß man haben:

$$(39)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}=A+B+C, \\ \mathfrak{A}\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{C}+\mathfrak{B}\mathfrak{C}-\mathfrak{D}^2-\mathfrak{E}^2-\mathfrak{F}^2 \\ =AB+AC+BC-D^2-E^2-F^2, \\ \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\mathfrak{D}^2-\mathfrak{B}\mathfrak{E}^2-\mathfrak{C}\mathfrak{F}^2+2\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F} \\ =ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF. \end{cases}$$

Man könnte jede dieser letzten Gleichungen direct verificiren, wenn man die als Functionen von A, B, C, D, E, F ausgedrückten allgemeinen Werthe von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ in dieselben substituirte und die zwischen den Cosinus der Winkel α_0, β_0, γ_0, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 stattfindenden Relationen berücksichtigte. Man könnte auch die Gleichungen (39) erhalten, wenn man bewiese, daß für jeden Werth von s die Gleichung stattfindet:

$$(40)\quad \begin{cases} (A-s)(B-s)(C-s)-D^2(A-s) \\ -E^2(B-s)-F^2(C-s)+2DEF \\ =(\mathfrak{A}-s)(\mathfrak{B}-s)(\mathfrak{C}-s)-\mathfrak{D}^2(\mathfrak{A}-s) \\ -\mathfrak{E}^2(\mathfrak{B}-s)-\mathfrak{F}^2(\mathfrak{C}-s)+2\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F}. \end{cases}$$

Nun braucht man aber zu diesem Zwecke nur zu bemerken, daß man, wenn man die Coefficienten der Veränderlichen x, y, z in den Gleichungen (32), (33) und (34) resp. mit a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 bezeichnet, für die Werthe dieser aus den ersten Theilen abgeleiteten Coefficienten:

$$(41)\quad \begin{cases} a_0=A\cos\alpha_0+F\cos\beta_0+E\cos\gamma_0, \\ a_1=A\cos\alpha_1+F\cos\beta_1+E\cos\gamma_1, \\ a_2=A\cos\alpha_2+F\cos\beta_2+E\cos\gamma_2, \\ b_0=F\cos\alpha_0+B\cos\beta_0+D\cos\gamma_0, \\ b_1=F\cos\alpha_1+B\cos\beta_1+D\cos\gamma_1, \\ b_2=F\cos\alpha_2+B\cos\beta_2+D\cos\gamma_2, \\ c_0=E\cos\alpha_0+D\cos\beta_0+C\cos\gamma_0, \\ c_1=E\cos\alpha_1+D\cos\beta_1+C\cos\gamma_1, \\ c_2=E\cos\alpha_2+D\cos\beta_2+C\cos\gamma_2, \end{cases}$$

und für die aus den zweiten Theilen abgeleiteten Werthe derselben Coefficienten:

$$
42)\quad \left\{\begin{aligned}
a_0 &= \mathfrak{A}\cos\alpha_0 + \mathfrak{F}\cos\alpha_1 + \mathfrak{E}\cos\alpha_2,\\
a_1 &= \mathfrak{F}\cos\alpha_0 + \mathfrak{B}\cos\alpha_1 + \mathfrak{D}\cos\alpha_2,\\
a_2 &= \mathfrak{E}\cos\alpha_0 + \mathfrak{D}\cos\alpha_1 + \mathfrak{C}\cos\alpha_2,\\
b_0 &= \mathfrak{A}\cos\beta_0 + \mathfrak{F}\cos\beta_1 + \mathfrak{E}\cos\beta_2,\\
b_1 &= \mathfrak{F}\cos\beta_0 + \mathfrak{B}\cos\beta_1 + \mathfrak{D}\cos\beta_2,\\
b_2 &= \mathfrak{E}\cos\beta_0 + \mathfrak{D}\cos\beta_1 + \mathfrak{C}\cos\beta_2,\\
c_0 &= \mathfrak{A}\cos\gamma_0 + \mathfrak{F}\cos\gamma_1 + \mathfrak{E}\cos\gamma_2,\\
c_1 &= \mathfrak{F}\cos\gamma_0 + \mathfrak{B}\cos\gamma_1 + \mathfrak{D}\cos\gamma_2,\\
c_2 &= \mathfrak{E}\cos\gamma_0 + \mathfrak{D}\cos\gamma_1 + \mathfrak{C}\cos\gamma_2,
\end{aligned}\right.
$$

erhält. Setzt man ferner der Kürze wegen:

$$
(43)\qquad \Delta =
$$

$$
\begin{aligned}
&\cos\alpha_0\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\alpha_0\cos\beta_2\cos\gamma_1\\
&+\cos\alpha_1\cos\beta_2\cos\gamma_0 - \cos\alpha_1\cos\beta_0\cos\gamma_2\\
&+\cos\alpha_2\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\alpha_2\cos\beta_1\cos\gamma_0,
\end{aligned}
$$

so ergibt sich aus den Gleichungen (41) und (42):

$$
\begin{aligned}
&a_0 b_1 c_2 - a_0 b_2 c_1 + a_1 b_2 c_0 - a_1 b_0 c_2 + a_2 b_0 c_1 - a_2 b_1 c_0\\
&= (ABC - D^2A - E^2D - F^2C + 2DEF)\Delta\\
&= (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} - \mathfrak{D}^2\mathfrak{A} - \mathfrak{E}^2\mathfrak{D} - \mathfrak{F}^2\mathfrak{C} + 2\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F})\Delta
\end{aligned}
$$

und wenn man $a_0 - s\cos\alpha_0$, $b_1 - s\cos\beta_1$, $c_2 - s\cos\gamma_2$ für a_0, b_1, c_2 setzt:

$$
\begin{aligned}
&(a_0 - s\cos\alpha_0)(b_1 - s\cos\beta_1)(c_2 - s\cos\gamma_2)\\
&+ a_1 b_2 c_0 + a_2 b_0 c_1 - b_1 c_2 (a_0 - s\cos\alpha_0)\\
&- c_0 a_2 (b_1 - s\cos\beta_1) - a_1 b_0 (c_2 - s\cos\gamma_2)\\
&= \left[\begin{matrix}(A-s)(B-s)(C-s) - D^2(A-s)\\ - E^2(B-s) - F^2(C-s) + 2DEF\end{matrix}\right]\Delta\\
&= \left[\begin{matrix}(\mathfrak{A}-s)(\mathfrak{B}-s)(\mathfrak{C}-s) - \mathfrak{D}^2(\mathfrak{A}-s)\\ - \mathfrak{E}^2(\mathfrak{B}-s) - \mathfrak{F}^2(\mathfrak{C}-s) + 2\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F}\end{matrix}\right]\Delta.
\end{aligned}
$$

Dividirt man die letzte Gleichung durch Δ, so erhält man offenbar die Gleichung (40) wieder.

Wir wollen nun wieder auf die Gleichung (25) zurückkommen. Da diese Gleichung vom dritten Grade ist, so hat sie wenigstens eine reelle Wurzel, welcher zwei Systeme reeller Werthe von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ entsprechen, welche durch die Gleichung (27) bestimmt werden und die Cosinus der Winkel ausdrücken können, die dieselbe

nach zwei entgegengesetzten Richtungen verlängerte Gerade mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet. Wenn man nun:

$$\alpha_0 = \lambda, \quad \beta_0 = \mu, \quad \gamma_0 = \nu$$

setzt, oder wenn man in dem neuen Coordinatensysteme die Gerade zur Halbaxe der positiven Abscissen nimmt, welche mit den Halbaxen der positiven x, y und z die Winkel λ, μ, ν bildet, so erhält man:

$$(44) \qquad \cos\mathfrak{L} = 1, \quad \cos\mathfrak{M} = 0, \quad \cos\mathfrak{N} = 0,$$

und die Gleichungen (36) geben:

$$(45) \qquad \mathfrak{A} = s, \quad \mathfrak{E} = 0, \quad \mathfrak{F} = 0,$$

Die Größe $\mathfrak{A}$ ist also genau die eben erwähnte reelle Wurzel.

Ferner verwandeln sich die Gleichungen (30) und (37) vermöge der Gleichungen (45) resp. in:

$$(46) \qquad \mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2 + 2\mathfrak{D}\eta\zeta = K$$

und:

$$(47) \qquad (\mathfrak{A} - s)[(\mathfrak{B} - s)(\mathfrak{C} - s) - \mathfrak{D}^2] = 0.$$

Da die Gleichung (46) nicht verändert wird, wenn man zu gleicher Zeit $-\eta$ für η und $-\zeta$ für ζ in derselben setzt, so folgt, daß die neue Axe der Abscissen eine Axe der durch diese Gleichung ausgedrückten krummen Fläche ist. Wenn man die Gleichung (47) durch den Factor $\mathfrak{A} - s$, welcher der Wurzel $s = \mathfrak{A}$ entspricht, dividirt, so verwandelt sie sich in:

$$(49) \qquad s^2 - (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})s + \mathfrak{B}\mathfrak{C} - \mathfrak{D}^2 = 0,$$

und gibt die beiden neuen reellen Wurzeln:

$$(49) \qquad s = \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{C}}{2}\right)^2 + \mathfrak{D}^2\right]}.$$

Folglich sind die drei Wurzeln der Gleichung (25), welche von der Gleichung (47) nicht verschieden ist, alle reell. Diesen drei Wurzeln entsprechen drei Gerade, welche eben so viele Axen der gegebenen krummen Fläche sind, und wovon jede, nach dem einen oder andern Sinne verlängert, mit den Halbaxen der Coordinaten x, y, z oder ξ, η, ζ die Winkel λ, μ, ν oder $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ bildet, welche durch die Gleichungen (27) oder (35) bestimmt werden. Wenn man wieder annimmt, daß die eine dieser Geraden mit der Axe der ξ zusammenfällt, so hat man wie oben $\mathfrak{E} = 0$, $\mathfrak{F} = 0$ und die erste der Gleichungen (36) gibt:

$$(50) \qquad (s - \mathfrak{A})\cos\mathfrak{L} = 0.$$

Da ferner die Gleichung (50) nicht blos für die der Wurzel $s = \mathfrak{A}$ entsprechende Gerade, sondern auch für die beiden andern Geraden erfüllt werden muß, so hat man für jede dieser letztern nothwendig:

(51) $$\cos \mathfrak{L} = 0,$$

wofern die Gleichung (47) keine gleichen Wurzeln hat. Wenn man alſo dieſen beſondern Fall ausnimmt, ſo iſt die der Wurzel $s = \mathfrak{A}$ entſprechende Gerade auf den beiden andern ſenkrecht, und da man in der Gleichung (50) für $\mathfrak{A}$ eine beliebige der drei reellen Wurzeln der Gleichung (25) nehmen kann, ſo ſind wir zu dem Schluſſe berechtigt, daß ſich die drei Axen der krummen Fläche des zweiten Grades unter rechten Winkeln durchſchneiden. Man kann alſo die neuen Coordinatenaxen mit den drei Axen der krummen Fläche zuſammenfallen laſſen. Alsdann muß den Gleichungen (36) Genüge geſchehen, wenn man irgend einen der Winkel $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ auf Null und die beiden andern auf $\frac{\pi}{2}$ reducirt, woraus folgt: 1) daß die drei Wurzeln der Gleichung (25) den durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichneten Coefficienten gleich ſind und 2) daß die Coefficienten $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ verſchwinden. Man hat alſo zu gleicher Zeit:

(52) $$\mathfrak{D} = 0, \quad \mathfrak{E} = 0, \quad \mathfrak{F} = 0,$$

und die Gleichung (46) verwandelt ſich in:

(53) $$\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2 = K.$$

Was die Gleichung (37) anlangt, ſo reducirt ſie ſich auf:

(54) $$(\mathfrak{A} - s)(\mathfrak{B} - s)(\mathfrak{C} - s) = 0,$$

und ihr wird in der That Genüge geleiſtet, wenn man die Größe s einer der drei Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gleich ſetzt.

Man kann ſich leicht direct überzeugen, daß die Gleichung (53) eine auf ihre Axen bezogene Fläche des zweiten Grades, d. h. eine Fläche, deren drei Axen mit den Coordinatenaxen zuſammenfallen, ausdrückt. Denn um dieſe Behauptung zu beweiſen, braucht man nur zu bemerken, daß die in Rede ſtehende Gleichung nicht geändert wird, wenn man darin $-\xi$ für ξ, $-\eta$ für η und $-\zeta$ für ζ ſetzt, und daß folglich jeder Durchſchnitt derſelben mit einer auf einer der Coordinatenaxen ſenkrechten Ebene eine Curve iſt, welche einen Punkt dieſer Axe zum Mittelpunkte hat.

Bei der Ableitung der Gleichung (53) haben wir die drei Wurzeln der Gleichung (25) als ungleich angenommen. Wenn dieſe Gleichung zwei gleiche Wurzeln und eine dritte von den beiden erſten verſchiedene Wurzel hätte, ſo könnte man annehmen, daß dieſe dritte Wurzel mit der Wurzel $\mathfrak{A}$ der Gleichung (47) übereinſtimmt. Da alsdann die Gleichung (49) zwei gleiche Werthe für s geben müßte, ſo hätte man nothwendig:

$$\left(\frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{C}}{2}\right)^2 + \mathfrak{D}^2 = 0,$$

und folglich:

(55) $$\mathfrak{D} = 0, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{C},$$

Die Gleichungen (46) und (47) verwandeln sich also resp. in:

$$\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}(\eta^2 + \zeta^2) = K, \tag{56}$$

$$(\mathfrak{A} - s)(\mathfrak{B} - s) = 0. \tag{57}$$

Die Gleichung (56) ist ebenfalls die einer krummen Fläche, deren drei Axen mit den Coordinatenaxen zusammenfallen; aber es ist dabei zugleich wohl zu bemerken, daß in dem gegenwärtigen Falle die Axen der Coordinaten η und ζ zwei beliebige auf der Axe der ξ senkrechte Axen sein können, woraus folgt, daß die Fläche des zweiten Grades unendlich viele Axen hat, wovon die eine, der Wurzel $\mathfrak{A}$ der Gleichung (57) entsprechende, die Axe der ξ ist, während die beiden andern auf der Axe der ξ senkrecht sind und alle dem Werthe $\mathfrak{B}$ der Unbekannten s entsprechen. Zu denselben Schlüssen würde man gelangen, wenn man die der Wurzel $s = \mathfrak{B}$ entsprechenden Werthe von $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ vermittelst der Gleichungen (36) zu bestimmen suchte. Denn wenn man in diesen Gleichungen

$$\mathfrak{D} = 0, \quad \mathfrak{E} = 0, \quad \mathfrak{F} = 0, \quad s = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$$

setzt, so wird die erste auf:

$$(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) \cos \mathfrak{L} = 0, \tag{58}$$

oder einfacher auf:

$$\cos \mathfrak{L} = 0 \tag{59}$$

reducirt und die beiden letzten werden indentisch, d. h. sie werden für alle möglichen Werthe der Winkel $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ erfüllt. Folglich ist der erste dieser Winkel, welcher durch die Gleichung (59) bestimmt wird, ein rechter, aber die beiden andern bleiben unbestimmt.

Um von dem eben betrachteten Falle zu dem überzugehen, wo die drei Wurzeln der Gleichung (25) alle einander gleich sind, braucht man nur

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \tag{60}$$

zu setzen, und alsdann verwandelt sich die Gleichung (56) in:

$$\mathfrak{A}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = K. \tag{61}$$

In dieser Voraussetzung wird die Gleichung (58) für jeden Werth von $\mathfrak{L}$ erfüllt, sie hat die Gleichung (59) nicht mehr zur Folge und die drei Winkel $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ bleiben unbestimmt. Folglich kann alsdann jede beliebige durch den Anfangspunkt gezogene Gerade als eine Axe der krummen Fläche betrachtet werden. Derselbe Schluß ergibt sich auch aus der Gleichung (61); denn diese Gleichung drückt offenbar eine Kugelfläche aus, wovon jeder Durchmesser als eine Axe betrachtet werden kann. Da ferner diese Kugelfläche auch durch die Gleichung (1) ausgedrückt werden muß, so muß diese mit der Gleichung:

$$\mathfrak{A}(x^2 + y^2 + z^2) = K \tag{62}$$

übereinstimmen, welche sich unmittelbar aus der Gleichung (61) in Verbindung mit der folgenden:

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=r^2=x^2+y^2+z^2 \tag{63}$$

ergibt. Nun können aber die Gleichungen (1) und (62) nur dann mit einander übereinstimmen, wenn die Coefficienten A, B, C der Größe $\mathfrak{A}$ gleich und die Coefficienten D, E, F Null sind. Wenn also die drei Wurzeln der Gleichung (25) einander gleich werden, so ist zu gleicher Zeit

$$A=B=C,\quad D=E=F=0. \tag{64}$$

Wenn alle Wurzeln der Gleichung (25) einander gleich sind, so läßt sich leicht direct beweisen, daß die Bedingungen (64) erfüllt werden. Denn wenn man in der Gleichung (25)

$$s+\frac{A+B+C}{3}$$

für s setzt, so erhält man eine andere Gleichung von der Form:

$$s^3-ps+q=0, \tag{65}$$

wo

$$p=\frac{A^2+B^2+C^2-AB-AC-BC}{3}+D^2+E^2+F^2,$$

oder

$$p=\frac{(A-B)^2+(A-C)^2+(B-C)^2}{6}+D^2+E^2+F^2. \tag{66}$$

ist. Wir wollen nun annehmen, die drei Wurzeln der Gleichung (25) würden einander gleich, so müssen die der Gleichung (63) alle verschwinden. Man hat folglich $p=0$, $q=0$ und mithin:

$$\frac{(A-B)^2+(A-C)^2+(B-C)^2}{6}+D^2+E^2+F^2=0. \tag{67}$$

Nun hat aber diese letzte Gleichung die Bedingungen (64) offenbar zur Folge.

Wenn die Größen A, B, C, D, E, F der Gleichung (20) Genüge leisten, so hat die krumme Fläche (1) unendlich viele Mittelpunkte und die Gleichung (25) oder (38) hat wenigstens eine Wurzel $=0$. Wenn dieses die mit $\mathfrak{A}$ bezeichnete Wurzel ist, so verwandelt sich die Gleichung (53) in:

$$\mathfrak{B}\eta^2+\mathfrak{C}\zeta^2=K \tag{68}$$

und drückt eine cylindrische Fläche aus, deren Erzeugungslinie zu der Axe der ξ parallel ist. Wenn zwei Wurzeln der Gleichung (25) $=0$ werden und sie entsprechen dem Werthe $\mathfrak{B}$ von s, welcher der Gleichung (57) genügt, so reducirt sich die Gleichung (56) auf folgende:

$$\mathfrak{A}\xi^2=K, \tag{69}$$

aus welcher sich die beiden Gleichungen:

$$(70) \qquad \xi = -\sqrt{\left(\frac{K}{\mathfrak{A}}\right)}, \quad (71) \quad \xi = \sqrt{\left(\frac{K}{\mathfrak{A}}\right)}$$

ergeben, die zwei auf der Axe der ξ senkrechte Ebenen ausdrücken. Es braucht nicht untersucht zu werden, was geschähe, wenn alle drei Wurzeln der Gleichung (25) Null wären; denn dieses kann nicht stattfinden, wofern die Größen A, B, C, D, E, F in der Gleichung (1) nicht zugleich verschwinden, d. h. wofern diese Gleichung die Coordinaten x, y, z noch enthält.

Da die Gleichungen (56), (61), (68) und (69) als specielle Fälle in der Gleichung (53) enthalten sind, so folgt aus dem Vorhergehenden offenbar, daß die Gleichung jeder Fläche des zweiten Grades, welche einen Mittelpunkt oder unendlich viele Mittelpunkte hat, bei rechtwinkligen Coordinaten auf die Form (53) zurückgeführt werden kann. Ferner ist zu bemerken, daß die in der Gleichung (53) mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichneten Coefficienten oder die Wurzeln der Gleichung (54) die drei Werthe von:

$$s = \frac{K}{r^2}$$

sind, welche den Durchschnittspunkten der krummen Fläche mit den neuen Coordinatenaxen entsprechen. Dieses kann man auch direct beweisen; denn sucht man z. B. den Durchschnittspunkt der krummen Fläche mit der Axe der ξ, so muß man $\eta = 0$, $\zeta = 0$ setzen, und folglich ergibt sich aus den Gleichungen (53) und (63):

$$\xi^2 = r^2 = \frac{K}{\mathfrak{A}}, \text{ oder } \frac{K}{r^2} = \mathfrak{A}.$$

Uebrigens ist einleuchtend, daß diese letzte Gleichung für den Radiusvector r einen reellen Werth gibt, wenn das Verhältniß $\frac{K}{\mathfrak{A}}$ eine positive Größe ist und einen imaginären Werth, wenn dieses Verhältniß negativ wird. In dem ersten Falle ist der reelle Werth von r die Hälfte der Entfernung zwischen den beiden Punkten, worin die krumme Fläche die Axe der ξ schneidet, d. h. mit andern Worten, die Hälfte einer reellen Axe der gegebenen krummen Fläche. Im zweiten Falle ist die Axe der ξ zwar noch eine Axe der krummen Fläche, aber sie trifft dieselbe nicht mehr.

Es seien nun a^2, b^2, c^2 die Zahlenwerthe der drei Verhältnisse $\frac{K}{\mathfrak{A}}$, $\frac{K}{\mathfrak{B}}$, $\frac{K}{\mathfrak{C}}$, so daß man hat:

$$(72) \qquad \frac{K}{\mathfrak{A}} = \pm a^2, \quad \frac{K}{\mathfrak{B}} = \pm b^2, \quad \frac{K}{\mathfrak{C}} = \pm c^2,$$

wo a, b, c positive Größen bezeichnen. Wenn man für die Buch-

staben ξ, η, ζ die Buchstaben x, y, z setzt, so verwandelt sich die durch K dividirte Gleichung (53) in:

$$(73) \qquad \pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Diese letzte Gleichung schließt acht andere in sich; nämlich 1) die Gleichung:

$$(74) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

welche ein Ellipsoid ausdrückt, dessen drei Axen $2a$, $2b$, $2c$ sind; 2) die drei Gleichungen:

$$(75) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$(76) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$(77) \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

wovon jede ein Hyperboloid mit einem Fache ausdrückt (s. Vorl. 14, Gleich. 103); 3) die drei Gleichungen:

$$(78) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$(79) \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$(80) \qquad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

wovon jede ein Hyperboloid mit zwei Fächern ausdrückt (s. Vorl. 14, Gleich. (124)); und 4) die Gleichung:

$$(81) \qquad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

welche nichts ausdrückt, weil derselben nicht durch reelle Werthe der Coordinaten genügt werden kann. Wenn zwei der drei Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ einander gleich werden, so sind die vorhin erwähnten Ellipsoide oder Hyperboloide Rotationsellipsoide oder Rotationshyperboloide. Wenn man $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ setzt, so reducirt sich die Gleichung (73) offenbar, entweder auf die Gleichung

$$(82) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

welche eine Kugelfläche ausdrückt, oder auf die Gleichung:

$$(83) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = -a^2,$$

welche nichts ausdrückt. Wenn endlich eine oder zwei der Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ verschwinden, so werden eine oder zwei der Größen a, b, c unendlich und die Gleichung (73) enthält die drei Coordinaten x, y, z nicht mehr. Wenn man z. B. $\mathfrak{C}=0$ setzt, so hat man $c=\infty$ und die Gleichung (73) reducirt sich auf die Gleichung:

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{84}$$

welche 1) die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{85}$$

enthält, die eine elliptische Cylinderfläche ausdrückt, deren Erzeugungslinie zu der Axe der z parallel ist; 2) die beiden Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{86}$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{87}$$

wovon jede eine hyperbolische Cylinderfläche ausdrückt, deren Erzeugungslinie ebenfalls zu der Axe der z parallel ist, und 3) die Gleichung:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{88}$$

welche nichts ausdrückt. Wenn man zwei oder drei der Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gleich Null setzte, z. B. $\mathfrak{B}=0$, $\mathfrak{C}=0$, so hätte man $b=\infty$, $c=\infty$ und folglich reducirte sich die Gleichung (73) auf folgende:

$$\pm\frac{x^2}{a^2}=1, \tag{89}$$

welche die Gleichung:

$$x^2=a^2 \tag{90}$$

enthält, die zwei auf der Axe der x senkrechte Ebenen ausdrückt, und die Gleichung:

$$x^2=-a^2, \tag{91}$$

welche nichts ausdrückt.

Der Fall, in welchem der zweite Theil der Gleichung (1) verschwindet, verdient eine besondere Aufmerksamkeit. In diesem Falle reducirt sich die Gleichung (53) auf:

$$\mathfrak{A}\xi^2+\mathfrak{B}\eta^2+\mathfrak{C}\zeta^2=0 \tag{92}$$

Bezeichnet man ferner die Zahlenwerthe der Verhältnisse $\frac{1}{\mathfrak{A}}$, $\frac{1}{\mathfrak{B}}$, $\frac{1}{\mathfrak{C}}$ mit a^2, b^2, c^2, so daß man hat:

(93) $$\frac{1}{\mathfrak{A}} = \pm a^2, \quad \frac{1}{\mathfrak{B}} = \pm b^2, \quad \frac{1}{\mathfrak{C}} = \pm c^2,$$

wo a, b, c drei positive Größen bezeichnen, und setzt wieder die Buchstaben x, y, z für ξ, η, ζ; so verwandelt sich die Gleichung (92) in:

(94) $$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Diese letzte Gleichung begreift vier andere in sich, nämlich 1) die Gleichung:

(95) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

welche den Anfangspunkt der Coordinaten ausdrückt, weil ihr nur genügt werden kann, wenn man zugleich $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ setzt, und 2) die drei Gleichungen:

(96) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2},$$

(97) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{y^2}{b^2},$$

(98) $$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2},$$

wovon jede eine Kegelfläche mit elliptischer Basis ausdrückt, welche den Anfangspunkt zur Spitze und eine der Coordinatenaxen zur Axe hat. Wenn zwei der Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gleich würden, so könnte eine der drei Kegelflächen, als einen in einer auf der Axe senkrechten Ebene beschriebenen Kreis zur Basis habend angesehen werden. Wenn man $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ setzte, so würde die Basis jeder dieser drei Kegelflächen ein Kreis und zwei in derselben, durch die Axe gehenden Ebene liegende entgegengesetzte Erzeugungslinien würden auf einander senkrecht sein. Wenn endlich einer, oder zwei der Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sich auf Null reducirten, so würden eine oder zwei der Größen a, b, c unendlich werden und die Gleichung (94) würde die drei Coordinaten x, y, z nicht mehr enthalten. Setzte man z. B. $\mathfrak{C} = 0$, so fände man $c = \infty$ und die Gleichung (94) reducirte sich auf folgende:

(99) $$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

welche 1) die Gleichung:

(100) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

enthielte, die die Axe der z ausdrückt, weil ihr nur genügt werden kann, wenn man zugleich $x = 0$, $y = 0$ setzt, und 2) die Gleichung:

(101) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

welche sich in die beiden folgenden:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

zerlegen läßt und folglich zwei durch die Axe der z gehende Ebenen ausdrückt. Wenn man zu gleicher Zeit $\mathfrak{B} = 0$ und $\mathfrak{C} = 0$ setzte, so hätte man $b = \infty$ und $c = \infty$ und die auf

(102) $$x^2 = 0$$

reducirte Gleichung (94) drückte die Ebene der yz selbst aus.

Es ist wohl zu bemerken, daß das Verfahren, durch welches die Gleichung (1) auf die Gleichung (53) zurückgeführt wird, von dem der Größe K beigelegten Werthe unabhängig ist, und daß folglich die Axen der krummen Fläche (1) ihre Richtung nicht verändern, wenn man die Größe K verändert, ohne die Werthe der Coefficienten A, B, C, D, E, F zu verändern. Wir wollen nun, indem k eine positive Größe bezeichnet, successive

$$K = k, \quad K = -k, \quad K = 0$$

setzen, so erhalten wir statt der Gleichung (1) die drei folgenden:

(103) $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = k,$$

(104) $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = -k,$$

(105) $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 0,$$

welche drei Flächen ausdrücken, deren Axen dieselben sind, und welche nach der angegebenen Methode in drei andere Gleichungen von der Form:

(106) $$\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2 = k$$

(107) $$\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2 = -k$$

(108) $$\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2 = 0$$

verwandelt werden können. Schließt man nun wie oben, so überzeugt man sich leicht, daß die Gleichung (108) ausdrücken kann 1) einen einzigen Punkt, nämlich den Anfangspunkt, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ von Null verschiedene Größen von demselben Zeichen sind; 2) eine Kegelfläche des zweiten Grades, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ von Null verschiedene Werthe, aber mit verschiedenen Zeichen bekommen; 3) eine gerade Linie, nämlich eine der Coordinatenaxen, wenn zwei der Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ Größen von demselben Zeichen sind und der dritte $= 0$ ist; 4) zwei durch eine der Coordinatenaxen gehende Ebenen, wenn zwei dieser Coefficienten entgegengesetzte Zeichen haben und der dritte $= 0$ ist, und 5) eine der Coordinatenebenen, wenn zwei der Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ verschwinden. Ferner ergibt sich leicht, daß die Gleichungen (106) und (107) im ersten Falle ein Ellipsoid und eine

imaginäre Fläche, im zweiten Falle zwei Hyperboloide, das eine mit einem Fache und das andere mit zwei getrennten Fächern, im dritten Falle einen elliptischen und einen imaginären Cylinder, im vierten Falle zwei hyperbolische Cylinder und endlich im fünften Falle zwei Ebenen und eine imaginäre Fläche ausdrücken. Ferner wollen wir bemerken, daß im zweiten und vierten Falle sich die drei durch die Gleichungen (103), (104), (105) ausgedrückten Flächen einander um so mehr nähern, je weiter man sich vom Anfangspunkte der Coordinaten entfernt. Denn aus der in der dreizehnten Vorlesung gemachten Bemerkung (S. 160 und 161) folgt, daß, wenn man durch den Anfangspunkt eine beliebige Ebene legt, die geraden Durchschnittslinien dieser Ebene mit der krummen Fläche (105) Asymptoten der Curven sind, nach welchen sie die Flächen (103) und (104) schneidet.

Wir haben bewiesen, daß man, um die Gleichung (1) in allen Fällen auf die Gleichung (53) zu reduciren, nur die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z der Gleichung (1) in andere, ebenfalls rechtwinklige und sich auf neue, schicklich gewählte Axen beziehende Coordinaten ξ, η, ζ zu verwandeln braucht. Diese Coordinatenverwandlung wird vermittelst gewisser besonderer Werthe bewerkstelligt, welche man den Winkeln α_0, β_0, γ_0, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 in den Gleichungen (28) beilegt, und vermöge welcher das Polynom:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy$$

dem Trinome:

$$\mathfrak{A}\xi^2+\mathfrak{B}\eta^2+\mathfrak{C}\zeta^2$$

identisch gleich wird. Nun ist aber klar, daß dieselbe Transformation die lineäre und homogene Function von x, y, z, welche durch die Summe:

$$Gx+Hy+Iz$$

ausgedrückt wird, in eine andere lineäre und homogene Function von ξ, η, ζ, d. h. in ein Trinom von der Form:

$$\mathfrak{G}\xi+\mathfrak{H}\eta+\mathfrak{I}\zeta$$

verwandelt, wo $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{I}$ neue Constanten bezeichnen, und daß folglich die Gleichung (15), d. h. die allgemeine Gleichung der Flächen des zweiten Grades auf die Form:

$$\mathfrak{A}\xi^2+\mathfrak{B}\eta^2+\mathfrak{C}\zeta^2+\mathfrak{G}\xi+\mathfrak{H}\eta+\mathfrak{I}\zeta=K \tag{109}$$

zurückgeführt wird. Ferner gibt die letzte der Gleichungen (39):

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}=ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF. \tag{110}$$

Wenn nun der Ausdruck (19) einen von Null verschiedenen Werth hat, so ist dieses auch mit dem Producte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ der Fall und folglich verschwindet keiner der Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

Wenn man in derselben Voraussetzung:

$$x_0=-\frac{\mathfrak{G}}{2\mathfrak{A}},\quad y_0=-\frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{B}},\quad z_0=-\frac{\mathfrak{I}}{2\mathfrak{C}} \tag{111}$$

setzt, so ist der Punkt (x_0, y_0, z_0) offenbar ein Mittelpunkt der krummen Fläche; denn man braucht nur den Anfangspunkt in diesen Punkt zu verlegen und folglich $\xi + x_0$, $\eta + y_0$, $\zeta + z_0$ für ξ, η, ζ zu substituiren, um die Gleichung (109) auf die Form:

$$(112)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2 = \\ K - (\mathfrak{A}x_0^2 + \mathfrak{B}y_0^2 + \mathfrak{C}z_0^2 + \mathfrak{G}x_0 + \mathfrak{H}y_0 + \mathfrak{J}z_0) \end{array} \right.$$

zu reduciren. Ferner ist zu bemerken, daß die Gleichung (112) hinsichtlich der Form der Gleichung (53) ähnlich ist.

Wir wollen nun annehmen daß einer der Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ verschwindet und daß z. B. $\mathfrak{C} = 0$ ist. Alsdann wird der Werth des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{J}}{2\mathfrak{C}}$ unendlich, oder unbestimmt und die krumme Fläche (109) hat keinen Mittelpunkt mehr, oder sie hat deren unendlich viele, je nachdem die Größe $\mathfrak{J} = 0$ ist oder nicht. Wenn man im ersten Falle

$$(113)\quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 = -\frac{\mathfrak{G}}{2\mathfrak{A}}, \quad y_0 = -\frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{B}}, \\ z_0 = \frac{K - \mathfrak{A}x_0^2 - \mathfrak{B}y_0^2 - \mathfrak{G}x_0 - \mathfrak{H}y_0}{\mathfrak{J}} \end{array} \right.$$

setzt, so braucht man nur den Anfangspunkt in den Punkt (x_0, y_0, z_0) zu verlegen, um die Gleichung (109) auf die Form:

$$(114)\qquad \mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{J}\zeta^2 = 0$$

zurückzuführen, und aus dieser letzten Gleichung folgt, daß die gegebene Fläche die Axe der ζ zur Axe hat. Es seien nun a^2, b^2 die Zahlenwerthe von $\frac{1}{\mathfrak{A}}$, $\frac{1}{\mathfrak{B}}$ und $\frac{c}{2}$ der Zahlenwerth des Productes $\frac{\mathfrak{A}a^2}{\mathfrak{J}}$, so daß man hat:

$$(115)\quad \frac{1}{\mathfrak{A}} = \pm a^2, \quad \frac{1}{\mathfrak{B}} = \pm b^2, \quad \frac{\mathfrak{A}a^2}{\mathfrak{J}} = \pm\frac{1}{\mathfrak{J}} = \frac{c}{2},$$

und wir wollen für die Buchstaben ξ, η, ζ die Buchstaben x, y, z setzen; so verwandelt sich die Gleichung (114) in:

$$(116)\qquad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c},$$

und enthält 1) die Gleichung:

$$(117)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c},$$

welche ein elliptisches Paraboloid ausdrückt (s. Vorl. 14, Gleich. (59)), und 2) die Gleichung:

(118) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c},$$

welche ein hyperboliſches Paraboloid ausdrückt (ſ. Vorl. 14, Gleich. (68)). Wenn man $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ hätte, ſo wäre folglich $a = b$ und die Gleichung (114) oder (117) drückte ein Rotationsparaboloid aus. Wenn man endlich $\mathfrak{J} = 0$ ſetzte, ſo fände man $c = \infty$, und die Gleichung (116) ſtimmte mit der Gleichung (99) überein.

Wir wollen ferner annehmen, daß in der Gleichung (109) zwei der Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ verſchwinden, und z. B. $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$ iſt. Nimmt man alsdann an, daß der Werth von x_0 wieder durch die erſte der Gleichungen (111) beſtimmt wird und bezeichnet ferner durch y_0, z_0 zwei Werthe von η und ζ, welche der Gleichung:

(119) $$\mathfrak{H} y_0 + \mathfrak{J} z_0 = K - \mathfrak{A} x_0^2 - \mathfrak{G} x_0$$

Genüge leiſten; ſo braucht man nur den Anfangspunkt in den Punkt (x_0, y_0, z_0) zu verlegen, um die Gleichung (109) auf die Form:

(120) $$\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{H}\eta + \mathfrak{J}\zeta = 0$$

zu reduciren. Wenn $\mathfrak{J} = 0$ iſt, und in der Gleichung (120) für die Buchſtaben ξ, η die Buchſtaben x, y geſetzt werden, ſo reducirt ſich dieſelbe auf:

(121) $$\mathfrak{A} x^2 + \mathfrak{H} y = 0.$$

Dieſe letzte Gleichung drückt offenbar einen Cylinder aus, welcher eine in der Ebene der xy liegende Parabel zur Baſis und eine zu der Axe der z parallele Gerade zur Erzeugungslinie hat. Sie drückte ferner die Ebene der yz aus, wenn $\mathfrak{H} = 0$ wäre. Noch wollen wir bemerken, daß ſelbſt in dem Falle, wo $\mathfrak{J}$ nicht Null iſt, die Gleichung (120) ſo transformirt werden kann, daß ſie der Gleichung (121) ähnlich wird. Zu dem Zwecke braucht man nur x für ξ und

(122) $$\frac{\mathfrak{H}\eta + \mathfrak{J}\xi}{\sqrt{(\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{J}^2)}} = y$$

zu ſetzen, d. h. eine auf der Axe der ξ ſenkrechte Gerade zur Axe der y zu nehmen, welche zugleich ſo durch den Anfangspunkt gezogen iſt, daß ſie mit den Halbaxen der poſitiven η und ζ zwei Winkel bildet, deren Coſinus reſp. gleich

$$\frac{\mathfrak{H}}{\sqrt{(\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{J}^2)}}, \quad \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{(\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{J}^2)}}$$

ſind. Denn bezeichnet man die drei Winkel, welche die in Rede ſtehende Gerade mit den Halbaxen der poſitiven Coordinaten ξ, η und ζ bildet, mit β_0, β_1, β_2 ſo hat man:

$$\cos\beta_0 = 0, \quad \cos\beta_1 = \frac{\mathfrak{H}}{\sqrt{(\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{J}^2)}},$$

$$\cos\beta_2 = \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{(\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{J}^2)}},$$

und die Gleichung

$$y = \xi \cos\beta_0 + \eta \cos\beta_1 + \zeta \cos\beta_2,$$

reducirt sich offenbar auf die Gleichung (122), vermöge welcher sich die Gleichung (120) auf:

$$\mathfrak{A}x^2 + (\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{J}^2)^{\frac{1}{2}} y = 0 \qquad (123)$$

reducirt. Diese Gleichung ist der Gleichung (121) ähnlich und drückt ebenfalls einen Cylinder mit paraboliſcher Basis aus.

Wenn man in den vorhergehenden Rechnungen die Coordinatenaxen mit einander vertauscht, so erhält man succeſſive alle Gleichungen, welche als beſondere Fälle in der Gleichung (109) enthalten ſind.

Kurz, man ſieht aus dem Vorhergehenden, daß die krummen Flächen, welche durch dieſe Gleichung ausgedrückt werden können, ſich auf die Oberfläche der Kugel, die des Ellipſoides und des Hyperboloides mit einem Fache oder mit zwei Fächern, die des Rotationsparaboloides, des elliptiſchen oder hyperboliſchen Paraboloides, des Kegels mit kreisförmiger oder elliptiſcher Baſis und endlich auf die des geraden Cylinders, welcher einen Kreis, eine Ellipſe, eine Parabel oder eine Hyperbel zur Baſis hat, reduciren. Ferner geſchieht es zuweilen, daß die Gleichung (109) eine oder zwei Ebenen, eine oder zwei Gerade, einen einzigen Punkt und ſelbſt, daß ſie nichts ausdrückt. Es iſt wohl zu bemerken, daß in dem Falle, wo die Gleichung (109) eine cylindriſche Fläche ausdrückt, es der Geraden, welche man als Axen dieſer Fläche betrachten kann, unendlich viele gibt. Denn nach den obigen Diſinitionen kann man nicht blos die Gerade Axe einer cylindriſchen Fläche mit elliptiſcher oder hyperboliſcher Baſis nennen, welche man gewöhnlich Axe des Cylinders nennt, und welche die Mittelpunkte der Ellipſen oder Hyperbeln enthält, deren Ebenen auf den Erzeugungslinien ſenkrecht ſind, ſondern auch die Axen dieſer Curven ſelbſt, weil eine auf einer dieſer Axen ſenkrechte Ebene die cylindriſche Fläche immer nach zwei Erzeugungslinien ſchneidet, welche von dem Punkte, wo ſie dieſe Axe trifft, gleichweit entfernt ſind. Desgleichen, wenn man einen paraboliſchen Cylinder mit Ebenen durchſchneidet, welche auf den Erzeugungslinien ſenkrecht ſind, ſo können die Axen der verſchiedenen Durchſchnittsparabeln als eben ſo viel Axen der cylindriſchen Fläche ſelbſt angeſehen werden. In dem geraden Cylinder mit kreisförmiger Baſis ſind alle Halbmeſſer der Kreiſe, nach welchen derſelbe mit Ebenen geſchnitten wird, die zur Baſis parallel ſind, Axen der cylindriſchen Fläche.

Ferner iſt zu bemerken, daß die durch die Gleichungen (53) und (109) ausgedrückten Flächen parallele Axen haben und daß folglich daſſelbe von den durch die Gleichungen (1) und (15) ausgedrückten Flächen gilt.

Aufgabe 2. Den Mittelpunkt der durch das Syſtem der beiden Gleichungen:

$$(124)\quad \begin{cases} Ax^2+By^2+Cz^2 \\ +2Dyz+2Ezx+2Fxy=K, \\ x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu=k \end{cases}$$

ausgedrückten Curve des zweiten Grades zu finden, wenn sie einen solchen hat.

Auflösung. Es seien x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des gesuchten Mittelpunktes der Curve. Wenn man den Anfangspunkt in diesen Mittelpunkt verlegt, indem man $x+x_0$, $y+y_0$, $z+z_0$ resp. für x, y, z setzt, so verwandeln sich die Gleichungen (124) in:

$$(125)\quad \begin{cases} Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy \\ +2[(Ax_0+Fy_0+Ez_0)x+(Ex_0+By_0+Dz_0)y \\ +(Ex_0+Dy_0+Cz_0)z]= \\ K-(Ax_0^2+By_0^2+Cz_0^2 \\ +2Dy_0z_0+2Ez_0x_0+2Fx_0y_0), \end{cases}$$

$$(126)\quad \begin{cases} x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu= \\ k-(x_0\cos\lambda+y_0\cos\mu+z_0\cos\nu), \end{cases}$$

und das System dieser beiden letzten Gleichungen muß ungeändert bleiben, wenn man darin $-x$ für x, $-y$ für y und $-z$ für z setzt. Nun wird aber diese Bedingung erfüllt, wenn man:

$$(127)\qquad x_0\cos\lambda+y_0\cos\mu+z_0\cos\nu=k,$$

und:

$$(128)\quad \begin{cases} \dfrac{Ax_0+Fy_0+Ez_0}{\cos\lambda}=\dfrac{Fx_0+By_0+Dz_0}{\cos\mu} \\ =\dfrac{Ex_0+Dy_0+Cz_0}{\cos\nu} \end{cases}$$

setzt. Denn alsdann reducirt sich die Gleichung (126) auf folgende:

$$(2)\qquad x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu=0,$$

welche durch die Veränderung der Zeichen der Coordinaten x, y, z nicht geändert wird und aus welcher in Verbindung mit der Gleichung (128) folgt:

$$(129)\quad \begin{cases} A(x_0+Fy_0+Ez_0)x+(Fx_0+By_0+Dz_0)y \\ +(Ex_0+Dy_0+Cz_0)z=0. \end{cases}$$

Berücksichtigt man ferner die Gleichung (129), so verwandelt sich die Gleichung (125) in:

$$(130)\quad \begin{cases} Ax^2+By^2+Cz^2+ \\ 2Dyz+2Ezx+2Fxy \\ =K-(Ax_0^2+By_0^2+Cz_0^2 \\ +2Dy_0z_0+2Ez_0x_0+2Fx_0y_0) \end{cases}$$

und erfüllt die vorgeschriebene Bedingung ebenfalls noch. Die Gleichungen (127) und (128) sind zur Bestimmung der Coordinaten x_0, y_0, z_0 des gesuchten Mittelpunktes hinreichend. Die erste drückt aus, daß dieser Mittelpunkt in der durch die Gleichung (126) ausgedrückten Ebene, d. h. in der Ebene der gegebenen Curve liegt. Anderer Seits, da die Coordinaten x, y, z der Fläche (1) der Gleichung:

$$(131)\quad \frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}$$

genügen müssen für den Punkt, wo der vom Anfangspunkte nach dem in Rede stehenden Mittelpunkte gezogene Radiusvector von dieser Fläche geschnitten wird, und da die Gleichungen (128) und (131) die Gleichung (98) der vorhergehenden Vorlesung, nämlich:

$$(132)\quad \begin{cases} \dfrac{Ax+Fy+Ez}{\cos\lambda}=\dfrac{Fx+By+Dz}{\cos\mu} \\ =\dfrac{Ex+Dy+Cz}{\cos\nu} \end{cases}$$

zur Folge haben; so kann man behaupten, daß der Durchschnittspunkt genau der Berührungspunkt des Ellipsoides mit einer zu der Ebene der Curve parallelen Berührungsebene ist.

Die Gleichungen (127) und (128) lassen sich leicht auf folgende Weise auflösen. Wenn man den gemeinschaftlichen Werth der drei Brüche in der Gleichung (128) mit t bezeichnet, so hat man:

$$(133)\quad \begin{cases} Ax_0+Fy_0+Ez_0=t\cos\lambda, \\ Fx_0+By_0+Dz_0=t\cos\mu, \\ Ex_0+Dy_0+Cz_0=t\cos\nu. \end{cases}$$

Da diese letzten Gleichungen den Gleichungen (17) ähnlich sind, so lassen sie sich auf dieselbe Weise auflösen und geben für x_0, y_0, z_0 Werthe, die denen gleich sind, welche die Gleichungen (18) geben, wenn man in den zweiten Theilen für die Größen G, H, I die Producte $-t\cos\lambda, -t\cos\mu, -t\cos\nu$ setzt. Man hat folglich:

$$(134)\quad \begin{cases} x_0 = \\ \dfrac{(BC-D^2)\cos\lambda+(DE-CF)\cos\mu+(FD-BE)\cos\nu}{ABC-D^2A-E^2B-F^2C+2DEF}\,t, \\ y_0 = \\ \dfrac{(DE-CF)\cos\lambda+(CA-E^2)\cos\mu+(EF-AD)\cos\nu}{ABC-D^2A-E^2B-F^2C+2DEF}\,t, \\ z_0 = \\ \dfrac{(FD-BE)\cos\lambda+(EF-AD)\cos\mu+(AB-F^2)\cos\nu}{ABC-D^2A-E^2B-F^2C+2DEF}\,t. \end{cases}$$

Wenn man die vorhergehenden Werthe von z^2 y_0, z_0 in die Gleichung (127) ſubſtituirt, und der Kürze wegen

$$(135)\quad \begin{cases} P=(BC-D^2)\cos^2\lambda+(CA-E^2)\cos^2\mu \\ \quad +(AB-F^2)\cos^2\nu+2(EF-AD)\cos\mu\cos\nu \\ \quad +2(FD-BE)\cos\nu\cos\lambda+2(DE-CF)\cos\lambda\cos\mu \end{cases}$$

ſetzt, ſo erhält man:

$$(136)\quad t=\frac{ABC-D^2A-E^2B-F^2C+2DEF}{P}\,k,$$

und folglich ergibt ſich aus den Gleichungen (134):

$$(137)\quad \begin{cases} x_0 = \\ \dfrac{(BC-D^2)\cos\lambda+(DE-CF)\cos\mu+(FD-BE)\cos\nu}{P}\,k, \\ y_0 = \\ \dfrac{(DE-CF)\cos\lambda+(CA-E^2)\cos\mu+(EF-AD)\cos\nu}{P}\,k, \\ z_0 = \\ \dfrac{(FD-BE)\cos\lambda+(EF-AD)\cos\mu+(AB-F^2)\cos\nu}{P}\,k. \end{cases}$$

Dieſe Gleichungen geben ein einziges Syſtem endlicher Werthe von x_0, y_0, z_0, wenn die Größe P nicht Null iſt, und folglich hat die gegebene Curve alsdann einen einzigen Mittelpunkt, welcher der Anfangspunkt ſelbſt iſt, wenn die Größe k verſchwindet.

Wenn die Größe P ſich auf Null reducirt, ſo werden die Werthe von x_0, y_0, z_0 unendlich, oder unbeſtimmt. Im erſten Falle kann die durch das Syſtem der Gleichungen (124) ausgedrückte Curve des zweiten Grades nur eine Parabel ſein und im zweiten Falle verwandelt ſich dieſe Linie in ein Syſtem zweier paralleler Geraden.

Wenn man den Anfangspunkt in den Mittelpunkt der Curve (124) verlegt, so werden die Gleichungen dieser Curve den Gleichungen (1) und (2) ähnlich. Aus dieser Bemerkung folgt, daß man zur Bestimmung der Axen der Curve (124) nur folgende Aufgabe aufzulösen braucht:

Aufgabe 3. Die Axen der Curve des zweiten Grades zu bestimmen, welche durch die beiden Gleichungen:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} Ax^2+By^2+Cz^2+ \\ 2Dyz+2Ezx+2Fxy=K, \end{array}\right.$$

$$(2)\quad x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu=0$$

ausgedrückt wird.

Auflösung. Wenn man die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z in andere rechtwinklige Coordinaten ξ, η, ζ verwandelt und die auf der durch die Gleichung (2) ausgedrückten Ebene senkrechte Gerade zur Axe der ζ nimmt, so verwandeln sich die Gleichungen der gegebenen Curve in zwei andere von der Form:

$$(138)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A}\xi^2+\mathfrak{B}\eta^2+\mathfrak{C}\zeta^2+ \\ 2\mathfrak{D}\eta\zeta+2\mathfrak{E}\zeta\xi+2\mathfrak{F}\xi\eta=K, \\ \zeta=0, \end{array}\right.$$

und wenn folglich die Curve auf rechtwinklige, in ihrer Ebene liegende Axen bezogen wird, so ist ihre Gleichung folgende:

$$(139)\quad \mathfrak{A}\xi^2+\mathfrak{B}\eta^2+2\mathfrak{F}\xi\eta=K.$$

Wenn der vorhergehenden Gleichung durch reelle Werthe der Coordinaten ξ, η Genüge geleistet werden kann, so drückt sie eine Ellipse, oder eine Hyperbel, oder ein System zweier gleich weit vom Anfangspunkte entfernter Parallelen aus, je nachdem die Differenz:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{F}^2$$

eine positive, oder negative Größe, oder Null ist. Die Ellipse reducirt sich ferner jedesmal auf einen Punkt und die Hyperbel auf ein System zweier sich schneidender Geraden, wenn der zweite Theil der Gleichung oder die Größe K verschwindet. Wir wollen nun zuerst annehmen, die Curve sei eine Ellipse. Diese Ellipse hat zwei sich unter rechten Winkeln schneidende Axen, und wenn man die beiden Halbaxen mit a, b bezeichnet, so sind a, b die größten und kleinsten Werthe des vom Anfangspunkte nach einem Punkte der Curve gezogenen Radiusvectors. Die Aufgabe reducirt sich also darauf, den größten und kleinsten Werth der durch die Gleichung:

$$(13)\quad r^2=x^2+y^2+z^2$$

bestimmten Function r zu suchen, wenn vorausgesetzt wird, daß die Veränderlichen x, y, z durch die Gleichungen (1) und (2) mit einander verbunden sind. Zu dem Zwecke braucht man aber nur das

Differenzial des Radiusvectors r oder seines Quadrates r^2 gleich Null zu setzen, und da sich aus der Gleichung (13):

$$\tfrac{1}{2}d(r^2)=rdr=xdx+ydy+zdz$$

ergibt, so erhält man, wenn man auf die eben erwähnte Art verfährt, die Gleichung:

$$xdx+ydy+zdz=0, \tag{140}$$

aus welcher man dx, dy, dz vermittelst der Differenzialgleichungen der gegebenen Curve, d. h. vermittelst der beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}(Ax+Fy+Ez)\,dx+(Fx+By+Dz)\,dy\\ +(Ex+Dy+Cz)\,dz=0,\end{array}\right\} \tag{141}$$

$$cos\lambda\,dx+cos\mu\,dy+cos\nu\,dz=0 \tag{142}$$

eliminiren muß. Wir wollen nun bemerken, daß man, um die Elimination von dy und dz zwischen den Gleichungen (140), (141) und (142) zu verrichten, sie nur zu addiren braucht, nachdem man zwei derselben, z. B. die Gleichungen (140) und (142) durch unbestimmte Coefficienten multiplicirt hat und dann diese Coefficienten so zu wählen, daß die resultirende Gleichung weder dy, noch dz enthält. Alsdann ist der erste Theil dieser Gleichung nur ein Product aus dem Differenziale dx und einem Factor, welcher ebenfalls verschwinden muß. Bezeichnet man nun die beiden fraglichen unbestimmten Coefficienten mit $-s$ und $-t$ so erscheint die resultirende Gleichung unter der Form:

$$\begin{array}{l}(Ax+Fy+Ez-sx-tcos\lambda)\,dx\\ +(Fx+By+Dz-sy-tcos\mu)\,dy\\ +(Ex+Dy+Cz-sz-tcos\nu)\,dz=0,\end{array}$$

und wenn man, nachdem die Coefficienten s, t so gewählt sind, daß die Differenziale dy und dz verschwinden, auch den Coefficienten des Differenziales dx gleich Null setzt, so erhält man offenbar:

$$\left.\begin{array}{l}Ax+Fy+Ez=sx+tcos\lambda,\\ Fx+By+Dz=sy+tcos\mu,\\ Ex+Dy+Cz=sz+tcos\nu.\end{array}\right\} \tag{143}$$

Wenn man diese letzten Gleichungen addirt, nachdem man die erste mit x, die zweite mit y, und die dritte mit z multiplicirt hat, so findet man, indem man die Gleichungen (1) und (13) berücksichtigt:

$$K=sr^2.$$

Der Werth von s ist folglich:

$$(24) \qquad s = \frac{K}{r^2}.$$

Wenn man dieſen Werth von s nimmt und außerdem bemerkt daß die Gleichungen (143) folgendermaßen ausgedrückt werden können:

$$(144) \quad \begin{cases} (A-s)x + Fy + Ez = t\cos\lambda, \\ Fx + (B-s)y + Dz = t\cos\mu, \\ Ex + Dy + (C-s)z = t\cos\nu; \end{cases}$$

ſo ergibt ſich, daß man für die Größen A, B, C nur die Differenzen $A-s$, $B-s$, $C-s$ in die zweiten Theile der Gleichungen (134) und in den Werth von P, welchen die Gleichung (135) gibt, zu ſetzen braucht, um einer Seits die dem größten und kleinſten Werthe des Radiusvectors r entſprechenden Werthe der Coordinaten x, y, z und anderer Seits den Coefficienten t in der Gleichung (2) oder vielmehr in der, welche ſich daraus durch Subſtitution der Werthe von x, y, z ergibt, zu erhalten. Dividirt man aber die erwähnte Gleichung durch t, ſo findet man:

$$(145) \quad \begin{cases} [(B-s)(C-s)-D^2]\cos^2\lambda + [(C-s)(A-s)-E^2]\cos^2\mu \\ +[(A-s)(B-s)-F^2]\cos^2\nu + 2[EF-(A-s)D]\cos\mu\cos\nu \\ +2[FD-(B-s)E]\cos\nu\cos\lambda + 2[DE-(C-s)F]\cos\lambda\cos\mu \\ = 0, \end{cases}$$

oder was daſſelbe iſt:

$$(146) \quad \begin{cases} s^2 - \left\{ \begin{matrix} (B+C)\cos^2\lambda + (C+A)\cos^2\mu + (A+B)\cos^2\nu \\ -2D\cos\mu\cos\nu - 2E\cos\lambda - 2F\cos\lambda\cos\mu \end{matrix} \right\} s \\ +(BC-D^2)\cos^2\lambda + (CA-E^2)\cos^2\mu + \\ (AB-F^2)\cos^2\nu + 2(EF-AD)\cos\mu\cos\nu + \\ 2(FD-BE)\cos\nu\cos\lambda + 2(DE-CF)\cos\lambda\cos\mu = 0. \end{cases}$$

Ferner folgt aus den Gleichungen (134), nachdem man darin x, y, z für x_0, y_0, z_0 und $A-s$, $B-s$, $C-s$ für A, B, C geſetzt hat:

$$(147) \quad \begin{cases} \dfrac{x}{\left\{ \begin{matrix} [(B-s)(C-s)-D^2]\cos\lambda + \\ [DE-(C-s)F]\cos\mu + \\ [FD-(B-s)E]\cos\nu \end{matrix} \right\}} = \\ \dfrac{y}{\left\{ \begin{matrix} [DE-(C-s)F]\cos\lambda + \\ [(C-s)(A-s)-E^2]\cos\mu + \\ [EF-(A-s)D]\cos\nu \end{matrix} \right\}} = \end{cases}$$

$$\left| \frac{z}{\begin{Bmatrix} [FD-(B-s)E]\cos\lambda + \\ [EF-(A-s)D]\cos\mu + \\ [(A-s)(B-s)-F^2]\cos\nu \end{Bmatrix}} \right.$$

Bezeichnet man endlich die Winkel, welche der größte oder kleinste Radiusvector mit den Halbaxen der positiven Coördinaten bildet, durch α, β, γ, so hat man:

$$\text{(148)} \qquad \frac{\cos\alpha}{x} = \frac{\cos\beta}{y} = \frac{\cos\gamma}{z},$$

und folglich:

$$\text{(149)} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\cos\alpha}{\begin{Bmatrix} [(B-s)(C-s)-D^2]\cos\lambda + \\ [DE-(C-s)F]\cos\mu + \\ [FD-(B-s)E]\cos\nu \end{Bmatrix}} = \\ \dfrac{\cos\beta}{\begin{Bmatrix} [DE-(C-s)F]\cos\lambda + \\ [(C-s)(A-s)-E^2]\cos\mu + \\ [EF-(A-s)D]\cos\nu \end{Bmatrix}} = \\ \dfrac{\cos\gamma}{\begin{Bmatrix} [FD-(B-s)E]\cos\lambda + \\ [EF-(A-s)D]\cos\mu + \\ [(A-s)(B-s)-F^2]\cos\nu \end{Bmatrix}}. \end{array} \right.$$

Wenn die gegebene Curve eine Ellipse ist, wie wir zuerst angenommen haben, so gibt die Gleichung (146) nothwendig zwei reelle Werthe von:

$$s = \frac{K}{r^2},$$

welche dem größten und kleinsten Werthe des Radiusvectors r entsprechen. Bezeichnet man alsdann die beiden Halbaxen der Ellipse mit a und b, so sind die beiden Wurzeln der Gleichung (146):

$$s = \frac{K}{a^2}, \quad s = \frac{K}{b^2},$$

und man hat folglich:

$$(150)\quad \begin{cases} K\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=(B+C)\cos^2\lambda+(C+A)\cos^2\mu \\ \qquad\qquad +(A+B)\cos^2\nu-2D\cos\mu\cos\nu \\ \qquad\qquad -2E\cos\nu\cos\lambda-2F\cos\lambda\cos\mu, \\ \frac{K^2}{a^2b^2}=(BC-D^2)\cos^2\lambda+(CA-E^2)\cos^2\mu \\ \qquad +(AB-F^2)\cos^2\nu+2(EF-AD)\cos\mu\cos\nu \\ \qquad +2(FD-BE)\cos\nu\cos\lambda+2(DE-CF)\cos\lambda\cos\mu. \end{cases}$$

Ferner entsprechen jedem der beiden Werthe von s, oder was daſſelbe iſt, jeder der Axen der Ellipſe reelle Werthe von α, β, γ, welche durch die Gleichung (149) verbunden mit der Gleichung:

$$(151)\qquad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

beſtimmt werden, und dieſe Werthe drücken die Winkel aus, welche eine, nach der einen oder andern Richtung verlängerte Axe der Ellipſe mit den Halbaxen der poſitiven Coordinaten bildet.

Die eben betrachtete Ellipſe verwandelt ſich in ein Syſtem zweier paralleler Geraden, wenn eine der Größen a, b unendlich wird. Alsdann drückt diejenige dieſer beiden Größen, welche einen endlichen Werth behält, die Hälfte der Entfernung zwiſchen den beiden Parallelen aus und die durch die Gleichungen (149) beſtimmten Winkel α, β, γ ſind genau die, welche die beiden Parallelen und dieſe Entfernung mit den Halbaxen der poſitiven Coordinaten bilden.

Wenn die Größen a, b einander gleich würden, ſo verwandelte ſich die Ellipſe in einen Kreis und die Werthe der Winkel α, β, γ würden unbeſtimmt.

Wir wollen nun annehmen, die gegebene Curve würde eine Hyperbel, ſo hat der Radiusvector r einen kleinſten Werth, welcher die Hälfte der reellen Axen der Hyperbel iſt, und wenn man dieſe Axe mit $2a$ bezeichnet, ſo hat die Gleichung (146) nothwendig eine reelle Wurzel, nämlich:

$$s=\frac{K}{a^2}.$$

Folglich ſind die beiden Wurzeln der Gleichung (146) reell. Ferner entſprechen jeder dieſer Wurzeln reelle Werthe von α, β, γ, welche durch das Syſtem der Gleichungen (149) und (151) beſtimmt werden und die Winkel ausdrücken können, welche eine gewiſſe, nach dem einen oder andern Sinne gezogene Gerade mit den Halbaxen der poſitiven Coordinaten bildet. Anderer Seits kann man behaupten: 1) daß die beiden Werthe von s und die Richtungen der dieſen Werthen entſprechenden Geraden von der Größe K, welche weder in der Gleichung (146), noch in der Gleichung (149) vorkommt, unabhängig ſind, und 2) daß eine der beiden Geraden immer mit der reellen Axe der Hyperbel zuſammenfällt. Endlich folgt aus der

in Vorles. 13 (S. 160 und 161) gemachten Bemerkung, daß, wenn man K in den Gleichungen (1) und (2) variiren läßt, die verschiedenen, durch diese Gleichungen ausgedrückten Hyperbeln alle dieselben Asymptoten und folglich dieselben Axen haben. Nur wenn die Größe K das Zeichen verändert, so ändert das Verhältniß $\frac{K}{a^2}$ das seinige ebenfalls, so daß die reelle Axe $2a$ nicht mehr derselben Wurzel der Gleichung (146) entsprechen, noch dieselbe Richtung beibehalten kann. Aus diesen Bemerkungen folgt, daß die Gleichung (146) in der gemachten Voraussetzung zwei Wurzeln von entgegengesetztem Zeichen hat, wovon die eine die den positiven Werthen der Größe K, die andere die den negativen Werthen derselben Größe entsprechenden reellen Hyperbelaxen gibt. Ferner ist zu bemerken, daß diese beiden Arten reeller Axen mit den beiden Geraden zusammenfallen, welche die von den gemeinschaftlichen Asymptoten aller Hyperbeln gebildeten Winkel in gleiche Theile theilen, und daß diese beiden auf einander senkrechten Geraden genau die sind, welche vermittelst der Gleichungen (149) und (151) bestimmt werden.

Wenn die Größe K verschwindet, so drücken die Gleichungen (1) und (2) die gemeinschaftlichen Asymptoten der verschiedenen Hyperbeln aus und die durch die Gleichungen (149) und (151) bestimmten Winkel α, β, γ entsprechen wieder den beiden eben erwähnten Geraden.

Die Bestimmung der Axen der durch die Gleichungen (1) und (2) ausgedrückten Curve würde viel leichter, wenn man für diese Gleichungen die Gleichung (139) substituirte. Denn alsdann müßten in der Gleichung (146) für die Größen A, B, F die Größen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{F}$, für den Cosinus des Winkels ν die Einheit und für die Größen C, D, E, $\cos\lambda, \cos\mu$ Null gesetzt werden. Auf diese Weise erhielte man:

$$(152) \qquad s^2 - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})s + \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{F}^2 = 0.$$

Diese letzte Gleichung, welche mit der Gleichung in Beisp. 4 in Vorles. 22 der Differenzialr. übereinstimmt, hat offenbar zwei reelle Wurzeln, nämlich:

$$(153) \quad \begin{cases} s = \frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}{2}\right)^2 + \mathfrak{F}^2\right]}, \\ s = \frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}{2}\right)^2 + \mathfrak{F}^2\right]}; \end{cases}$$

und diese beiden Wurzeln sind Größen von demselben, oder von entgegengesetztem Zeichen, je nachdem die Differenz $\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{F}^2$ eine positive oder negative Größe ist. Im ersten Falle folgt aus den Gleichungen (150):

$$(154) \qquad K\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}, \quad \frac{K^2}{a^2 b^2} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{F}^2.$$

Zum Schlusse dieser Vorlesung wollen wir noch bemerken, daß die Gleichungen (39), (150), (154) gewisse Eigenschaften der krummen Linien oder Flächen des zweiten Grades anzeigen. Betrachtet man

z. B. die durch die Gleichung (139) ausgedrückte Ellipse und bezeichnet die vom Mittelpunkte derselben nach den Punkten, wo sie die Axen der ξ und η schneidet, gezogenen Radienvectoren mit r_0, r_1, so hat man:

$$\mathfrak{A} = \frac{K}{r_0^2}, \quad \mathfrak{B} = \frac{K}{r_1^2},$$

und folglich gibt die erste der Gleichungen (154):

$$(155) \qquad \frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

In dieser letzten Formel ist folgender Lehrsatz enthalten:

Lehrsatz 1. Wenn man vom Mittelpunkte einer Ellipse nach ihrem Umfange zwei beliebige, sich unter einem rechten Winkel schneidende Radienvectoren zieht und wenn man die Einheit successive durch das Quadrat jedes dieser Radienvectoren dividirt; so ist die Summe der Quotienten eine constante Größe, welche der Summe der Quotienten gleich ist, die man erhält, wenn man die Einheit successive durch das Quadrat jeder Halbaxe der Ellipse dividirt.

Wenn die Gleichung (139) eine Hyperbel ausdrückt, so erhält man, indem man blos das Zeichen der Größe K verändert, eine zweite Hyperbel, welche denselben Mittelpunkt, dieselben Asymptoten und dieselben Axen hat, nur mit dem Unterschiede, daß die reelle Axe der ersten auf der reellen Axe der zweiten senkrecht ist. Wir wollen diese beiden Hyperbeln conjugirte Hyperbeln nennen. Substituirt man alsdann für die Ellipse ein System zwei conjugirter Hyperbeln, so ergibt sich leicht, daß man für den Lehrsatz 1 folgenden setzen muß.

Lehrsatz 2. Wenn man zwei conjugirte Hyperbeln beschrieben hat und man zieht vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte beider in der einen oder andern zwei beliebige, sich unter einem rechten Winkel durchschneidende Radienvectoren und dividirt die Einheit successive durch das Quadrat jedes dieser Radienvectoren; so ist die Summe der Quotienten eine constante Größe, wofern man in dieser Summe den Quotienten in Beziehung auf die eine Hyperbel immer mit dem Zeichen + und den für die andere mit dem Zeichen — nimmt. Die erwähnte Summe ist folglich immer gleich der Differenz zwischen den Quotienten, welche man erhält, wenn man die Einheit successive durch das Quadrat der halben reellen Axe der ersten Hyperbel und durch das Quadrat der halben reellen Axe der zweiten Hyperbel dividirt.

Wir wollen nun die durch die Gleichung (1) ausgedrückte krumme Fläche wieder betrachten und durch r_0, r_1, r_2 die Quadrat-

wurzeln aus den Zahlenwerthen der Verhältniſſe $\frac{K}{A}$, $\frac{K}{B}$, $\frac{K}{C}$ bezeichnen, ſo daß

$$\frac{K}{A} = \pm r_0^2, \quad \frac{K}{B} = \pm r_1^2, \quad \frac{K}{C} = \pm r_2^2$$

iſt. Aus dieſen letzten Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen (72) und der erſten der Gleichungen (39) folgt:

$$(156) \quad \pm\frac{1}{r_0^2} \pm \frac{1}{r_1^2} \pm \frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2} \pm \frac{1}{c^2}.$$

Wenn die krumme Fläche (1) die eines Ellipſoides iſt, ſo hat man blos:

$$(157) \quad \frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

In demſelben Falle bezeichnen r_0, r_1, r_2 drei Radienvectoren, welche ſich unter rechten Winkeln ſchneiden, und man kann alſo folgenden Lehrſatz aufſtellen:

Lehrſatz 3. Wenn man vom Mittelpunkte eines Ellipſoides nach der Oberfläche deſſelben drei beliebige, ſich unter rechten Winkeln ſchneidende Radienvectoren zieht und die Einheit ſucceſſive durch das Quadrat jedes dieſer Radienvectoren dividirt; ſo iſt die Summe der Quotienten, eine conſtante Größe und gleich der Summe der Quotienten, welche man erhält, wenn man die Einheit ſucceſſive durch das Quadrat jeder Halbaxe des Ellipſoides dividirt.

Wenn die Gleichung (1) ein Hyperboloid ausdrückt, ſo erhält man, wenn man blos das Zeichen der Größe K verändert, ein zweites Hyperboloid, welches denſelben Mittelpunkt und dieſelben Axen hat, nur mit dem Unterſchiede, daß das eine der beiden Hyperboloide zwei Fächer und das andere nur eins hat und daß die beiden reellen Axen des zweiten auf der reellen Axe des erſten ſenkrecht ſind. Wir wollen dieſe beiden Hyperboloide conjugirte nennen. Unterſucht man die verſchiedenen Combinationen der Zeichen, welche die Gleichung (156) darbieten kann, mit etwas Aufmerkſamkeit, ſo ergibt ſich leicht folgender Lehrſatz:

Lehrſatz 4. Wenn man zwei conjugirte Hyperboloide beſchrieben hat und man zieht vom gemeinſchaftlichen Mittelpunkte derſelben nach ihrer Oberfläche in dem einen oder andern drei unter rechten Winkeln ſich durchſchneidende Radienvectoren und dividirt die Einheit ſucceſſive durch das Quadrat jedes dieſer Radienvectoren; ſo iſt die Summe der Quotienten eine conſtante Größe, wenn man in dieſer Summe jeden, ſich auf das Hyperboloid mit einem Fache beziehenden Quotienten

mit dem Zeichen + und jeden, ſich auf das zweite Hyperboloid beziehenden Quotienten mit dem Zeichen — nimmt. Die erwähnte Summe iſt alſo immer der Differenz gleich, welche man erhielte, wenn man, nachdem man die Einheit ſucceſſive durch die Quadrate der halben reellen Axen der beiden Hyperboloide dividirt hat, den Quotienten in Beziehung auf die reelle Axe des zweiten Hyperboloides von der Summe der Quotienten in Beziehung auf die beiden reellen Axen des erſten abzöge.

Sechszehnte Vorlesung.

Differenzial des Bogens einer beliebigen Curve. — Von den krummen Linien und Flächen, welche sich in einem gegebenen Punkte schneiden und berühren.

Wir wollen eine beliebige, durch zwei Gleichungen zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z ausgedrückte Curve betrachten und den Bogen derselben, welcher zwischen einem festen und dem beweglichen Punkte (x, y, z) liegt, mit s bezeichnen. Wenn man der Abscisse x einen sehr kleinen Zuwachs $\triangle x$ ertheilt, so wachsen die Veränderlichen y, z, s ebenfalls um sehr kleine positive oder negative Größen, welche durch $\triangle y, \triangle z, \triangle s$ ausgedrückt werden. Ferner ist klar, daß die Sehne des Bogens $\pm \triangle s$ oder die Entfernung des Punktes (x, y, z) von dem Punkte $(x \mp \triangle x, y + \triangle y, z + \triangle z)$ ihrem Zahlenwerthe nach gleich

$$\sqrt{(\triangle x^2 + \triangle y^2 + \triangle z^2)}$$

ist. Um nun das Differenzial des Bogens s leicht zu bestimmen, braucht man sich nur auf den für sich klaren Satz zu stützen, daß ein sehr kleiner Curvenbogen fast mit seiner Projection auf die, durch einen seiner Endpunkte gezogene Tangente zusammenfällt, d. h. daß sich das Verhältniß des sehr kleinen Bogens zu seiner Projection fast auf die Einheit reducirt. Denn da die Projection des Bogens der Projection seiner Sehne und das Verhältniß der Sehne zu ihrer Projection dem Cosinus des Winkels, welchen die Sehne mit der Tangente bildet, d. h. einer sehr wenig von der Einheit verschiedenen Größe gleich ist; so folgt unmittelbar aus dem vorhin angeführten Prinzipe, daß ein sehr kleiner Bogen fast mit seiner Sehne zusammfällt, d. h. daß das Verhältniß zwischen einem unendlich kleinen Bogen und seiner Sehne die Einheit zur Grenze hat. *)

---

*) Man könnte diesen letzten Satz als für sich klar betrachten und ihn für das vorhin ausgesprochene Prinzip substituiren; allein es scheint zweckmäßiger, als Maß der Länge eines sehr kleinen, durch einen gegebenen Punkt gehenden Curvenbogens die Länge derjenigen unter allen geraden Linien zu nehmen, welche sich in der Nähe des betrachteten Punktes dem Curvenbogen am meisten nähert (vergl. weiter unten Vorl. 21.).

Nimmt man diesen Satz als wahr an, so ergibt sich daraus die Gleichung:

$$(1)\quad 1=\lim \frac{\pm\triangle s}{\sqrt{(\triangle x^2+\triangle y^2+\triangle z^2)}}=\pm\frac{ds}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}},$$

aus welcher folgt:

$$(2)\qquad ds=\pm\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}.$$

Man hat folglich:

$$(3)\qquad ds^2=dx^2+dy^2+dz^2.$$

Wenn man x zur unabhängigen Veränderlichen nimmt und der Kürze wegen

$$\frac{dy}{dx}=y',\quad \frac{dz}{dx}=z'$$

setzt, so gibt die Gleichung (2)

$$(4)\qquad ds=\pm\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}\,.\,dx.$$

Es ist wohl zu bemerken, daß man in der Gleichung (4) für das doppelte Zeichen $\pm$ das Zeichen $+$ nehmen muß, wenn der Bogen s mit der Abscisse x zu gleicher Zeit wächst und das Zeichen $-$ im entgegengesetzten Falle.

Wenn man in den Gleichungen (5) in Vorles. 13. für die Wurzelgröße $\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$ ihren, aus der Gleichung (2) gezogenen Werth setzt, so erhält man eins der beiden folgenden Systeme von Gleichungen:

$$(5)\quad \cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \cos\beta=\frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds},$$

$$(6)\quad \cos\alpha=-\frac{dx}{ds},\quad \cos\beta=-\frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma=-\frac{dz}{ds}.$$

Das erste System muß zur Bestimmung der Winkel α, β, γ angewandt werden, welche die Tangente der Curve mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet, wenn diese Tangente nach demselben Sinne, als der Bogen s verlängert ist. Dagegen werden die genannten Winkel durch das zweite System von Gleichungen bestimmt, wenn die Tangente nach entgegengesetztem Sinne verlängert ist, was sich leicht vermittelst ähnlicher Betrachtungen, wie die bereits bei ebenen Curven angestellten, beweisen läßt.

Der spitze Winkel, welchen die Tangente im Punkte (x, y, z) mit der Axe der x bildet, wird die Neigung der Tangente oder die Neigung der Curve gegen diese Axe genannt. Wenn man diese Neigung mit τ bezeichnet, so ist der Winkel τ offenbar dem Winkel α oder dessen Supplemente gleich. Es ist also $\cos\tau=\pm\cos\alpha$ und aus der ersten der Gleichungen (5) oder (6) folgt:

$$(7) \qquad \cos\tau = \pm\frac{dx}{ds}, \quad \sec\tau = \pm\frac{ds}{dx}.$$

Wenn man in diese letzten Gleichungen für ds seinen aus der Gleichung (4) abgeleiteten Werth substituirt und bemerkt, daß τ einen spitzen Winkel ausdrückt, dessen Cosinus und Secante nothwendig positiv sind, so erhält man:

$$(8) \qquad \cos\tau = \frac{1}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}, \quad \sec\tau = \sqrt{(1+y'^2+z'^2)}.$$

Um eine Anwendung von den vorhin abgeleiteten Formeln zu geben, wollen wir die durch die Gleichungen (38) in Vorles. 13 ausgedrückte Schraubenlinie betrachten; so ist der durch die letzte der Gleichungen (40) derselben Vorlesung bestimmte Werth von $\cos\gamma$ constant und die Gleichungen (5) oder (6) geben:

$$ds = \pm\frac{dz}{\cos\gamma} = \pm d\left(\frac{z}{\cos\gamma}\right)$$

Wendet man auf die vorhergehende Gleichung die Schlüsse an, durch welche wir in der siebenten Vorlesung die Gleichung (25) aus der Gleichung (24) abgeleitet haben und bezeichnet durch $\triangle z$ ein endliches, der Veränderlichen z beigelegtes Increment; so erhält man:

$$(9) \qquad \triangle s = \pm\frac{\triangle z}{\cos\gamma}.$$

Da ferner γ der von der Tangente der Schraubenlinie und der Axe der z gebildete Winkel ist, so drückt $\pm\frac{\triangle z}{\cos\gamma}$ offenbar den Theil der Tangente aus, dessen Projection auf diese Axe $= \pm\triangle z$ ist. Man kann also folgenden Lehrsatz aufstellen:

Lehrsatz 1. Um einen Bogen der Schraubenlinie zwischen zwei Punkten (x, y, z) und $(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z)$ zu erhalten, braucht man nur durch den ersten Punkt eine Tangente an die Schraubenlinie zu legen und den Theil dieser Tangente zu bestimmen, welcher zwischen den beiden Ebenen liegt, die durch die beiden Endpunkte des Bogens senkrecht auf die Axe der Schraubenlinie gelegt sind.

Wenn man, um die Begriffe zu fixiren, den Bogen s von dem Punkte aus zählt, worin die Schraubenlinie die Axe der x trifft und wenn man die Größe s, sowie den Winkel p und die Ordinate z als positiv annimmt und alsdann für die beiden Punkte (x, y, z), $(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z)$ die beiden Endpunkte des Bogens s, nämlich den Punkt, wo die Schraubenlinie die Axe der x trifft und den Punkt (x, y, z) substituirt; so erhält man statt der Gleichung (9) die Gleichung:

$$s = \frac{z}{\cos\gamma},$$

welche sich vermöge der Gleichungen (38) und (40) der dreizehnten Vorlesung auf

$$(10) \qquad s = (1+a^2)^{\frac{1}{2}} Rp$$

reducirt. Aus dieser letzten Gleichung folgt, daß man, um den Bogen s zu erhalten, nur die Projection dieses Bogens auf eine, auf der Axe der Schraubenlinie senkrechte Ebene, d. h. das Product Rp durch den constanten Factor $(1+a^2)^{\frac{1}{2}}$ zu multipliciren braucht.

Wir wollen nun zwei beliebige Curven betrachten. Es seien x, y, z die Coordinaten der ersten Curve und s der Bogen dieser Curve zwischen einem festen Punkte und dem beweglichen Punkte (x, y, z). Ebenso seien ξ, η, ζ die Coordinaten der zweiten Curve und ς der Bogen dieser zweiten Curve zwischen einem festen Punkte und dem beweglichen Punkte (ξ, η, ζ), so ist:

$$(11) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad d\varsigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2.$$

Ferner, wenn die an die erste Curve durch den Punkt (x, y, z) und an die zweite durch den Punkt (ξ, η, ζ) gezogenen Tangenten nach demselben Sinne verlängert sind, als die Bogen s und ς, so bilden sie mit den Halbaxen der positiven Coordinaten Winkel, deren Cosinus für die erste resp. gleich:

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$

und für die zweite resp. gleich:

$$\frac{d\xi}{d\varsigma}, \quad \frac{d\eta}{d\varsigma}, \quad \frac{d\zeta}{d\varsigma}$$

sind. Wenn man also den Winkel, welchen die beiden Tangenten mit einander bilden, β nennt, so hat man vermöge der Gleichung (48) der Vorerinnerungen:

$$(12) \qquad \cos\delta = \frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{d\varsigma} + \frac{dy}{ds}\frac{d\eta}{d\varsigma} + \frac{dz}{ds}\frac{d\zeta}{d\varsigma}$$
$$= \frac{dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta}{ds\,d\varsigma}.$$

Die beiden Tangenten werden parallel, wenn man hat:

$$(13) \qquad \frac{d\xi}{d\varsigma} = \frac{dx}{ds}, \quad \frac{d\eta}{d\varsigma} = \frac{dy}{ds}, \quad \frac{d\zeta}{d\varsigma} = \frac{dz}{ds}$$

oder:

$$(14) \qquad \frac{d\xi}{d\varsigma} = -\frac{dx}{ds}, \quad \frac{d\eta}{ds} = -\frac{dy}{d\varsigma}, \quad \frac{d\zeta}{d\varsigma} = -\frac{dz}{ds}.$$

Es ist übrigens zu bemerken, daß die Gleichungen (13) und (14) durch die eine Formel:

$$\frac{d\xi}{dx}=\frac{d\eta}{dy}=\frac{d\zeta}{dz}, \tag{15}$$

woraus:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d\xi}{dx}=\frac{d\eta}{dy}=\frac{d\zeta}{dz}= \\ \pm\frac{\sqrt{(d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2)}}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}=\pm\frac{d\varsigma}{ds}\end{array}\right.$$

folgt, erſetzt werden können.

Die beiden Tangenten bilden ferner einen rechten Winkel mit einander, wenn $\cos\delta=0$ und folglich:

$$dx\,d\xi+dy\,d\eta+dz\,d\zeta=0 \tag{16}$$

iſt. Wenn man in die Gleichung (12) für ds und $d\varsigma$ ihre aus den Gleichungen (11) abgeleiteten Werthe ſubſtituirt, ſo erhält man folgende:

$$\cos\delta=\pm\frac{dx\,d\xi+dy\,d\eta+dz\,d\zeta}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}\sqrt{(d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2)}}. \tag{17}$$

Wenn man in dieſer letzten Gleichung das Zeichen des zweiten Theiles nicht beſtimmt, ſo gibt ſie zwei zwiſchen 0 und π liegende Werthe von δ, welche den ſpitzen oder ſtumpfen Winkel zwiſchen der zu beiden Seiten des Punktes (x, y, z) und der zu beiden Seiten des Punktes (ξ, η, ζ) verlängerten Tangente ausdrücken.

Wenn ſich zwei Curven in demſelben Punkte durchſchneiden, ſo nimmt man an, daß ſie dieſelben Winkel mit einander bilden, als die durch dieſen Punkt an ſie gezogenen Tangenten. Alsdann iſt für den Durchſchnittspunkt:

$$\xi=x,\quad \eta=y,\quad \zeta=z, \tag{18}$$

und die Winkel, welche die beiden Curven mit einander bilden, ſind offenbar die zwiſchen 0 und π liegenden Werthe von δ, welche der Gleichung (17) Genüge leiſten.

Man ſagt, daß zwei im Raume beſchriebene Curven auf einander *normal* ſind, wenn ſie ſich unter rechten Winkeln durchſchneiden, und daß ſie einander *berühren*, wenn ſie in einem gemeinſchaftlichen Punkte eine gemeinſchaftliche Tangente haben, d. h., wenn der ſpitze Winkel zwiſchen den beiden Curven verſchwindet. Im erſten Falle wird die Gleichung (16) oder:

$$1+\frac{dy}{dx}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{dz}{dx}\frac{d\zeta}{d\xi}=0 \tag{19}$$

für den Durchſchnittspunkt erfüllt und im zweiten Falle leiſten die Coordinaten des Berührungspunktes der Gleichung (15), oder was daſſelbe iſt, den beiden Gleichungen:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{dz}{dx} \tag{20}$$

Genüge.

Es ist wohl zu bemerken, daß die Differenziale in den verschiedenen vorhin abgeleiteten Formeln alle zu gleicher Zeit verschwinden, wenn man $ds, d\varsigma, dy, d\eta, dz$ und $d\xi$ vermittelst der Gleichungen (11) und der Differenzialgleichungen der gegebenen Curven eliminirt.

Nichts hindert, in den Gleichungen der zweiten Curve die Buchstaben x, y, z für die Buchstaben ξ, η, ζ zu setzen und dann die einem Punkte der einen oder der andern Curve entsprechende Abscisse x zur unabhängigen Veränderlichen zu nehmen. Alsdann muß man für die ersten und zweiten Theile der Gleichungen (20) die aus den Gleichungen der beiden Curven gezogenen Werthe der abgeleiteten Functionen:

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dz}{dx} = z'$$

setzen und damit sich diese beiden Curven in dem Punkte, dessen Abscisse x ist, berühren, genügt es, daß die Werthe der vier Größen:

$$y, y'; \quad z, z'$$

für diesen Punkt bei dem Uebergange von der ersten Curve zur zweiten ungeändert bleiben. Uebrigens ist dieser Satz von selbst einleuchtend; denn wenn die eben ausgesprochenen Bedingungen erfüllt werden, so ist klar, daß die beiden Curven für die Abscisse x nicht blos einen gemeinschaftlichen Punkt, sondern auch eine gemeinschaftliche Tangente haben.

Wir wollen nun einen Lehrsatz beweisen, welcher in der Theorie der Berührung der Curven von großem Nutzen ist und sich folgendermaßen ausdrücken läßt:

Lehrsatz 2. Wenn zwei sich berührende Curven gegeben sind, und man nimmt von dem Berührungspunkte aus auf diesen, nach demselben Sinne verlängerten Curven gleiche, aber sehr kleine Längen, so ist die Gerade, welche die Endpunkte dieser Längen verbindet, fast auf der gemeinschaftlichen Tangente dieser Curven senkrecht.

Beweis. Die Endpunkte der auf der ersten und zweiten Curve vom Berührungspunkte aus genommenen gleichen Längen seien resp. (x, y, z) und (ξ, η, ζ). Ferner seien s und ς die Bogen, welche resp. zwischen einem festen Punkte der ersten Curve und dem Punkte (x, y, z), ferner zwischen einem festen Punkte der zweiten Curve und dem Punkte (ξ, η, ζ) liegen. Während die Coordinaten x, y, z; ξ, η, ζ gleichzeitig variiren, bleibt die Differenz:

$$\varsigma - s$$

unveränderlich, und man hat folglich $\varsigma = s + const$; also:

$$d\varsigma = ds. \tag{21}$$

Ferner seien α, β, γ die Winkel, welche die nach demselben Sinne als die Bogen s und ς verlängerte gemeinschaftliche Tangente der beiden Curven mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet, u die Länge der von dem Punkte (ξ, η, ζ) nach dem Punkte (x, y, z) gezogenen Geraden und endlich λ, μ, ν die Winkel, welche diese Gerade mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet; so hat man fast:

$$(22)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{d\xi}{d\varsigma}, \quad \cos\beta = \dfrac{dy}{ds} = \dfrac{d\eta}{d\varsigma}, \\ \cos\gamma = \dfrac{dz}{ds} = \dfrac{d\zeta}{d\varsigma}, \end{cases}$$

$$(23)\quad u = \sqrt{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]},$$

$$(24)\quad \cos\lambda = \frac{x-\xi}{u}, \quad \cos\mu = \frac{y-\eta}{u}, \quad \cos\nu = \frac{z-\zeta}{u};$$

und aus den Gleichungen (11) in Verbindung mit der Gleichung (21) folgt:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2,$$

oder was dasselbe ist:

$$(25)\quad \begin{cases} (dx + d\xi)(dx - d\xi) + \\ (dy + d\eta)(dy - d\eta) + (dz + d\zeta)(dz - d\zeta) \triangleq 0. \end{cases}$$

Nun geben aber die Gleichungen (22):

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{dx + d\xi}{\cos\alpha} = \dfrac{dy + d\eta}{\cos\beta} = \dfrac{dz + d\zeta}{\cos\gamma} \\ = ds + d\varsigma = 2ds. \end{cases}$$

Wendet man ferner auf die zweiten Theile der Gleichungen (24) das Seite 68 angeführte Prinzip an, so ergibt sich, daß die Größen $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$ näherungsweise durch die Gleichungen:

$$(27)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{dx - d\xi}{du}, \quad \cos\mu = \dfrac{dy - d\eta}{du}, \\ \cos\nu = \dfrac{dz - d\zeta}{du}. \end{cases}$$

bestimmt werden können.

Man hat also sehr nahe:

$$(28)\quad \frac{dx - d\xi}{\cos\lambda} = \frac{dy - d\eta}{\cos\mu} = \frac{dz - d\zeta}{\cos\nu} = du.$$

Diese letzte Gleichung ist um so genauer, je näher die Punkte (x, y, z) und (ξ, η, ζ) dem Berührungspunkte der beiden Curven liegen. Wenn man nun in der Gleichung (25) für die Summen:

$$dx+d\xi,\ dy+d\eta,\ dz+d\zeta$$

die unter sich in denselben Verhältnissen stehenden Größen $\cos\alpha$, $\cos\beta, \cos\gamma$ und für die Differenzen:

$$dx-d\xi,\ dy-d\eta,\ dz-d\zeta$$

die ihnen proportionalen Größen $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$ setzt, so erhält man endlich:

(29) $$\cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta\cos\mu+\cos\gamma\cos\nu=0.$$

Folglich ist die von dem Punkte (x, y, z) nach dem Punkte (ξ, η, ζ) gezogene Gerade fast auf der gemeinschaftlichen Tangente beider Curven senkrecht, oder was dasselbe ist, fast zu der Normalebene parallel.

In dem eben bewiesenen Lehrsatze könnte man auch für die zweite Curve eine die erste berührende Gerade setzen und man erhielte alsdann folgenden Lehrsatz:

Lehrsatz 3. Wenn man von einem gegebenen Punkte einer Curve aus, auf ihr und ihrer nach demselben Sinne verlängerten Tangente in diesem Punkte gleiche und sehr kleine Längen nimmt, so ist die Gerade, welche die Endpunkte dieser Längen verbindet, fast auf der Tangente senkrecht, oder was dasselbe ist, fast zu der Normalebene parallel.

Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir jede der auf der Curve und ihrer Tangente von dem gegebenen Punkte aus genommenen gleichen Längen mit i bezeichnen. Die Winkel, welche die, die Endpunkte dieser beiden Längen verbindende Gerade mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet, sind Functionen von i, und wenn man i gegen die Grenze Null convergiren läßt, so convergiren diese Winkel im Allgemeinen gegen gewisse Grenzen und nähern sich den Winkeln ohne Ende, welche die Richtung einer gewissen Normale bestimmen, mit der die in Rede stehende Gerade immer mehr und mehr zusammen zu fallen strebt. Diese besonders bemerkenswerthe Normale wollen wir Hauptnormale nennen. Um die Richtung derselben zu bestimmen, brauchte man nur die Formeln (27) und den Seite 68 angeführten Satz anzuwenden; allein man kann auch sehr leicht durch folgende Methode zu demselben Zwecke gelangen.

Mit x, y, z wollen wir die Coordinaten eines Punktes der Curve bezeichnen, welcher nicht mit dem Endpunkte, sondern mit dem Anfangspunkte der Länge i zusammenfällt, d. h. die Coordinaten des Punktes, durch welchen man eine Tangente an die Curve zieht. Es sei s wieder der auf der Curve zwischen dem Punkte (x, y, z) und einem festen Punkte von der Beschaffenheit, daß die Länge i die Verlängerung des Bogens s ist, liegende Bogen und ferner seien α, β, γ die Winkel, welche die durch den Punkt (x, y, z)

gezogene und nach demſelben Sinne als der Bogen s verlängerte Tangente mit den Halbaxen der poſitiven Coordinaten bildet. Wenn man dieſen Bogen zur unabhängigen Veränderlichen nimmt, ſo werden die Coordinaten des Endpunktes der auf der Curve genommenen Länge i offenbar durch drei Ausdrücke von der Form:

$$(30)\quad \begin{cases} x+i\frac{dx}{ds}+\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2x}{ds^2}+I\right), \\ y+i\frac{dy}{ds}+\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2y}{ds^2}+J\right), \\ z+i\frac{dz}{ds}+\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2z}{ds^2}+K\right) \end{cases}$$

beſtimmt, wo I, J, K mit i verſchwinden müſſen, während die Coordinaten des Endpunktes einer zweiten auf der Tangente nach demſelben Sinne, als die erſte genommenen Länge i folgende ſind:

$$(31)\quad \begin{cases} x+i\cos\alpha=x+i\frac{dx}{ds}, \\ y+i\cos\beta=y+i\frac{dy}{ds}, \\ z+i\cos\gamma=z+i\frac{dz}{ds}. \end{cases}$$

Wenn man nun die Entfernung zwiſchen den Endpunkten der beiden Längen mit s und die Winkel, welche die von dem Endpunkte der zweiten Länge nach dem Endpunkte der erſten gezogene Gerade mit den Halbaxen der poſitiven Coordinaten bildet, mit λ, μ, ν bezeichnet, ſo hat man offenbar:

$$(32)\quad s=\frac{i^2}{2}\sqrt{\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}+I\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}+J\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}+K\right)^2\right]},$$

$$(33)\quad \begin{cases} \cos\lambda=\frac{\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2x}{ds^2}+I\right)}{s}, \quad \cos\mu=\frac{\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2y}{ds^2}+J\right)}{s}, \\ \cos\nu=\frac{\frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2z}{ds^2}+K\right)}{s}, \end{cases}$$

und folglich:

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos\lambda}{\frac{d^2x}{ds^2}+I} = \dfrac{\cos\mu}{\frac{d^2y}{ds^2}+J} = \dfrac{\cos\nu}{\frac{d^2z}{ds^2}+K} = \\ \dfrac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}+I\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}+J\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}+K\right)^2\right]}}. \end{array}\right.$$

Läßt man nun i gegen die Grenze Null convergiren, so nehmen die Zahlenwerthe von I, J, K ohne Ende ab, und wenn man zu den Grenzen übergeht, so ergibt sich aus der Gleichung (34):

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos\lambda}{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)} = \dfrac{\cos\mu}{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)} = \dfrac{\cos\nu}{\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)} = \\ \dfrac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]}}, \end{array}\right.$$

oder was dasselbe ist:

$$(36)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos\lambda}{d^2x} = \dfrac{\cos\mu}{d^2y} = \dfrac{\cos\nu}{d^2z} = \\ \dfrac{1}{\sqrt{\left[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2\right]}}. \end{array}\right.$$

Die Winkel λ, μ, ν, welche durch diese letzte Gleichung bestimmt werden, sind diejenigen, welche die nach einem gewissen Sinne verlängerte Hauptnormale mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet. Statt dieser Gleichung müßte man die folgende:

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos\lambda}{d^2x} = \dfrac{\cos\mu}{d^2y} = \dfrac{\cos\nu}{d^2z} = \\ -\dfrac{1}{\sqrt{\left[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2\right]}}, \end{array}\right.$$

anwenden, wenn die Hauptnormale nach entgegengesetztem Sinne verlängert wäre. Ferner wollen wir bemerken, daß die Gleichungen (36) und (37) beide in der Gleichung:

$$(38)\qquad \frac{\cos\lambda}{d^2x} = \frac{\cos\mu}{d^2y} = \frac{\cos\nu}{d^2z}$$

enthalten sind, aus welcher folgt:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos\lambda}{d^2x} = \dfrac{\cos\mu}{d^2y} = \dfrac{\cos\nu}{d^2z} = \\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{\left[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2\right]}}. \end{array}\right.$$

Man könnte sich leicht direct überzeugen, daß die durch den Punkt (x, y, z) gehende und mit den Halbaxen der positiven Coordinaten die durch die Gleichung (38) bestimmten Winkel bildende Gerade eine der durch den Punkt (x, y, z) gezogenen Normalen der Curve ist. Denn wenn man die Gleichung (3), indem man s wieder als unabhängige Veränderliche betrachtet, differenzirt, so erhält man:

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = 0, \tag{39}$$

und wenn man alsdann die Gleichung (38) und die Gleichung (6) der dreizehnten Vorlesung berücksichtigt, so findet man:

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0.$$

Folglich ist die in Rede stehende Gerade auf der Tangente senkrecht, oder mit andern Worten, sie ist eine Normale der gegebenen Curve.

Wird der Bogen s wieder zur unabhängigen Veränderlichen genommen, so folgt aus den Gleichungen (5):

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\cos\alpha}{ds} &= \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{d\cos\beta}{ds} = \frac{d^2y}{ds^2}, \\ \frac{d\cos\gamma}{ds} &= \frac{d^2z}{ds^2}, \end{aligned}\right. \tag{40}$$

und folglich kann die Gleichung (38) auf folgende reducirt werden:

$$\frac{\cos\lambda}{d\cos\alpha} = \frac{\cos\mu}{d\cos\beta} = \frac{\cos\nu}{d\cos\gamma}. \tag{41}$$

Wenn der Bogen s nicht mehr zur unabhängigen Veränderlichen genommen würde, so würde die Gleichung (35) unrichtig, aber die Gleichung (41) würde immer richtig bleiben, und wenn man in diese für $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ihre aus den Gleichungen (5) abgeleiteten Werthe setzte, so fände man:

$$\frac{\cos\lambda}{d\left(\frac{dx}{ds}\right)} = \frac{\cos\mu}{d\left(\frac{dy}{ds}\right)} = \frac{\cos\nu}{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}. \tag{42}$$

Ferner wollen wir bemerken, daß in dem Falle, wo sich die gegebene Curve auf eine ebene Curve reducirte, die Hauptnormale offenbar die ist, welche in der Ebene der Curve liegt.

Wenn die Winkel λ, μ, ν einmal durch die Gleichungen (35) oder (42) bestimmt sind, so lassen sich die Gleichungen der Hauptnormale leicht erhalten; denn wenn man die Coordinaten eines beliebigen Punktes dieser Geraden mit ξ, η, ζ bezeichnet, so hat man nach der Gleichung (20) der Vorer.:

$$\frac{\xi - x}{\cos\lambda} = \frac{\eta - y}{\cos\mu} = \frac{\zeta - z}{\cos\nu}, \tag{43}$$

woraus folgt, wenn man den Bogen s zur unabhängigen Veränderlichen nimmt:

$$\frac{\xi - x}{d^2 x} = \frac{\eta - y}{d^2 y} = \frac{\zeta - z}{d^2 z}, \tag{44}$$

und, in einer andern Voraussetzung:

$$\frac{\xi - x}{d\left(\frac{dx}{ds}\right)} = \frac{\eta - y}{d\left(\frac{dy}{ds}\right)} = \frac{\zeta - z}{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}. \tag{45}$$

Wenn sich zwei krumme Flächen in einem gegebenen Punkte durchschneiden, so nimmt man an, daß sie in diesem Punkte denselben Winkel mit einander bilden, als ihre Berührungsebenen. Insbesondere sagt man, daß zwei krumme Flächen in einem gemeinschaftlichen Punkte auf einander *normal* sind, wenn die durch diesen Punkt gelegten Berührungsebenen auf einander senkrecht sind, und man sagt, sie *berühren* einander, wenn diese Ebenen zusammenfallen. In dem letzten Falle fallen die Normalen beider krummen Flächen ebenfalls zusammen. Es seien nun:

$$u = 0, \quad v = 0, \tag{46}$$

die Gleichungen der beiden sich im Punkte (x, y, z) berührenden krummen Flächen zwischen rechtwinkligen Coordinaten, so sind die Cosinus der Winkel, welche die gemeinschaftliche Normale der beiden krummen Flächen mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet, nach der Gleichung (6) in Vorl. 14 einer Seits den drei abgeleiteten Functionen:

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{du}{dz}$$

und anderer Seits den drei abgeleiteten Functionen:

$$\frac{dv}{dx}, \quad \frac{dv}{dy}, \quad \frac{dv}{dz}$$

proportional. Man hat also:

$$\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{dv}{dx}\right)} = \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{dv}{dy}\right)} = \frac{\left(\frac{du}{dz}\right)}{\left(\frac{dv}{dz}\right)}. \tag{47}$$

Umgekehrt, wenn diese Bedingung für den Punkt (x, y, z) erfüllt wird, so haben die beiden krummen Flächen in diesem Punkte eine gemeinschaftliche Normale und berühren einander.

Soll die Gleichung (47) stattfinden, so ist erforderlich und genügend, daß die Differenzialgleichungen der beiden krummen Flächen, nämlich:

$$(48)\quad \begin{cases} \frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz=0, \\ \frac{dv}{dx}dx+\frac{dv}{dy}dy+\frac{dv}{dz}dz=0 \end{cases}$$

übereinstimmen, wenn man darin für x, y, z die Coordinaten des gemeinschaftlichen Punktes setzt, und sich alsdann auf eine einzige Gleichung zwischen den Differenzialen dx, dy, dz reduciren.

Wenn die Gleichungen der beiden krummen Flächen nach z aufgelöst und auf die Form:

$$(49)\qquad z=f(x, y)$$

zurückgeführt würden, so wären ihre Differenzialgleichungen von der Form:

$$(50)\qquad dz=pdx+qdy,$$

und alsdann berührten sich die beiden krummen Flächen in dem Punkte (x, y, z), wenn die beiden Größen p und q bei dem Uebergange von der ersten krummen Fläche zur zweiten dieselben Werthe behielten.

Siebzehnte Vorlesung.

Von der Krümmungsebene einer beliebigen Curve und ihren beiden Krümmungen. Krümmungshalbmesser, Krümmungsmittelpunkt und Krümmungskreis.

Wir wollen auf einer gegebenen Curve einen beliebigen Punkt P betrachten und uns in diesem Punkte eine Tangente an die Curve gezogen denken, so können wir durch diese Tangente unendlich viele Berührungsebenen legen, wovon eine die Hauptnormale enthält. Diese letzte Ebene, welche mit der Ebene der Curve jedesmal zusammenfällt, wenn diese eine ebene Curve wird, verdient eine besondere Aufmerksamkeit und man nennt sie die Krümmungsebene. Um sie zu erhalten, braucht man offenbar nur durch den Punkt (P) eine Berührungsebene zu legen, welche noch einen zweiten Punkt (Q) der gegebenen Curve enthält und die Lage zu suchen, welche diese Ebene anzunehmen strebt, wenn sich der zweite Punkt dem ersten unendlich nähert. Denn es sei i die Länge des Bogens PQ zwischen den beiden erwähnten Punkten und wir wollen annehmen, daß, wenn die Tangente nach derselben Seite, als der Bogen PQ verlängert ist, die auf der Tangente genommene Länge i an den Punkt (R) stößt. Die in der beweglichen Ebene liegende Gerade QR ist für sehr kleine Werthe von i fast zu der Hauptnormale parallel und folglich ist der Winkel, welchen diese Normale mit der beweglichen Ebene bildet, fast Null. Die Grenze dieses Winkels ist also gleich Null, d. h. die bewegliche Ebene strebt immer mehr und mehr mit der Berührungsebene, welche die Hauptnormale enthält, d. h. mit der Krümmungsebene zusammenzufallen. Wir wollen nun annehmen, daß, indem x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten der Curve sind, die durch den Punkt (P) gezogene Tangente und Hauptnormale mit den Halbaxen der positiven Coordinaten resp. die Winkel α, β, γ und λ, μ, ν bilden, und außerdem wollen wir annehmen, daß der zwischen einem festen Punkte und dem beweglichen Punkte (x, y, z) liegende Bogen s als unabhängige Veränderliche betrachtet wird. Lassen wir nun diesen letzten Punkt mit dem Punkte (P) zusammenfallen, so ergibt sich (siehe Vorles. 13 und 16):

$$\frac{\cos\alpha}{dx} = \frac{\cos\beta}{dy} = \frac{\cos\gamma}{dz}, \tag{1}$$

$$(2) \qquad \frac{\cos\lambda}{d^2x} = \frac{\cos\mu}{d^2y} = \frac{\cos\nu}{d^2z}.$$

Denken wir uns nun durch den Punkt (x, y, z) auf der Krümmungsebene eine senkrechte Halbare errichtet, so schneidet dieselbe die Tangente und Hauptnormale nothwendig unter rechten Winkeln, und wenn man folglich die Winkel, welche sie mit den Halbaren der positiven Coordinaten bildet, mit

$$L,\ M,\ N$$

bezeichnet, so hat man offenbar die beiden Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \cos\alpha\cos L + \cos\beta\cos M + \cos\gamma\cos N = 0, \\ \cos\lambda\cos L + \cos\mu\cos M + \cos\nu\cos N = 0, \end{cases}$$

welche sich vermöge der Gleichungen (1) und (2) auf:

$$(4) \qquad \begin{cases} \cos L.dx + \cos M.dy + \cos N.dz = 0, \\ \cos L.d^2x + \cos M.d^2y + \cos N.d^2z = 0 \end{cases}$$

reduciren. Diese letzten Gleichungen können durch die eine Gleichung:

$$(5) \qquad \frac{\cos L}{dyd^2z - dzd^2y} = \frac{\cos M}{dzd^2x - dxd^2z} = \frac{\cos N}{dxd^2y - dyd^2x}$$

ersetzt werden, aus welcher folgt:

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\cos L}{dyd^2z - dzd^2y} = \dfrac{\cos M}{dzd^2x - dxd^2z} = \dfrac{\cos N}{dxd^2y - dyd^2x} \\ = \pm \dfrac{1}{\sqrt{\left[\begin{matrix}(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 \\ + (dxd^2y - dyd^2x)^2\end{matrix}\right]}} \\ = \pm \dfrac{1}{\sqrt{\left[\begin{matrix}(dx^2+dy^2+dz^2)[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2] \\ - (dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z)^2\end{matrix}\right]}} \end{cases}$$

Wenn man ferner die beiden Gleichungen:

$$(7) \qquad \begin{cases} dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2, \\ dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = 0 \end{cases}$$

berücksichtigt, so findet man endlich:

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos L}{dy\,d^2z - dz\,d^2y} = \dfrac{\cos M}{dz\,d^2x - dx\,d^2z} \\ \qquad = \dfrac{\cos N}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = \\ \pm \dfrac{1}{ds\sqrt{[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2]}}. \end{array}\right.$$

Die Gleichung (8) gibt offenbar zwei Systeme von Werthen für $\cos L, \cos M, \cos N$ und diese beiden Systeme entsprechen den beiden Richtungen, nach welchen man das durch den Punkt (x, y, z) auf der Krümmungsebene errichtete Perpendikel verlängern kann.

Es verdient bemerkt zu werden, daß man für die Gleichung (5) die beiden folgenden setzen kann:

$$(9)\quad \frac{\cos L}{dy^2\, d\left(\frac{dz}{dy}\right)} = \frac{\cos M}{dz^2\, d\left(\frac{dx}{dz}\right)} = \frac{\cos N}{dx^2\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)},$$

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos L}{\cos\beta\, d\cos\gamma - \cos\gamma\, d\cos\beta} = \dfrac{\cos M}{\cos\gamma\, d\cos\alpha - \cos\alpha\, d\cos\gamma} \\ \qquad = \dfrac{\cos N}{\cos\alpha\, d\cos\beta - \cos\beta\, d\cos\alpha}, \end{array}\right.$$

wovon die letzte sich unmittelbar aus den Gleichungen (3) ergibt, indem man sie nicht mehr mit den Gleichungen (1) und (2), sondern mit der Gleichung (41) der sechszehnten Vorlesung verbindet.

Zu derselben Gleichung (10) würde man auch gelangen, wenn man annähme, daß L, M, N die Winkel bezeichnen, welche eine, auf einer Ebene, die durch den Punkt (x, y, z) und durch die Tangente in diesem Punkte geht und zu einer andern durch einen zweiten dem ersten unendlich nahe liegenden Punkt gezogenen Tangente parallel ist, senkrechte Geraden mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet. Denn es seien:

$$\triangle x,\quad \triangle y,\quad \triangle z,$$
$$\triangle\cos\alpha,\quad \triangle\cos\beta,\quad \triangle\cos\gamma$$

die Incremente, welche die Größen:

$$x,\ y,\ z,\ \cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$$

bei dem Uebergange vom ersten Punkte zum zweiten bekommen; so werden die Werthe von:

$$\cos L,\quad \cos M,\quad \cos N$$

in der gemachten Voraussetzung offenbar durch die erste der Gleichungen (3) in Verbindung mit der Gleichung:

$$(\cos\alpha+\triangle\cos\alpha)\cos L+(\cos\beta+\triangle\cos\beta)\cos M$$
$$+(\cos\gamma+\triangle\cos\gamma)\cos N=0,$$

welche man vermöge der in Rede ſtehenden Gleichung auf:

$$(11)\quad \cos L.\triangle\cos\alpha+\cos M.\triangle\cos\beta+\cos N.\triangle\cos\gamma=0$$

reduciren kann, beſtimmt. Wenn aber der zweite Punkt ſich dem erſten unendlich nähert, ſo werden die unendlich kleinen Differenzen:

$$\triangle\cos\alpha,\quad \triangle\cos\beta,\quad \triangle\cos\gamma$$

faſt den Differenzialen:

$$d\cos\alpha,\quad d\cos\beta,\quad d\cos\gamma$$

proportional, und wenn man zu der Grenze übergeht, ſo ergibt ſich aus der Gleichung (11):

$$(12)\quad \cos L.d\cos\alpha+\cos M.d\cos\beta+\cos N.d\cos\gamma=0.$$

Da nun die Gleichung (12) in Verbindung mit der erſten der Gleichungen (3) die Gleichung (10) wieder gibt, ſo können wir behaupten, daß die, durch die Gleichung (10) beſtimmten Winkel L, M, N der Geraden entſprechen, welche auf der Ebene ſenkrecht iſt, worin die, durch den Punkt (x, y, z) gezogene Tangente liegt und welche zu einer andern, der erſten unendlich nahe liegenden Tangente parallel iſt. Dieſe letzte Ebene iſt alſo nicht von der Krümmungsebene verſchieden.

Wenn der Bogen s nicht mehr zur unabhängigen Veränderlichen genommen würde, ſo würden die Gleichungen (2) und (8), ſowie die zweite der Gleichungen (7) unrichtig; aber die Gleichungen (9) und (10) und folglich die Gleichungen (5), (6) würden noch ſtattfinden, woraus folgt, daß die Gleichungen (4), welche die Stelle der Gleichung (5) vertreten können, ebenfalls noch ſtattfinden. Uebrigens kann man ſich von der Richtigkeit dieſes Schluſſes leicht direct überzeugen. Denn wenn s nicht mehr zur unabhängigen Veränderlichen genommen wird, ſo muß man in der zweiten der Gleichungen (4) für die Differenziale:

$$d^2x,\quad d^2y,\quad d^2z$$

die Ausdrücke:

$$ds\,d\left(\frac{dx}{ds}\right)=d^2x-\frac{dx}{ds}d^2s,$$
$$ds\,d\left(\frac{dy}{ds}\right)=d^2y-\frac{dy}{ds}d^2s$$
$$ds\,d\left(\frac{dz}{ds}\right)=d^2z-\frac{dz}{ds}d^2s$$

ſubſtituiren. Wenn man aber nach dieſer Subſtitution die erſte der

Gleichungen (4) berücksichtigt, so ergibt sich, daß die zweite ihre ursprüngliche Form wieder annimmt.

Aus der ersten der Gleichungen (7) ergibt sich, welche Veränderliche man auch als unabhängig betrachten mag:

$$(13) \qquad dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = ds\,d^2s,$$

und folglich kann die Gleichung (6) auf

$$(14) \quad \begin{cases} \dfrac{\cos L}{dy\,d^2z - dz\,d^2y} = \dfrac{\cos M}{dz\,d^2x - dx\,d^2z} \\ \qquad = \dfrac{\cos N}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \\ = \pm \dfrac{1}{ds\sqrt{[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}} \end{cases}$$

reducirt werden. In dem besonderen Falle, wo x zur unabhängigen Veränderlichen genommen wird, und y', z'; y'', z'' die abgeleiteten Functionen der ersten und zweiten Ordnung von y und z bezeichnen, ergibt sich aus derselben Gleichung:

$$(15) \quad \begin{cases} \dfrac{\cos L}{y'z'' - y''z'} = \dfrac{\cos M}{-z''} = \dfrac{\cos N}{y''} \\ = \pm \dfrac{1}{\sqrt{[(y'z'' - y''z')^2 + z''^2 + y''^2]}}. \end{cases}$$

Nachdem die Winkel L, M, N durch die Gleichung (8), (14) oder (15) bestimmt sind, läßt sich die Gleichung der durch den Punkt (x, y, z) gehenden Krümmungsebene leicht erhalten. Denn bezeichnen ξ, η, ζ die Coordinaten eines beliebigen Punktes dieser Ebene, so findet man vermöge der Gleichung (66) der Vorerinnerungen:

$$(16) \qquad (\xi - x)\cos L + (\eta - y)\cos M + (\zeta - z)\cos N = 0$$

und mit Berücksichtigung der Gleichung (14):

$$(17) \quad \begin{cases} (\xi - x)(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + (\eta - y)(dz\,d^2x - dx\,d^2z) \\ + (\zeta - z)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0. \end{cases}$$

Wenn man x zur unabhängigen Veränderlichen nähme, so müßte man für die Gleichung (14) die Gleichung (15) substituiren und folglich reducirte sich die Gleichung der Krümmungsebene auf:

$$(18) \qquad (y'z'' - y''z')(\xi - x) - z''(\eta - y) + y''(\zeta - z) = 0.$$

Es sei nun $\triangle s$ das positive oder negative Increment, welches die Veränderliche s bekommt, wenn man von dem Punkte (x, y, z) zu dem Punkte $(x + \triangle x, y + \triangle y, z + \triangle z)$ übergeht. Der Winkel zwischen den Tangenten an den Endpunkten des unendlich kleinen Bogens $\pm \triangle s$ wird der Berührungs- oder Krümmungswinkel

genannt. Wir wollen denſelben mit ω und den unendlich kleinen Winkel zwiſchen den, den Endpunkten des Bogens entſprechenden Krümmungsebenen, oder was daſſelbe iſt, zwiſchen den Perpendikeln auf dieſen Ebenen mit Ω bezeichnen. Die Größen ω, Ω können nur in gewiſſen beſondern Fällen beſtändig verſchwinden, nämlich die erſte, wenn ſich die gegebene Curve in eine Gerade verwandelt und die zweite, wenn dieſe Curve eben wird.

Aber im Allgemeinen behalten ω und Ω endliche, von Null verſchiedene Werthe und daſſelbe gilt von den Grenzen, gegen welche die Verhältniſſe:

$$\pm\frac{\omega}{\triangle s},\quad \pm\frac{\Omega}{\triangle s}$$

convergiren, während der Bogen $\pm\triangle s$ unbeſtimmt abnimmt. Von dieſen Grenzen iſt die eine, wenn man eine ebene Curve betrachtet, der Krümmung derſelben gleich, während die andere gleich Null iſt, und ſie ſind in allen Fällen das Maß deſſen, was wir die erſte und zweite Krümmung der gegebenen Curve nennen wollen. Wegen dieſer beiden Krümmungen wird jede Curve, welche nicht in einer Ebene liegt, eine Curve von doppelter Krümmung genannt. Wenn man dieſe Krümmungen durch:

$$\frac{1}{\varrho},\quad \frac{1}{\mathfrak{R}},$$

ausdrückt, wo $\varrho, \mathfrak{R}$ die Halbmeſſer der Kreiſe ſind, welchen dieſe Krümmungen zukommen, ſo hat man nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{1}{\varrho}=lim\left(\pm\frac{\omega}{\triangle s}\right), \tag{19}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{R}}=lim\left(\pm\frac{\Omega}{\triangle s}\right). \tag{20}$$

Wenn der Bogen $\pm\triangle s$ ſehr klein iſt, ſo iſt ſeine Sehne $\sqrt{(\triangle x^2+\triangle y^2+\triangle z^2)}$ faſt auf den durch die beiden Punkte (x, y, z), $(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z)$ gelegten Normalebenen der betrachteten Curve ſenkrecht, und die kürzeſte Entfernung des Punktes (x, y, z) von der Durchſchnittslinie der beiden Ebenen iſt faſt dem Krümmungshalbmeſſer ϱ gleich. Denn es ſei r dieſe kürzeſte Entfernung. Wenn man durch die Länge r eine Ebene legt, welche auf den beiden Normalebenen ſenkrecht iſt, ſo bildet die Sehne $\sqrt{(\triangle x^2+\triangle y^2+\triangle z^2)}$ mit dieſer Ebene einen ſehr kleinen Winkel, d. h. ſie bildet mit ihrer Projection auf dieſer Ebene einen ſehr kleinen Winkel. Folglich iſt dieſe Projection dem Producte aus der Sehne und einem ſehr wenig von der Einheit verſchiedenen Coſinus gleich und kann durch ein Product von der Form:

$$(1+I)\sqrt{[\triangle x^2+\triangle y^2+\triangle z^2]}$$

ausgedrückt werden, wo I eine unendlich kleine Größe bezeichnet.

Ferner ist in dem Dreiecke, wovon die Länge r und die Projection der Sehne zwei Seiten bilden der der Seite r gegenüberliegende Winkel fast ein rechter, während der der Projection der Sehne gegenüberliegende Winkel genau der Winkel der beiden Normalebenen oder der Winkel ω zwischen den durch die Endpunkte des Bogens $\pm\triangle s$ gezogenen Tangenten ist. Man hat also:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\varepsilon\right)}{r}=\frac{\sin\omega}{(1+l)\sqrt{[\triangle x^2+\triangle y^2+\triangle z^2]}}=$$
$$\frac{\sin\omega}{(1+l)\omega}\cdot\frac{\pm\triangle s}{\sqrt{[\triangle x^2+\triangle y^2+\triangle z^2]}}\cdot\frac{\omega}{\pm\triangle s},$$

wo ε eine unendlich kleine Zahl bezeichnet, und folglich erhält man, wenn man den Bogen $\pm\triangle s$ gegen die Grenze Null convergiren läßt:

$$\frac{1}{\lim r}=\lim\frac{\omega}{\pm\triangle s}=\frac{1}{\varrho},$$

oder:

$$\lim r=\varrho,$$

was bewiesen werden sollte.

Es ist wohl zu bemerken, daß, da die durch den Punkt (x, y, z) gelegte Krümmungsebene fast zu der durch den Punkt $(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z)$ gehenden Tangente parallel ist, sie auch auf den durch die beiden Endpunkte des Bogens $\pm\triangle s$ gelegten Normalebenen und auf deren gemeinschaftlichen Durchschnitte fast senkrecht ist. Folglich fällt die Normale, welche auf diesem gemeinschaftlichen Durchschnitte senkrecht, und auf welcher die Länge r genommen ist, fast mit der in der Krümmungsebene liegenden Normale, d. h. mit der Hauptnormale zusammen. Aus dieser Bemerkung und dem weiter oben Gesagten folgt offenbar, daß man, um den Krümmungshalbmesser ϱ zu erhalten, nur die dem Punkte (x, y, z) entsprechende Hauptnormale zu construiren und den Theil derselben zu suchen braucht, welcher zwischen dem Punkte (x, y, z) und einer ihr unendlich nahe liegenden Normalebene liegt. Der auf diese Weise auf der Hauptnormale gemessene Halbmesser ϱ wird der Krümmungshalbmesser der gegebenen Curve für den Punkt (x, y, z) genannt und der Endpunkt des Krümmungshalbmessers, welcher als der Durchschnittspunkt der Hauptnormale und einer ihr unendlich nahe liegenden Normalebene betrachtet werden kann, heißt der Mittelpunkt der Krümmung. Der Kreis, welcher diesen letzten Punkt zum Mittelpunkte und den Krümmungshalbmesser zum Halbmesser hat, wird der Krümmungs- oder Berührungskreis genannt, weil er die gegebene Curve in dem betrachteten Punkte berührt und daselbst dieselbe Krümmung als sie hat. Ferner wollen wir bemerken, daß, wenn man durch die Tangente im Punkte (x, y, z) und durch das Perpendikel auf der Krümmungsebene eine neue Ebene legt, der

Krümmungsmittelpunkt auf derselben Seite dieser Ebene als der Punkt $(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z)$ liegt, und daß folglich dieser Krümmungsmittelpunkt immer mit einem Punkte der Halbare zusammenfällt, deren Richtung durch die Winkel λ, μ, ν bestimmt wird, welche der Gleichung (35) der sechszehnten Vorlesung genügen.

Wenn man in dem Werthe $\frac{1}{\varrho}$, welchen die Gleichung (19) gibt, für die unendlich kleine Größe ω die endlichen Winkel α, β, γ oder vielmehr die Differenziale ihrer Cosinus setzen will, so braucht man sich nur der Formeln:

$$\begin{aligned}
\cos\omega &= \cos\alpha(\cos\alpha+\triangle\cos\alpha)+\cos\beta(\cos\beta+\triangle\cos\beta)\\
&\quad+\cos\gamma(\cos\gamma+\triangle\cos\gamma),\\
1 &= \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma,\\
1 &= (\cos\alpha+\triangle\cos\alpha)^2+(\cos\beta+\triangle\cos\beta)^2\\
&\quad+(\cos\gamma+\triangle\cos\gamma)^2,
\end{aligned}$$

zu bedienen, aus welchen folgt:

$$\begin{aligned}
2(1-\cos\omega) &= \cos^2\alpha-2\cos\alpha(\cos\alpha+\triangle\cos\alpha)\\
&\quad+(\cos\alpha+\triangle\cos\alpha)^2+\cos^2\beta-\\
&\quad 2\cos\beta(\cos\beta+\triangle\cos\beta)+(\cos\beta+\triangle\cos\beta)^2\\
&\quad+\cos^2\gamma-2\cos\gamma(\cos\gamma+\triangle\cos\gamma)+(\cos\gamma+\triangle\cos\gamma)^2,
\end{aligned}$$

oder was dasselbe ist:

$$(21)\qquad \left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^2=(\triangle\cos\alpha)^2+(\triangle\cos\beta)^2+(\triangle\cos\gamma)^2.$$

Dividirt man die beiden Theile dieser letzten Gleichung durch $\triangle s^2$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}\right)^2\left(\frac{\omega}{\pm\triangle s}\right)^2=\\
&\left(\frac{\triangle\cos\alpha}{\triangle s}\right)^2+\left(\frac{\triangle\cos\beta}{\triangle s}\right)^2+\left(\frac{\triangle\cos\gamma}{\triangle s}\right)^2.
\end{aligned}$$

Läßt man alsdann $\triangle s$ gegen die Grenze Null convergiren und berücksichtigt die Gleichung (19), so findet man:

$$(22)\qquad \left(\frac{1}{\varrho}\right)^2=\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2,$$

und folglich:

$$(23)\qquad \frac{1}{\varrho}=\sqrt{\left[\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2\right]}.$$

Mit derselben Leichtigkeit beweist man, daß für die Gleichung (20) folgende gesetzt werden kann:

$$(24) \quad \frac{1}{\mathfrak{R}} = \sqrt{\left[\left(\frac{d\cos L}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos M}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos N}{ds}\right)^2\right]}.$$

Aus den Formeln (23) und (24) folgt offenbar, daß die erste Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ im Allgemeinen Null ist, wenn die Winkel α, β, γ constant werden und die zweite $\frac{1}{\mathfrak{R}}$, wenn die Winkel L, M, N constant werden, was mit den bereits gemachten Bemerkungen übereinstimmt.

Wenn man in der Gleichung (23) für die Cosinus der Winkel α, β, γ ihre aus der Gleichung (1) abgeleiteten Werthe substituirt, so findet man:

$$(25) \quad \frac{1}{\varrho} = \left\{\left[\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}\right]^2 + \left[\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}\right]^2 + \left[\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

und wenn man entwickelt und die Gleichung (13) berücksichtigt:

$$(26) \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\sqrt{[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2]}}{ds^2},$$

oder was dasselbe ist:

$$(27) \quad \frac{1}{\varrho} = \pm \frac{\left\{\begin{array}{l}(dx^2 + dy^2 + dz^2)[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + \\ (d^2z)^2] - [dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z]^2\end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}}{ds^3}$$

$$\pm \frac{\sqrt{[(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2]}}{ds^3}$$

$$\pm \frac{\sqrt{[(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2]}}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wenn man s zur unabhängigen Veränderlichen nimmt, so geben die Gleichungen (25) und (26):

$$(28) \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\sqrt{[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2]}}{ds^2}.$$

Aber, wenn x zur unabhängigen Veränderlichen genommen wird, so ergibt sich aus der Gleichung (27):

$$(29) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{[(y'z'' - y''z')^2 + z''^2 + y''^2]}{(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wenn man endlich von dem Punkte (x, y, z) aus auf der gegebenen Curve und auf ihrer nach demselben Sinne verlängerten Tangente gleiche, unendlich kleine Längen $= i$ nimmt und die Entfernung zwischen den Endpunkten dieser beiden Längen mit s bezeichnet, so hat man vermöge der Gleichung (32) der vorhergehenden Vorlesung:

$$(30) \qquad \sqrt{\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]} = lim\, \frac{2s}{i^2},$$

wo s die unabhängige Veränderliche ist, und aus der Gleichung (30) in Verbindung mit der Gleichung (28) folgt:

$$(31) \qquad \varrho = lim\, \frac{i^2}{2s}.$$

Man kann also folgenden Lehrsatz aufstellen:

Lehrsatz 1. Um den Krümmungshalbmesser einer Curve in einem gegebenen Punkte zu erhalten, braucht man auf dieser Curve und auf ihrer nach demselben Sinne verlängerten Tangente nur zwei gleiche und unendlich kleine Längen zu nehmen und das Quadrat einer derselben durch die doppelte Entfernung ihrer Endpunkte zu dividiren, so ist die Grenze des Quotienten der genaue Werth des Krümmungshalbmessers.

Wir haben diesen Lehrsatz bereits für ebene Curven bewiesen, aber man sieht, daß er sich auch auf Curven von doppelter Krümmung erstreckt.

Wenn die Ebene der xy zur Krümmungsebene parallel wird, so verschwinden die Werthe von $\cos L$ und $\cos M$, während der von $\cos N = \pm 1$ wird. Alsdann folgt aus den Gleichungen (4):

$$(32) \qquad dz = 0, \quad d^2z = 0,$$

und die Gleichung (27) reducirt sich auf:

$$(33) \qquad \frac{1}{\varrho} = \pm \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Da diese letzte Gleichung mit der Gleichung (20) der sechsten Vorlesung übereinstimmt, so beweist sie, daß der Krümmungshalbmesser der gegebenen Curve in der gemachten Voraussetzung auch der Krümmungshalbmesser der auf die Ebene der xy oder auf die Krümmungsebene projicirten Curve ist. Da überdies die Ebene der xy willkührlich ist, so ist die gemachte Voraussetzung auf alle Punkte der betrachteten Curve anwendbar. Endlich ist klar, daß die Hauptnormale dieser Curve immer mit der Normale der ebenen Curve zu-

sammenfällt, welche man erhält, wenn man die gegebene Curve auf die Ebene der xy projicirt. Aus diesen Bemerkungen ergibt sich unmittelbar folgender Lehrsatz:

Lehrsatz 2. Der Krümmungshalbmesser einer im Raume beschriebenen Curve fällt der Größe und Richtung nach immer mit dem Krümmungshalbmesser dieser auf die Krümmungsebene projicirten Curve zusammen.

Die oben (S. 71 und 72) über die Krümmungshalbmesser ebener Curven gemachten Bemerkungen können offenbar auch auf beliebige Curven erstreckt werden und es kann geschehen, daß der Krümmungshalbmesser für gewisse Punkte einer Curve von doppelter Krümmung Null oder unendlich wird, oder seinen Werth plötzlich ändert. Der zweite Fall findet im Allgemeinen jedesmal statt, wenn die auf die Krümmungsebene projicirte Curve einen Inflexionspunkt darbietet.

Wir wollen nun die abgeleiteten allgemeinen Formeln auf einen besondern Fall anwenden und z. B. die durch die Gleichungen (38) der dreizehnten Vorlesung, nämlich:

$$(34) \qquad x = R\cos p, \quad y = R\sin p, \quad z = aRp$$

ausgedrückte Schraubenlinie nehmen. Wenn man der Bequemlichkeit wegen annimmt, daß p die unabhängige Veränderliche ist, so findet man:

$$(35) \quad \begin{cases} dx = -R\sin p\,dp, \quad dy = R\cos p\,dp, \quad dz = aR\,dp, \\ d^2x = -R\cos p\,dp^2, \quad d^2y = -R\sin p\,dp^2, \quad d^2z = 0, \end{cases}$$

oder was dasselbe ist:

$$(36) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{-\sin p} = \dfrac{dy}{\cos p} = \dfrac{dz}{a} = R\,dp, \\ \dfrac{d^2x}{\cos p} = \dfrac{d^2y}{\sin p} = \dfrac{d^2z}{0} = -R\,dp^2, \end{cases}$$

und folglich:

$$(37) \qquad ds = \pm (1+a^2)^{\frac{1}{2}} R\,dp, \quad d^2s = 0,$$

$$(38) \qquad \frac{\cos\alpha}{-\sin p} = \frac{\cos\beta}{\cos p} = \frac{\cos\gamma}{a} = \pm\frac{1}{\sqrt{(1+a^2)}}.$$

Da nach der zweiten der Gleichungen (37) das Differenzial d^2s für jeden Werth von p gleich Null bleibt, so folgt, daß man die Gleichungen anwenden kann, in welchen der Bogen s zur unabhängigen Veränderlichen genommen ist. Hiernach ergibt sich aus der Gleichung (38) in Vorles. 16.:

$$(39) \qquad \frac{\cos\lambda}{\cos p} = \frac{\cos\mu}{\cos p} = \frac{\cos\nu}{0} = \pm 1,$$

aus der Gleichung (5) in Verbindung mit den Gleichungen (36)

$$(40) \qquad \frac{\cos L}{-a\sin p} = \frac{\cos M}{a\cos p} = \frac{\cos N}{-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{(1+a^2)}}$$

und aus der Gleichung (23) in Verbindung mit der Gleichung (38):

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{(1+a^2)}}\left[\left(\frac{d\sin p}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos p}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ \qquad = \pm\frac{1}{\sqrt{(1+a^2)}}\,\frac{dp}{ds} = \frac{1}{(1+a^2)R}, \end{array} \right.$$

$$(42) \qquad \varrho = (1+a^2)R.$$

Ferner verwandelt sich die Gleichung (16) der Krümmungsebene in:

$$a[(\xi - x)\sin p - (\eta - y)\cos p] + \zeta - z = 0,$$

und kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$(43) \qquad \zeta - z = a(\eta\cos p - \xi\sin p).$$

Endlich ergibt sich aus der Gleichung (24) in Verbindung mit der Gleichung (40):

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{a}{\sqrt{(1+a^2)R}}\left[\left(\frac{d\sin p}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos p}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ \qquad = \frac{a}{\sqrt{(1+a^2)R}}, \end{array} \right.$$

$$(45) \qquad \mathfrak{R} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}R.$$

Es verdient bemerkt zu werden, daß, wenn man statt der Gleichung (38) in Vorl. 16 die Gleichung (36) daselbst anwendete, das doppelte Zeichen $\pm$ der Gleichung (39) sich auf das Zeichen $+$ reducirte. Wenn man ferner für die Größe a den durch die Gleichung:

$$(46) \qquad \cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{(1+a^2)}}$$

bestimmten Winkel γ substituirte, so verwandelten sich die Gleichungen (40), (42) und (45) resp. in:

$$(47) \qquad \frac{\cos L}{\sin p} = \frac{\cos M}{-\cos p} = \frac{\cos N}{\tan g\,\gamma} = \pm\cos\gamma,$$

$$(48) \qquad \varrho = \frac{R}{\sin^2\gamma} = R\,\mathrm{cosec}^2\gamma,$$

$$(49) \qquad \mathfrak{R} = \frac{R}{\sin\gamma\cos\gamma} = 2R\,\mathrm{cosec}\,2\gamma$$

Aus der Gleichung (39) folgt offenbar, daß die Hauptnormale der Schraubenlinie in dem Punkte (x, y, z) mit dem, von diesem

Punkte auf die Axe der z gefällten Perpendikel, oder was dasselbe ist, mit der Erzeugungslinie der durch die Gleichung:

$$(50) \qquad z = aR\,arc\,tang\left(\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

ausgedrückten Schraubenfläche zusammenfällt (siehe Vorles. 15). Folglich fällt die Ebene, welche durch diese Erzeugungslinie und durch die Tangente der Schraubenlinie geht, d. h. die Ebene, welche die Schraubenfläche im Punkte (x, y, z) berührt, nothwendig mit der Krümmungsebene der Schraubenlinie zusammen. Zu demselben Schlusse würde man gelangen, wenn man die Gleichung (43) mit der Gleichung (129) der vierzehnten Vorlesung vergliche; denn wenn man in dieser Gleichung

$$x = R\,cos\,p, \quad y = R\,sin\,p$$

setzte, so erhielte man genau die Gleichung (48) wieder.

Die Gleichung (48), welche den Krümmungshalbmesser ρ bestimmt, könnte auch direct aus dem Lehrsatze 1 abgeleitet werden; denn denken wir uns von dem Punkte (x, y, z) aus auf der Schraubenlinie und auf ihrer, nach demselben Sinne verlängerten Tangente zwei gleiche und unendlich kleine Längen i genommen; ferner sei s die Entfernung zwischen den Endpunkten dieser beiden Längen und wir wollen annehmen, daß die Coordinaten des Endpunktes der ersten Länge $x + \triangle x, y + \triangle y, z + \triangle z$ sind. Der Endpunkt der auf der Tangente genommenen Länge hat ebenfalls $z + \triangle z$ zur Ordinate (siehe Lehrsatz 1 in Vorles. 16) und ihre Projection auf die Ebene der xy ist folglich gleich:

$$\pm\, tang\,\gamma \,.\, \triangle z.$$

welche wir mit I bezeichnen wollen. Da allgemein

$$z = aRp, \quad tang\,\gamma = \frac{1}{a}$$

ist, so findet man:

$$(51) \qquad I = \pm\, tang\,\gamma \,.\, \triangle z = \pm\, R \triangle p.$$

Folglich ist die in Rede stehende Projection der des Bogens $\pm \triangle s$, d. h. der Projection der auf der Schraubenlinie genommenen Länge:

$$(52) \qquad i = \pm \triangle s$$

gleich. Auch ist zu bemerken, daß die erste Projection auf der Tangente des durch die Gleichung:

$$(53) \qquad x^2 + y^2 = R^2.$$

ausgedrückten Kreises gezählt wird. Endlich ist klar, daß die Entfernung s zwischen zwei, derselben Ordinate entsprechenden Punkten zu der Ebene der xy parallel und von ihrer Projection auf diese Ebene nicht verschieden ist. Wenn man also in dieser Ebene von

dem Punkte (x, y) aus auf dem Kreise und auf seiner, nach demselben Sinne verlängerten Tangente zwei unendlich kleine Längen $= I$ nimmt, so ist s die Entfernung zwischen den Endpunkten dieser beiden Längen. Da nun der Krümmungshalbmesser des Kreises genau dem Halbmesser R gleich ist, so hat man nach Lehrs. 1:

$$R = lim \frac{I^2}{2s};$$

und da dieser Lehrsatz auch

$$\varrho = lim \frac{i^2}{2s},$$

gibt, so folgt:

(54) $$\frac{\varrho}{R} = lim \frac{i^2}{I^2},$$

und wenn man die Gleichungen (51), (52) und (37) berücksichtigt, so findet man endlich:

(55) $$\frac{\varrho}{R} = lim \left(\frac{\triangle s}{R \triangle p}\right)^2 = \frac{ds^2}{R^2 dp^2} = I + a^2 = cosec^2 \gamma,$$

was mit der Gleichung (48) übereinstimmt.

Achtzehnte Vorlesung.

Analytische Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes einer beliebigen Curve. — Von den Evoluten einer beliebigen Curve und der Fläche, welche der geometrische Ort dieser Evoluten ist. Von den Curven, welche sich in einem gegebenen Punkte osculiren.

Es sei ϱ der Krümmungshalbmesser einer beliebigen Curve für den Punkt (x, y, z), die Coordinaten des Endpunktes dieses Halbmessers, welcher der Krümmungsmittelpunkt genannt wird, wollen wir mit ξ, η, ζ bezeichnen und die Winkel, welche die vom Punkte (x, y, z) nach dem Punkte (ξ, η, ζ) gezogene Gerade mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet, mit λ, μ, ν; so ist:

$$(1) \quad \frac{\xi - x}{\varrho} = \cos\lambda, \quad \frac{\eta - y}{\varrho} = \cos\mu, \quad \frac{\zeta - z}{\varrho} = \cos\nu.$$

Ferner werden die Winkel λ, μ, ν nach dem oben (S. 242) Gesagten durch die Gleichung (35) der sechszehnten Vorlesung, in welcher der Bogen s die unabhängige Veränderliche ist, bestimmt. Berücksichtigt man aber die Gleichung (28) der siebzehnten Vorlesung, so ergibt sich, daß die vorhergehende Gleichung auf folgende Form gebracht werden kann:

$$(2) \quad \frac{\cos\lambda}{d^2x} = \frac{\cos\mu}{d^2y} = \frac{\cos\nu}{d^2z} = \frac{\varrho}{ds^2},$$

und hieraus folgt:

$$(3) \quad \cos\lambda = \varrho\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \cos\mu = \varrho\frac{d^2y}{ds^2}, \quad \cos\nu = \varrho\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Diese letzten Gleichungen könnte man auch nach der Methode, welche uns auf die Gleichungen (16) der siebenten Vorlesung geführt hat, direct aufstellen. Nimmt man s zur unabhängigen Veränderlichen, so hat man:

$$(4)\quad \frac{\xi-x}{d^2x}=\frac{\eta-y}{d^2y}=\frac{\zeta-z}{d^2z}=\frac{\varrho^2}{ds^2}$$

und folglich:

$$(5)\quad \xi-x=\varrho^2\frac{d^2x}{ds^2},\ \eta-y=\varrho^2\frac{d^2y}{ds^2},\ \zeta-z=\varrho^2\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Wenn s nicht mehr zur unabhängigen Veränderlichen genommen würde, so müßte man

$$\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds},\ \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds},\ \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}$$

für

$$\frac{d^2x}{ds^2},\ \frac{d^2y}{ds^2},\ \frac{d^2z}{ds^2},$$

setzen, und man erhielte folglich:

$$(6)\quad \begin{cases} \cos\lambda=\varrho\,\dfrac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds},\ \cos\mu=\varrho\,\dfrac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}, \\ \cos\nu=\varrho\,\dfrac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}, \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \xi-x=\varrho^2\dfrac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds},\ \eta-y=\varrho^2\dfrac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}, \\ \zeta-z=\varrho^2\dfrac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}, \end{cases}$$

und wenn man für ϱ^2 seinen aus der Gleichung (27) der siebzehnten Vorlesung abgeleiteten Werth setzt:

$$(8)\quad \begin{cases} \xi-x=\dfrac{ds\,d^2x-dx\,d^2s}{\left\{\begin{array}{c}(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2\\+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2\end{array}\right\}}\,ds^3, \\ \eta-y=\dfrac{ds\,d^2y-dy\,d^2s}{\left\{\begin{array}{c}(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2\\+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2\end{array}\right\}}\,ds^3, \\ \zeta-z=\dfrac{ds\,d^2z-dz\,d^2s}{\left\{\begin{array}{c}(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2\\+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2\end{array}\right\}}\,ds^3, \end{cases}$$

oder was daſſelbe iſt:

$$(9)\quad \begin{cases} \xi - x = \dfrac{\left\{\begin{matrix} dy\,(dy\,d^2x - dx\,d^2y) \\ +dz\,(dz\,d^2x - dx\,d^2z) \end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix} (dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 \\ +(dxd^2y - dyd^2x)^2 \end{matrix}\right\}} (dx^2+dy^2+dz^2) \\ \eta - y = \dfrac{\left\{\begin{matrix} dz\,(dz\,d^2y - dy\,d^2z) \\ +dx\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x) \end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix} (dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 \\ +(dxd^2y - dyd^2x)^2 \end{matrix}\right\}} (dx^2+dy^2+dz^2) \\ \xi - z = \dfrac{\left\{\begin{matrix} dx\,(dx\,d^2z - dz\,d^2x) \\ +dy\,(dy\,d^2z - dz\,d^2y) \end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix} (dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 \\ +(dxd^2y - dyd^2x)^2 \end{matrix}\right\}} (dx^2+dy^2+dz^2) \end{cases}$$

In dem beſondern Falle, wo x zur unabhängigen Veränderlichen genommen wird, reduciren ſich die Gleichungen (7) und (8) auf:

$$(10)\quad \begin{cases} \xi - x = -\dfrac{y'y'' + z'z''}{(1+y'^2+z'^2)^2}\,\varrho^2 = \\ \qquad -\dfrac{y'y'' + z'z''}{(y'z'' - y''z')^2 + z''^2 + y''^2}\,(1+y'^2+z'^2), \\ \eta - y = \dfrac{z'(z'y'' - z''y') + y''}{(1+y'^2+z'^2)^2}\,\varrho^2 = \\ \qquad \dfrac{z'(z'y'' - z''y') + y''}{(y'z'' - y''z')^2 + z''^2 + y''^2}\,(1+y'^2+z'^2), \\ \zeta - z = \dfrac{y'(y'z'' - y''z') + z''}{(1+y'^2+z'^2)^2}\,\varrho^2 = \\ \qquad \dfrac{y'(y'z'' - y''z') + z''}{(y'z'' - y''z')^2 + z''^2 + y''^2}\,(1+y'^2+z'^2). \end{cases}$$

Zur Beſtimmung der Coordinaten ξ, η, ζ des Krümmungsmittelpunktes kann man ſowohl die Gleichungen (7), als (8), als (9) oder (10) anwenden. Ferner iſt zu bemerken, daß dieſe Coordinaten im Allgemeinen dem Syſteme der drei Gleichungen:

$$(11)\quad \begin{cases} (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \varrho^2, \\ (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0, \\ (\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + \\ (\zeta - z)\,d^2z - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0 \end{cases}$$

Genüge leisten, wovon die beiden ersten offenbar für alle Punkte (ξ, η, ζ) erfüllt werden, welche in der Normalebene liegen und von dem Punkte (x, y, z) um die Länge ϱ entfernt sind. Was die letzte der Gleichungen (11) anlangt, so kann man sie sowohl erhalten, wenn man die Gleichungen (8) resp. mit d^2x, d^2y, d^2z multiplicirt und die Producte zusammenaddirt, als wenn man die Gleichungen (1), nachdem sie durch die Gleichungen (6) multiplicirt sind, zusammenaddirt und die resultirende Gleichung vermittelst der Gleichung:

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0$$

vereinfacht. Es verdient, bemerkt zu werden, daß man die zweite und dritte der Gleichungen (11) wieder erhält, wenn man die erste und zweite differenzirt, indem man die drei Unbekannten ξ, η, ζ als constante Größen behandelt.

Wenn sich der Punkt (x, y, z) auf der gegebenen Curve verrückt, so wird der Krümmungsmittelpunkt zu gleicher Zeit verrückt und wenn sich der erste Punkt mit einer stetigen Bewegung auf der gegebenen Curve bewegt, so beschreibt der zweite eine neue Curve. Um nun die Gleichungen dieser letzten Curve zu erhalten, braucht man offenbar nur die aus den Gleichungen (7) abgeleiteten Werthe von ξ, η und ζ als Functionen einer einzigen Veränderlichen x oder y oder $s, \ldots$ auszudrücken und dann diese Veränderliche zwischen den drei Gleichungen zu eliminiren. Die beiden, aus der Elimination hervorgehenden Gleichungen enthalten nur noch die drei Veränderlichen ξ, η, ζ und drücken genau die Linie aus, welche der geometrische Ort aller Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Curve ist. Um die Haupteigenschaften dieser Linie kennen zu lernen, differenzirt man die beiden ersten der Gleichungen (11), indem man alle darin vorkommenden Größen variiren läßt. Verfährt man auf diese Weise, so findet man:

$$(12) \qquad (\xi - x)\,d\xi + (\eta - y)\,d\eta + (\zeta - z)\,d\zeta = \varrho\,d\varrho,$$

und

$$(13) \qquad dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta = 0.$$

Aus der Gleichung (13) folgt, daß die, durch den Punkt (ξ, η, ζ) an die neue Curve gezogene Tangente mit der, durch den Punkt (x, y, z) an die gegebene Curve gezogenen Tangente einen rechten Winkel bildet. Folglich liegt die Tangente der neuen Curve in der Normalebene der gegebenen Curve. Wenn man ferner den Bogen der neuen Curve, welcher zwischen einem festen Punkte und dem beweglichen Punkte (ξ, η, ζ) liegt, mit ϱ bezeichnet, so hat man:

$$(14) \qquad d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = d\varrho^2$$

und aus der Gleichung (12) folgt:

$$(15) \qquad \frac{d\varrho}{d\varrho} = \frac{\xi - x}{\varrho}\frac{d\xi}{d\varrho} + \frac{\eta - y}{\varrho}\frac{d\eta}{d\varrho} + \frac{\zeta - z}{\varrho}\frac{d\zeta}{d\varrho}$$

Nun folgt aber offenbar aus dieſer letzten Gleichung, daß das Verhältniß:

$$(16) \qquad \frac{d\varrho}{d\varsigma}$$

dem Coſinus des ſpitzen oder ſtumpfen Winkels gleich iſt, welchen der Krümmungshalbmeſſer ϱ mit der Tangente der neuen Curve bildet. Wenn die gegebene Curve eben iſt, ſo fällt dieſe Tangente mit dem Krümmungshalbmeſſer oder mit ſeiner Verlängerung zuſammen und folglich reducirt ſich das Verhältniß $\frac{d\varrho}{d\varsigma}$ auf den Coſinus eines Winkels $= 0$ oder auf den Coſinus des Winkels $= 2\pi$, d. h. auf ± 1. Es iſt folglich alsdann:

$$d\varrho = \pm d\varsigma$$

und es ergibt ſich, wie in der ſiebenten Vorleſung, daß der Bogen $\pm \Delta\varsigma$ die Differenz der, ſeinen Endpunkten entſprechenden Krümmungshalbmeſſer iſt. Aber dieſes iſt nicht mehr der Fall, wenn die gegebene Curve keine ebene iſt, und in dieſem Falle bekommt das Verhältniß $\frac{d\varrho}{d\varsigma}$ im Allgemeinen einen, von der Einheit verſchiedenen Zahlenwerth.

Wir wollen uns nun vorſtellen, daß ein unausdehnbarer Faden von bekannter Länge mit einem Ende in einem gewiſſen Punkte der gegebenen Curve befeſtigt ſei und daß dieſer Faden, indem er anfangs auf der, durch den erwähnten Punkt an die Curve gezogenen Tangente liegt, ſich ſo bewegt, daß er, indem er immer geſpannt bleibt, ſich zum Theil auf den, zwiſchen dem feſten Punkte und dem veränderlichen Punkte (x, y, z) liegenden Bogen wickelt. Der andere Theil, welcher gerade bleibt und die gegebene Curve im Punkte (x, y, z) berührt, wird von einem beweglichen Punkte begrenzt, welcher eine neue Curve beſchreibt. Man wird alſo ganz natürlich darauf geführt, dieſen beiden Curven die bereits in der ſiebenten Vorleſung angewandten Namen zu geben, weshalb wir die zweite Curve der Evolvente der erſten und die erſte die Evolute der zweiten nennen wollen. Ihre reſp. Eigenſchaften können leicht durch folgende Methode erhalten werden.

Es ſeien ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes der Evolvente, welcher dem Punkte (x, y, z) der Evolute entſpricht und r die Entfernung zwiſchen dieſen beiden Punkten, ſo hat man offenbar:

$$(17) \qquad \frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz} = \frac{r}{ds},$$

oder:

$$(18) \qquad \frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz} = -\frac{r}{ds},$$

wo die Gleichung (17) genommen werden muß, wenn die Länge r von dem Punkte (x, y, z) der Evolute aus auf der nach demſelben

Sinne als der Bogen s verlängerten Tangente genommen ist, und die Gleichung (18) im entgegengesetzten Falle. Ferner hat man in der ersten Voraussetzung:

$$(19) \qquad r+s=c, \qquad (20) \qquad dr=-ds,$$

und in der zweiten:

$$(21) \qquad r-s=c, \qquad (22) \qquad dr=ds,$$

wo c eine constante Größe bezeichnet. Man erhält also aus der Gleichung (17) oder (18):

$$(23) \qquad \frac{\xi-x}{dx}=\frac{\eta-y}{dy}=\frac{\zeta-z}{dz}=-\frac{r}{dr},$$

oder was dasselbe ist:

$$(24) \qquad \xi-x=-r\frac{dx}{dr},\ \eta-y=-r\frac{dy}{dr},\ \zeta-z=-r\frac{dz}{dr}.$$

Wenn man diese letzten Gleichungen differenzirt, so findet man:

$$(25) \qquad d\xi=-rd\left(\frac{dx}{dr}\right),\ d\eta=-rd\left(\frac{dy}{dr}\right),\ d\zeta=-rd\left(\frac{dz}{dr}\right),$$

und da außerdem:

$$(26) \qquad dr^2=ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,$$

$$\left(\frac{dx}{dr}\right)^2+\left(\frac{dy}{dr}\right)^2+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2=1,$$

$$\frac{dx}{dr}\,d\left(\frac{dx}{dr}\right)+\frac{dy}{dr}\,d\left(\frac{dy}{dr}\right)+\frac{dz}{dr}\,d\left(\frac{dz}{dr}\right)=0$$

ist; so ergibt sich aus den resp. mit dx, dy, dz multiplicirten Gleichungen (25):

$$(27) \qquad dx\,d\xi+dy\,d\eta+dz\,d\zeta=0.$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt, daß sich die durch die Punkte (ξ, η, ζ) und (x, y, z) der Evolvente und Evolute gezogenen Tangenten unter rechten Winkeln schneiden. Folglich ist die Tangente an der Evolute immer auf der Evolvente normal. Dieser Satz, welchen wir bereits für ebene Curven bewiesen haben, erstreckt sich also auch, wie man sieht, auf Curven von doppelter Krümmung.

Wenn die Evolute bekannt ist, wie wir in dem Vorhergehenden vorausgesetzt haben, so braucht man, um die Gleichungen der Evolvente zu erhalten, nur die als Functionen von s ausgedrückten Werthe von x, y, z in die Gleichungen (24) zu substituiren, außerdem $c \mp s$ für r zu setzen und dann s zwischen denselben Gleichungen zu eliminiren. Denn auf diese Weise erhält man zwei Gleichungen zwischen ξ, η und ζ, welche offenbar die von dem Endpunkte der Länge r beschriebene Curve ausdrücken.

Wir wollen nun annehmen, daß nicht eine Evolvente, sondern eine Evolute der Curve, zu welchen die Coordinaten x, y, z gehören, gesucht wird. Wenn man die Coordinaten des Punktes dieser Evolute welcher dem Punkte (x, y, z) der Evolvente entspricht, mit ξ, η, ζ und die Entfernung zwischen diesen beiden Punkten wieder mit r bezeichnet, so muß man in der Gleichung (23) ξ, η, ζ für x, y, z und umgekehrt setzen. Es ist also:

$$(28) \qquad \frac{x-\xi}{d\xi} = \frac{y-\eta}{d\eta} = \frac{z-\zeta}{d\zeta} = -\frac{r}{dr},$$

und folglich:

$$(29) \quad d\xi = (\xi - x)\frac{dr}{r}, \quad d\eta = (\eta - y)\frac{dr}{r}, \quad d\zeta = (\zeta - z)\frac{dr}{r}.$$

Ferner hat man:

$$(30) \qquad (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = r^2.$$

Wenn man die Gleichung (30) dreimal hintereinander differenzirt, indem man den Bogen s zur unabhängigen Veränderlichen nimmt und die Gleichungen (29) berücksichtigt, so findet man:

$$(31) \quad \begin{cases} (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0, \\ (\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z = ds^2, \end{cases}$$

$$(32) \quad \begin{cases} (\xi - x)\,d(r\,d^2x) + (\eta - y)\,d(r\,d^2y) \\ + (\zeta - z)\,d(r\,d^2z) = 0, \end{cases}$$

woraus folgt:

$$\frac{\xi - x}{dy\,d(r\,d^2z) - dz\,d(r\,d^2y)} = \frac{\eta - y}{dz\,d(r\,d^2x) - dx\,d(r\,d^2z)}$$

$$= \frac{\zeta - z}{dx\,d(r\,d^2y) - dy\,d(r\,d^2x)}$$

$$= \frac{ds^2}{\begin{array}{l} d^2x\,[dy\,d(r\,d^2z) - dz\,d(r\,d^2y)] + \\ d^2y\,[dz\,d(r\,d^2x) - dx\,d(r\,d^2z)] + \\ d^2z\,[dx\,d(r\,d^2y) - dy\,d(r\,d^2x)] \end{array}}$$

$$= \pm \frac{r}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l} [dy\,d(r\,d^2z) - dz\,d(r\,d^2y)]^2 + \\ [dz\,d(r\,d^2x) - dx\,d(r\,d^2z)]^2 + \\ [dx\,d(r\,d^2y) - dy\,d(r\,d^2x)]^2 \end{array}\right\}}}$$

$$= \pm \frac{r}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l} ds^2\,\{[d(r\,d^2x)]^2 + [d(r\,d^2y)]^2 + [d(r\,d^2z)]^2\} \\ - \{dx\,d(r\,d^2x) + dy\,d(r\,d^2y) + dz\,d(r\,d^2z)\}^2 \end{array}\right\}}}.$$

Aus dieſer letzten Gleichung ergibt ſich, wenn man zwei der darin vorkommenden Brüche umkehrt, und jeden zum Quadrate erhebt:

$$\frac{\left[\begin{array}{l} ds^2\,|\,[d(rd^2x)]^2+[d(rd^2y)]^2+[d(rd^2z)]^2\,|- \\ \quad |\,dxd(rd^2x)+dyd(rd^2y)+dzd(rd^2z)\,|^2 \end{array}\right]}{r^2}$$

$$=\frac{r^2}{ds^4}\left\{\begin{array}{l} dxd^2yd^3z-dxd^2zd^3y+dyd^2zd^3x- \\ dyd^2xd^3z+dzd^2xd^3y-dzd^2yd^3x \end{array}\right\}^2,$$

oder was daſſelbe iſt:

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{l} \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]\frac{dr^2}{ds^2} \\ +2\left[\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^3x}{ds^3}+\frac{d^2y}{ds^2}\frac{d^3y}{ds^3}+\frac{d^2z}{ds^2}\frac{d^3z}{ds^3}\right]r\frac{dr}{ds} \\ +\left[\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)^2+\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)^2+\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)^2-\right. \\ \left.\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^3x}{ds^3}+\frac{dy}{ds}\frac{d^3y}{ds^3}+\frac{dz}{ds}\frac{d^3z}{ds^3}\right)^2\right]r^2 \\ =\left(\frac{dxd^2yd^3z-dxd^2zd^3y+dyd^2zd^3x- \\ dyd^2xd^3z+dzd^2xd^3y-dzd^2yd^3x}{ds^6}\right)^2 r^4. \end{array}\right.$$

Wenn man für x, y, z ihre als Functionen von s ausgedrückten Werthe in die Gleichung (33) ſubſtituirt, ſo enthält ſie nur noch die Veränderliche s und die Unbekannte r nebſt dem Differenzialcoefficienten $\frac{dr}{ds}$ und iſt eine ſogenannte Differenzialgleichung der erſten Ordnung zwiſchen r und s. Nun folgt aber aus den Prinzipien der Integralrechnung, daß man dieſer Differenzialgleichung Genüge leiſten kann, wenn man für r eine unendliche Menge von Functionen von s nimmt, die den verſchiedenen Werthen entſprechen, welche eine gewiſſe willkührliche Conſtante annehmen kann. Wenn man, nachdem eine dieſer Functionen beſtimmt iſt, in den Gleichungen (30) und (31) ſtatt der Veränderlichen x, y, z, r die eine Veränderliche s ſetzt, ſo bleibt s zwiſchen dieſen Gleichungen nur noch zu eliminiren, um zwiſchen den Coordinaten ξ, η, ζ zwei Gleichungen zu erhalten, welche eine Evolute der betrachteten Curve ausdrücken können. Hiernach iſt einleuchtend, daß dieſe Curve unendlich viele Evoluten hat, welche den verſchiedenen Werthen von r, oder was daſſelbe iſt, den verſchiedenen Werthen der willkührlichen Conſtante entſprechen. Ferner iſt zu bemerken, daß alle dieſe Evoluten auf der krummen Fläche liegen, welche der aus der Elimi-

nation von s zwischen den Gleichungen (31) hervorgehenden Gleichung mit ξ, η, ζ angehört.

Die eben erwähnte krumme Fläche, oder der geometrische Ort aller Evoluten hat mehrere merkwürdige Eigenschaften, welche sich leicht aus den Gleichungen (31) oder aus den beiden folgenden:

$$(34)\quad \begin{cases} (\xi-x)\dfrac{dx}{ds}+(\eta-y)\dfrac{dy}{ds}+(\zeta-z)\dfrac{dz}{ds}=0, \\ (\xi-x)\dfrac{d^2x}{ds^2}+(\eta-y)\dfrac{d^2y}{ds^2}+(\zeta-z)\dfrac{d^2z}{ds^2}=1 \end{cases}$$

ableiten lassen. Zunächst ist klar, daß wenn man dem Bogen s und den davon abhängigen Größen:

$$(35)\qquad x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds},\ \frac{d^2x}{ds^2},\ \frac{d^2y}{ds^2},\ \frac{d^2z}{ds^2}$$

bestimmte Werthe beilegt, die Gleichungen (34), worin ξ, η, ζ allein veränderlich bleiben, zwei Ebenen ausdrücken, deren gemeinschaftlicher Durchschnitt eine in der erwähnten krummen Fläche liegende Gerade ist. Diese krumme Fläche enthält also unendlich viele, den verschiedenen Werthen von s entsprechende Gerade und gehört zu den sogenannten geradlinigen krummen Flächen. Außerdem kann man bemerken, daß die erste der Gleichungen (31) oder (34) genau die Gleichung der durch den Punkt (x, y, z) an die gegebene Curve gelegten Normalebene ist. Was die zweite der Gleichungen (34) anlangt, so läßt sie sich vermöge der Gleichungen (3) auf:

$$(36)\qquad (\xi-x)\cos\lambda+(\eta-y)\cos\mu+(\zeta-z)\cos\nu=\varrho$$

reduciren, und man erkennt alsdann unmittelbar: 1) daß ihr durch die aus den Gleichungen (1) abgeleiteten Werthe von ξ, η, ζ, d. h. durch die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes genügt wird und 2) daß sie die Ebene ausdrückt, welche durch diesen Krümmungsmittelpunkt senkrecht auf den Krümmungshalbmesser gelegt ist, dessen Richtung mit den Halbaxen der positiven Coordinaten die Winkel λ, μ, ν bildet. Wenn man endlich der Kürze wegen

$$(37)\qquad x=\varphi(s),\ y=\chi(s),\ z=\psi(s)$$

setzt, so verwandeln sich die Gleichungen (34) resp. in:

$$(38)\quad [\xi-\varphi(s)]\varphi'(s)+[\eta-\chi(s)]\chi'(s)+[\zeta-\psi(s)]\psi'(s)=0,$$

$$(39)\quad [\xi-\varphi(s)]\varphi''(s)+[\eta-\chi(s)]\chi''(s)+[\zeta-\psi(s)]\psi''(s)=1,$$

und die Gleichung (38), welche eine Ebene ausdrückt, wenn man s einen constanten Werth beilegt, kann offenbar die eben erwähnte krumme Fläche ausdrücken, wenn man die Größe s als eine durch die Gleichung (39) bestimmte Function von ξ, η, ζ betrachtet. Nach dieser Annahme läßt sich leicht die Differenzialgleichung derselben krummen Fläche erhalten; denn zu diesem Zwecke braucht man nur die Gleichung (38) zu differenziren, indem man dann die Grö-

ßen ξ, η, ζ und s zu gleicher Zeit variiren läßt. Verfährt man nun auf dieſe Weiſe, indem man die Gleichung (39), deren erſter Theil genau der Coefficient von ds iſt, berückſichtigt; ſo erhält man als die geſuchte Differenzialgleichung:

$$\varphi'(s)\,d\xi + \chi'(s)\,d\eta + \psi'(s)\,d\zeta = 0. \qquad (40)$$

Aus dieſer folgt (ſ. Vorleſ. 14), daß die Halbaren der poſitiven Coordinaten mit der durch den Punkt (ξ, η, ζ) der geradlinigen Fläche gezogenen Normale Winkel bilden, deren Coſinus den abgeleiteten Functionen:

$$\varphi'(s) = \frac{dx}{ds},\quad \chi'(s) = \frac{dy}{ds},\quad \psi'(s) = \frac{dz}{ds}$$

nicht blos proportional, ſondern auch gleich ſind, wenn die Normale nach einem entſprechenden Sinne verlängert wird. Folglich ſind dieſe Normale und die durch den Punkt (x, y, z) an die gegebene Curve gezogene Tangente zwei parallele Gerade. Da nun die durch den Punkt (ξ, η, ζ) an die geradlinige krumme Fläche gelegte Berührungsebene die Erzeugungslinie dieſer Fläche und folglich den Krümmungsmittelpunkt der gegebenen Curve enthalten muß, ſo fällt ſie nothwendig mit der durch dieſen Krümmungsmittelpunkt auf die beiden parallelen Geraden ſenkrecht gelegten Ebene, d. h. mit der Normalebene der Curve zuſammen. Aus dieſen Bemerkungen folgt, daß jede Normalebene der Curve die geradlinige krumme Fläche in allen Punkten der Erzeugungslinie berührt, durch welche ſie geht. Folglich iſt die in Rede ſtehende krumme Fläche, d. h. der geometriſche Ort aller Evoluten der Curve eine developpabele Fläche.

Es verdient bemerkt zu werden, daß die Gleichung (40) mit der Gleichung (27), aus welcher ſie abgeleitet wird, wenn man für die Differenziale dx, dy, dz ihre aus den Gleichungen (37) abgeleiteten Werthe, nämlich:

$$\varphi'(s)\,ds,\quad \chi'(s)\,ds,\quad \psi'(s)\,ds$$

ſubſtituirt und dann den allen Gliedern gemeinſchaftlichen Factor ds hinwegläßt, übereinſtimmt.

Außerdem wollen wir bemerken, daß man, wenn die Veränderliche s nicht mehr als unabhängig betrachtet wird, um die zweite der Gleichungen (31) zu erhalten, nur die erſte zu differenziren und dann dieſe und die Gleichungen (29) zu berückſichtigen braucht. Hieraus folgt, daß die Gleichung mit ξ, η und ζ, welche durch die Elimination von s zwiſchen den Gleichungen (31) erhalten wird, in allen Fällen die krumme Fläche ausdrückt, welche der geometriſche Ort der Evoluten der gegebenen Curve iſt. Da endlich die Gleichungen (31) mit den beiden erſten der Gleichungen (11) übereinſtimmen, ſo kann man auch behaupten, daß dieſe krumme Fläche durch die neue Curve geht, welche der geometriſche Ort der Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Curve iſt.

Es würde sich leicht und ohne alle Rechnung direct beweisen lassen, daß die developpabele Fläche, welche die Normalebene einer beliebigen Curve beständig berührt, zugleich der geometrische Ort der Evoluten dieser Curve ist. Dieses läßt sich in der That durch folgende Betrachtungen darthun.

Wenn man auf einer developpabeln Fläche die Berührungsebene derselben mit mehreren durch einen auf dieser Ebene willkührlich genommenen Punkt gezogenen Geraden fortrollen läßt, so beschreibt jede Gerade offenbar eine Evolute dieser Curve. Folglich ist die developpabele Fläche der geometrische Ort aller Evoluten und die Berührungsebene, welche durch die Tangenten der Evoluten oder durch mehrere Normalen der beschriebenen Curve geht (siehe Seite 254), fällt nothwendig mit der Normalebene dieser Curve zusammen. Soll nun die beschriebene Curve eine gegebene sein, so braucht man die developpabele Fläche nur mit der zusammenfallen zu lassen, welche von der Normalebene der gegebenen Curve beständig berührt wird und den beweglichen Punkt schicklich zu wählen. Wenn in dieser Beziehung einige Zweifel übrig bleiben sollten, so werden sie durch die später aufzustellenden Sätze ganz beseitigt werden.

Um von den vorhergehenden Formeln eine Anwendung zu geben, wollen wir die durch die Gleichungen (38) der dreizehnten Vorlesung nämlich:

$$(41) \qquad x = R\cos p, \quad y = R\sin p, \quad z = aRp$$

ausgedrückte Schraubenlinie betrachten. Wenn man den Bogen s, oder was dasselbe ist, den Winkel p zur unabhängigen Veränderlichen nimmt, so hat man:

$$(42) \quad \begin{cases} dx = -R\sin p dp, \; dy = R\cos p dp, \; dz = aRdp, \\ d^2x = -R\cos p dp^2, \; d^2y = -R\sin p dp^2, \; d^2z = 0, \\ d^3x = R\sin p dp^3, \; d^3y = -R\cos p dp^3, \; d^3z = 0. \end{cases}$$

Ferner findet man (s. Vorles. 17):

$$(43) \qquad ds = \pm (1 + a^2)^{\frac{1}{2}} R dp,$$

$$(44) \qquad \varrho = (1 + a^2) R,$$

und alsdann geben die Gleichungen (5):

$$(45) \qquad \xi = -a^2 R\cos p, \quad \eta = -a^2 R\sin p, \quad \zeta = aRp.$$

Wenn man zwischen diesen letzten Gleichungen p eliminirt, so erhält man zwischen den Coordinaten ξ, η, ζ zwei Gleichungen, welche die Linie der Krümmungsmittelpunkte ausdrücken. Da nun aus den Gleichungen (45) folgt:

$$(46) \qquad \frac{\eta}{\xi} = tang \frac{\zeta}{aR}, \quad \xi^2 + \eta^2 = a^4 R^2,$$

so ist klar, daß diese Linie eine zweite Schraubenlinie ist, welche wie die erste in der Schraubenfläche liegt, die

$$(47) \qquad \frac{y}{x} = tang \frac{z}{aR}$$

zur Gleichung hat und auf einen geraden Cylinder gezeichnet ist, der einen in der Ebene der xy aus dem Anfangspunkte als Mittelpunkt und mit einem Halbmesser $= a^2 R$ beschriebenen Kreis zur Basis hat. Dieses konnten wir leicht vorher einsehen, weil wir wissen, daß man, um den dem Punkte (x, y, z) der gegebenen Schraubenlinie entsprechenden Krümmungsmittelpunkt zu erhalten, nur auf der Erzeugungslinie der Schraubenfläche von dem Punkte (x, y, z) aus die Länge $\varrho = (1 + a^2) R$ und folglich von der Axe des Cylinders aus die Länge $\varrho - R = a^2 R$ zu nehmen braucht (S. Vorles. 17).

Was die Gleichungen (30), (31) und (32) anlangt, so reduciren sie sich in dem gegenwärtigen Falle, die erste auf:

$$(48) \quad \begin{cases} \xi^2 + \eta^2 - 2R(\xi cosp + \eta sinp) + R^2 \\ + (\zeta - aRp)^2 = r^2, \end{cases}$$

die beiden folgenden auf:

$$(49) \quad \begin{cases} \xi sinp - \eta cosp = a(\zeta - aRp), \\ \xi cosp + \eta sinp = -a^2 R, \end{cases}$$

und die letzte auf:

$$(50) \quad \begin{cases} (\xi cosp + \eta sinp - R)\, dr + \\ (\eta cosp - \xi sinp)\, r\, dp = 0. \end{cases}$$

Ferner gibt die Gleichung (33):

$$(51) \qquad \frac{dr^2}{dp^2} + \frac{a^2}{1 + a^2} r^2 = \frac{a^2}{(1 + a^2)^3} \frac{r^4}{R^2},$$

und hieraus folgt:

$$(52) \qquad \frac{dr}{dp} = \pm \frac{ar^2}{\sqrt{(1 + a^2)}} \left[\frac{1}{(1 + a^2)^2 R^2} - \frac{1}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

oder was dasselbe ist:

$$(53) \qquad \frac{a}{\sqrt{(1 + a^2)}} dp \pm \frac{d\left[\frac{R(1 + a^2)}{r}\right]}{\left[1 - \frac{R^2 (1 + a^2)^2}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes, d. h. die Werthe von ξ, η, ζ, welche die Gleichungen (45) geben, den Gleichungen (49) genügen. Wenn man ferner diese Gleichungen addirt, nachdem man jeden Theil derselben zum Quadrate erhoben hat, so findet man:

$$(54) \qquad \xi^2 + \eta^2 = a^4 R^2 + a^2 (\zeta - aRp)^2,$$

und folglich:

$$(55) \qquad p = \frac{\zeta}{aR} \mp \left[\frac{\xi^2+\eta^2}{a^4R^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}},$$

und wenn man den vorhergehenden Werth von p in die zweite der Gleichungen (49) setzt; so erhält man die Gleichung:

$$(56) \begin{cases} \left(\xi \cos\frac{\zeta}{aR} + \eta \sin\frac{\zeta}{aR}\right)\cos\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{a^4R^2}-1\right)^{\frac{1}{2}} + a^2R = \\ \pm\left(\eta\cos\frac{\zeta}{aR} - \xi\sin\frac{\zeta}{aR}\right)\sin\left(\frac{\xi^2+\xi^2}{a^4R^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Da diese letzte Gleichung die ist, welche aus der Elimination von p zwischen den Gleichungen (49) entspringt, so drückt sie die developpabele Fläche aus, welche die Normalebene der gegebenen Schraubenlinie beständig berührt und der geometrische Ort der Evoluten dieser Curve ist. Ferner wollen wir bemerken, daß man, um die beiden Gleichungen einer dieser Evoluten zu erhalten, nur mit der Gleichung (56) die aus der Elimination von p zwischen den Gleichungen (48) und (55) entspringende Gleichung zu verbinden braucht, nachdem man in der Gleichung (48) einen der Werthe von r, welche der Gleichung (53) genügen, gesetzt hat. Man kann übrigens bei dieser Untersuchung statt der Gleichung (48) auch die folgende:

$$(57) \qquad \left(\frac{\xi+\eta^2}{a^2} + R^2\right)(1+a^2) = r^2$$

anwenden, welche man erhält, wenn man die Gleichung (48) mit der Gleichung (54) verbindet. Was die Gleichung (53) anlangt, so kann sie auf die Form gebracht werden:

$$(58) \qquad d\left[\frac{a}{\sqrt{(1+a^2)}}p \pm arccos\frac{R(1+a^2)}{r}\right] = 0,$$

und aus derselben folgt, wenn man, wie S. 84 schließt:

$$(59) \qquad \Delta\left[\frac{a}{\sqrt{(1+a^2)}}p \pm arccos\frac{R(1+a^2)}{r}\right] = 0.$$

Folglich ist die endliche Differenz des Ausdruckes:

$$\frac{a}{\sqrt{(1+a^2)}}p \pm arccos\frac{R(1+a^2)}{r}$$

gleich Null, oder mit andern Worten, dieser Ausdruck behält einen constanten Werth, während man den Winkel p variiren läßt. Man hat also, wenn $\mathfrak{C}$ eine willkührliche Constante bezeichnet:

$$\frac{a}{\sqrt{(1+a^2)}}p \pm arccos\frac{R(1+a^2)}{r} = \mathfrak{C},$$

oder was dasselbe ist:

$$(60) \qquad r = \frac{R(1+a^2)}{\cos\left(\mathfrak{C} - \frac{ap}{\sqrt{1+a^2}}\right)}.$$

Hiernach gibt die Gleichung (57):

$$(61) \qquad \xi^2+\eta^2 = a^2R^2\left(\frac{1+a^2}{\cos^2\left[\mathfrak{C}-\frac{ap}{\sqrt{1+a^2}}\right]}-1\right).$$

Wenn man in diese letzte Gleichung den aus der Gleichung (54) abgeleiteten Werth von p substituirt, so findet man:

$$(62) \qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{a^2(1+a^2)R^2}{\xi^2+\eta^2+a^2R^2} = \\ \left[\cos\left(\mathfrak{C}-\frac{\xi}{R\sqrt{1+a^2}} \pm \frac{\sqrt{(\xi^2+\eta^2-a^4R^2)}}{aR\sqrt{1+a^2}}\right)\right]^2. \end{array}\right.$$

Die Gleichung (62) bestimmt in Verbindung mit der Gleichung (56) für jeden besondern Werth der Constante $\mathfrak{C}$ eine Evolute der betrachteten Schraubenlinie.

Es wird nicht überflüssig sein, zu bemerken, daß der kleinste der Werthe, welche die Gleichung (60) für r gibt, immer dem Producte $(1+a^2)R$, d. h. dem Krümmungshalbmesser gleich ist und unendlich vielen verschiedenen Werthen des Winkels p, wovon einer dem Verhältnisse:

$$\frac{\mathfrak{C}\sqrt{1+a^2}}{a}$$

gleich ist, entspricht. Wenn man dieses Verhältniß der Kürze wegen mit P bezeichnet, oder wenn man setzt:

$$(63) \qquad P = \frac{\mathfrak{C}\sqrt{1+a^2}}{a},$$

so verwandeln sich die Gleichungen (60) und (61) resp. in:

$$(64) \qquad r = \frac{R(1+a^2)}{\cos\frac{a(p-P)}{\sqrt{1+a^2}}},$$

und:

$$(65) \qquad \xi^2+\eta^2 = a^2R\left[\frac{1+a^2}{\cos^2\left[\frac{a(p-P)}{\sqrt{1+a^2}}\right]}-1\right].$$

Wenn man endlich die Gleichung (65) mit der Gleichung (54) verbindet, so findet man:

$$(66) \qquad \zeta - aRp = \pm(1+a^2)^{\frac{1}{2}}R\,tang\frac{a(p-P)}{\sqrt{(1+a^2)}}.$$

Statt der Gleichungen (56) und (62) könnte man auch das Syſtem der Gleichungen (49) und (66) nehmen. Wenn man aus dieſen letzten Gleichungen die als Functionen von p ausgedrückten Werthe von ξ, η und ζ ableitet, ſo erhält man drei Gleichungen, welche in der Formel:

$$(67)\quad \begin{cases} \dfrac{\xi+a^2R\cos p}{a\sin p}=\dfrac{\eta+a^2R\sin p}{-a\cos p}=\dfrac{\zeta-aRp}{1} \\ =\pm(1+a^2)^{\frac{1}{2}}R\tan g\,\dfrac{a(p-P)}{\sqrt{(1+a^2}} \end{cases}$$

enthalten ſind, die allein jede der Evoluten der Schraubenlinie ausdrücken kann. Aus der Gleichung (67) folgt offenbar, daß die Coordinaten ξ, η, ν jeder Evolute jedesmal unendlich werden, wenn der Winkel p einen Werth von der Form:

$$(68)\qquad p=P\pm(2n+1)\frac{\pi}{2}\,\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$$

bekommt, wo n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Ferner, während der Winkel p gegen einen dieſer Werthe convergirt, liegt der Punkt (ξ, η, ζ) immer auf der durch die Gleichung (56) ausgedrückten developpabeln Fläche und nähert ſich der Erzeugungslinie dieſer Fläche ohne Ende, welcher die Gleichungen (49) angehören, wenn man p den in Rede ſtehenden Werth beilegt. Jede Evolute beſteht folglich aus unendlich vielen Zweigen, welche ſich ins Unendliche erſtrecken und wovon jeder zwei Erzeugungslinien der krummen Fläche (56) als Aſymptoten hat.

Noch wollen wir bemerken, daß, wenn $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}$ die Polarcoordinaten einer dieſer auf die Ebene der xy projicirten Evolute bezeichnen,

$$(69)\qquad \xi=\mathfrak{R}\cos\mathfrak{P},\quad \eta=\mathfrak{R}\sin\mathfrak{P}$$

iſt, und daß folglich die Gleichungen (49) in Verbindung mit der Gleichung (66) geben:

$$(70)\quad \begin{cases} \mathfrak{R}\sin(p-\mathfrak{P})=\pm a(1+a^2)^{\frac{1}{2}}R\tan g\,\dfrac{(ap-P)}{\sqrt{(1+a^2)}}, \\ \mathfrak{R}\cos(p-\mathfrak{P})=-a^2R. \end{cases}$$

Das Syſtem der Gleichungen (66) und (70) kann bei der Unterſuchung der Eigenſchaften der Evoluten der Schraubenlinie mit Vortheil angewandt werden. Setzt man der Einfachheit wegen $P=0$, ſo reduciren ſich dieſe Gleichungen auf:

$$(71)\quad \begin{cases} \varrho-aRp=\pm(1+a^2)^{\frac{1}{2}}R\tan g\,\dfrac{ap}{\sqrt{(1+a^2)}}, \\ \mathfrak{R}\sin(p-\mathfrak{P})=\pm a(1+a^2)^{\frac{1}{2}}R\tan g\,\dfrac{ap}{\sqrt{(1+a^2)}}, \\ \mathfrak{R}\cos(p-\mathfrak{P})=-a^2R \end{cases}$$

und drücken die der Evoluten aus, auf welcher der Krümmungsmittelpunkt liegt, welcher dem, mit dem Anfangspunkte zusammenfallenden Punkte der Schraubenlinie entspricht. Um ferner aus den Gleichungen (71) die Gleichungen (68) und (70) wieder abzuleiten, braucht man offenbar für die Größen:

$$p, \quad \mathfrak{P}, \quad \text{und} \quad \zeta$$

nur die Differenzen:

$$p - P, \quad \mathfrak{P} - \mathfrak{P} \quad \text{und} \quad \zeta - aRP$$

zu setzen. Nun entspricht aber die Substitution des Winkels $p - P$ für den Winkel p und der Ordinate $\zeta - aRP$ für die Ordinate ζ genau der Bewegung der Curve, deren drei Coordinaten $\mathfrak{P}, \mathfrak{R}, \zeta$ sind, in Folge welcher jeder Punkt derselben zuerst, indem er sich mit einer directen Rotationsbewegung um die Axe der z dreht, wenn P positiv ist, den Winkel $+P$ beschreibt, oder den Winkel $-P$ mit einer retrograden Rotationsbewegung, wenn P negativ ist und dann auf einer, zu dieser Axe parallelen Geraden in dem Sinne der positiven z um die Länge aRP, oder in dem Sinne der negativen z um die Länge $-aRP$ fortrückt. Diese Verrückung ist also hinreichend, um die durch die Gleichungen (71) ausgedrückte Evolute in eine beliebige der übrigen Evoluten der Schraubenlinie zu verwandeln. Folglich sind alle diese Evoluten ähnliche und aufeinanderlegbare Curven. Wenn man ferner der Größe P einen der in der Formel:

$$(72) \qquad P = \pm (2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{(1+a^2)}}{a}$$

enthaltenen Werthe beilegt, so werden die verschiedenen Zweige der ersten Evolute durch die erwähnte Verrückung auf einander gelegt. Folglich sind alle Zweige derselben Evolute einander ähnlich. Diese merkwürdigen Eigenschaften der Evoluten der Schraubenlinie haben ihren Grund in der regelmäßigen Form dieser Curve, deren Windungen man zusammenfallen lassen kann, wenn man denselben eine Rotationsbewegung um die Axe der z und eine zu dieser Axe parallele fortrückende Bewegung ertheilt.

Man sagt, zwei Curven von doppelter Krümmung osculiren einander in einem gemeinschaftlichen Punkte, wenn sie in diesem Punkte nicht blos dieselbe Tangente, sondern auch denselben Krümmungskreis und folglich dieselbe Krümmungsebene, dieselbe Hauptnormale und dieselbe Krümmung haben. Alsdann wird die zwischen ihnen stattfindende Berührung eine Osculation genannt. Hiernach läßt sich leicht folgender Lehrsatz beweisen:

Lehrsatz 1. Wir wollen annehmen, daß zwei Curven von doppelter Krümmung durch zwei Gleichungen zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z ausgedrückt sind und daß die Abscisse x zur unabhängigen Veränderlichen genommen wird. Sollen diese beiden Curven einander in einem gemeinschaftlichen, der Abscisse

x entsprechenden Punkte osculiren, so ist erforderlich, aber auch zureichend, daß die Ordinaten y, z für diese Abscisse und ihre abgeleiteten Functionen der ersten und zweiten Ordnung, d. h. die sechs Größen:

$$(1) \quad y,\ y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\ z,\ z' = \frac{dz}{dx},\ z'' = \frac{d^2z}{dx^2}$$

bei dem Uebergange von der einen Curve zur andern dieselben Zahlenwerthe und dieselben Zeichen behalten.*)

Beweis. Denn wenn diese Bedingungen erfüllt werden, so haben die beiden Curven offenbar einen der Abscisse x entsprechenden gemeinschaftlichen Punkt. Ferner folgt aus dem weiter oben Gesagten (Vorles. 16 S. 227), daß sie dieselbe Tangente haben und aus den Gleichungen (10), daß sie denselben Krümmungsmittelpunkt haben. Folglich haben sie auch denselben Krümmungskreis. Umgekehrt, wenn die beiden Curven einander in einem Punkte, dessen Abscisse x ist, osculiren, so müssen nicht blos die Größen:

$$y' = \frac{dy}{dx},\quad z' = \frac{dz}{dx}$$

beim Uebergange von der einen Curve zur andern dieselben bleiben, sondern dasselbe gilt auch von dem Krümmungshalbmesser ϱ, sowie von den Coordinaten ξ, η, ζ des Krümmungsmittelpunktes und folglich von den Größen y'', z'', deren, durch die Gleichungen (10) bestimmten Werthe sich auf

$$(73) \quad \begin{cases} y'' = \dfrac{\eta - y - y'(\xi - x)}{\varrho^2}(1 + y'^2 + z'^2), \\ z'' = \dfrac{\zeta - z - z'(\xi - x)}{\varrho^2}(1 + y'^2 + z'^2) \end{cases}$$

reduciren

Zusatz. Aus dem Lehrsatze 1 folgt, daß, wenn zwei Curven von doppelter Krümmung einander osculiren, dasselbe mit ihren

---

*) Dieser Lehrsatz, welcher im Allgemeinen stattfindet, wenn die Größen y', y', y'', z, z', z'' für den gemeinschaftlichen Punkt der beiden Curven endliche Werthe behalten und für den Krümmungshalbmesser ϱ einen bestimmten Werth geben, unterliegt einigen Ausnahmen. Denn er würde nicht mehr stattfinden, wenn diese Größen, oder einige derselben unendlich würden. Alsdann könnte die durch die Gleichungen (10) gegebenen Werthe von $\xi - x, \eta - y, \zeta - z$ und der Krümmungshalbmesser ϱ für die eine und die andere Curve unter der Form $\frac{\infty}{\infty}$ erscheinen, und nichtsdestoweniger sich bei dem Uebergange von der ersten Curve zur zweiten ändern. Uebrigens ist die hier gemachte Bemerkung nicht blos auf Curven von doppelter, sondern auch auf ebene Curven und folglich auf den Lehrsatz 1 der Vorl. 8 anwendbar. In der That würde dieser Lehrsatz nicht mehr stattfinden, wenn sich die gegebenen Curven auf die Curven (50) in Vorl. 9 reducirten.

Projectionen auf jede der Coordinatenebenen und auch mit ihren Projectionen auf eine beliebige Ebene der Fall ist, weil man z. B. die Ebene der xy mit einer beliebigen, willkührlich im Raume gewählten Ebene zusammenfallen lassen kann.

Ist der Lehrsatz 1 einmal bewiesen, so kann man aus demselben, wenn man, wie in der achten Vorlesung (Seite 94 und 95), schließt, leicht folgenden zweiten Lehrsatz ableiten:

Lehrsatz 2. Wenn zwei Curven von doppelter Krümmung durch zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten x, y, z ausgedrückt sind und man will wissen, ob sich diese beiden Curven in einem gegebenen Punkte osculiren; so braucht man nur entweder eine bestimmte Function der Veränderlichen x, y, z, oder den auf jeder Curve von einem festen Punkte aus gezählten Bogen s zur unabhängigen Veränderlichen zu nehmen und zu untersuchen, ob aus den Gleichungen der beiden Curven für den gegebenen Punkt dieselben Werthe von

$$x,\ y,\ z,\ dx,\ dy,\ dz,\ d^2x,\ d^2y,\ d^2z$$

abgeleitet werden können.

Es verdient bemerkt zu werden, daß sich der Lehrsatz 2 unmittelbar aus den Gleichungen (5) und (6) der sechszehnten Vorlesung, verbunden mit der Gleichung (28) der siebzehnten Vorlesung und mit den Gleichungen (5) auf Seite 250 ergibt, wenn der Bogen s zur unabhängigen Veränderlichen genommen wird.

Wenn man in dem Lehrsatze 1 oder 2 annimmt, daß sich die zweite Curve auf den Kreis reducirt, nach welchen sich die durch die beiden Gleichungen:

$$(74)\quad \begin{cases} (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=\varrho^2, \\ (x-\xi)\cos L+(y-\eta)\cos M+(z-\zeta)\cos N=0 \end{cases}$$

ausgedrückte Kugel und Ebene schneiden, so sind die Bedingungen, welche ausdrücken, daß der Punkt (x, y, z) ein Osculationspunkt ist, zur Bestimmung des Halbmessers des Kreises und der Coordinaten des Mittelpunktes, d. h. der vier Unbekannten ξ, η, ζ und ϱ mit zwei der drei Winkel L, M, N, welche überdies durch die Gleichung:

$$(75)\qquad \cos^2 L+\cos^2 M+\cos^2 N=1$$

mit einander verbunden sind, hinreichend. Denn wenn x zur unabhängigen Veränderlichen genommen wird, so müssen die aus den endlichen Gleichungen der ersten Curve und aus ihren abgeleiteten Gleichungen gezogenen Werthe von y, y', y'', z, z', z'' nach Lehrsatz 1 den endlichen Gleichungen des Kreises und ihren abgeleiteten Gleichungen der ersten und zweiten Ordnung, d. h. den sechs Gleichungen:

$$(76)\quad \begin{cases} (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=\varrho^2, \\ x-\xi+(y-\eta)\,y'+(z-\zeta)\,z'=0, \\ 1+y'^2+z'^2+(y-\eta)\,y''+(z-\zeta)\,z''=0, \end{cases}$$

$$(77)\quad \begin{cases} (x-\xi)\cos L+(y-\eta)\cos M+(z-\zeta)\cos N=0, \\ \cos L+y'\cos M+z'\cos N=0, \\ y''\cos M+z''\cos N=0 \end{cases}$$

genügen. Wenn man aus diesen letzten Gleichungen in Verbindung mit der Gleichung (75) die Werthe der Unbekannten $L, M, N, \xi, \eta, \zeta$ und ϱ ableitet, so erhält man, wie zu erwarten war, die Gleichungen (15) und (29) der siebzehnten Vorlesung und die Gleichungen (10) Seite 251 wieder.

Wenn x nicht mehr zur unabhängigen Veränderlichen genommen würde, so ließen sich die endlichen Gleichungen des Kreises und ihre Differenzialgleichungen der ersten und zweiten Ordnung auf folgende Formen bringen:

$$(78)\quad \begin{cases} (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=\varrho^2, \\ (x-\xi)\,dx+(y-\eta)\,dy+(z-\zeta)\,dz=0, \\ (x-\xi)\,d^2x+(y-\eta)\,d^2y+(z-\zeta)\,d^2z=-ds^2, \end{cases}$$

$$(79)\quad \begin{cases} (x-\xi)\cos L+(y-\eta)\cos M+(z-\zeta)\cos N=0, \\ \cos L\,dx+\cos M\,dy+\cos N\,dz=0, \\ \cos L\,d^2x+\cos M\,d^2y+\cos N\,d^2z=0, \end{cases}$$

und müßten durch die aus den Gleichungen der ersten Curve abgeleiteten Werthen von x, y, z; dx, dy, dz; d^2x, d^2y, d^2z verificirt werden. Es ist wohl zu bemerken, daß die Gleichungen (79) mit den Gleichungen (4) und (16) der siebzehnten Vorlesung und die Gleichungen (78) mit den Gleichungen (11) auf Seite 251 übereinstimmen.

Neunzehnte Vorlesung.

Krümmungshalbmesser der mit Normalebenen in eine krumme Fläche gemachten Schnitte. — Hauptkrümmungshalbmesser. Durchschnitte, deren Krümmungen in dem Falle Null sind, wo die Hauptkrümmungshalbmesser nach entgegengesetztem Sinne gerichtet sind.

Wir wollen eine krumme Fläche betrachten, welche durch die Gleichung:

$$u = 0 \tag{1}$$

ausgedrückt wird, wo u eine Function der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bezeichnet. Wenn man durch einen auf dieser krummen Fläche gegebenen Punkt (x, y, z) eine Normalebene legt, so schneidet diese Ebene die krumme Fläche nach einer gewissen Curve, welche wir einen Normalschnitt nennen wollen. Es sei ϱ der Krümmungshalbmesser dieser Curve für den Punkt (x, y, z) und ξ, η, ζ seien die Coordinaten des entsprechenden Krümmungsmittelpunktes, so hat man:

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = \varrho^2, \tag{2}$$

und da der Krümmungsmittelpunkt offenbar auf der durch den Punkt (x, y, z) der gegebenen krummen Fläche gezogenen Normale liegt, so leisten die Coordinaten ξ, η, ζ nothwendig den Gleichungen der Normale oder der Formel (11) der vierzehnten Vorlesung Genüge, so daß man auch hat:

$$\frac{x-\xi}{\left(\frac{du}{dx}\right)} = \frac{y-\eta}{\left(\frac{du}{dy}\right)} = \frac{z-\zeta}{\left(\frac{du}{dz}\right)}. \tag{3}$$

Nun wollen wir bemerken, daß die Gleichung (2), wenn x, y, z darin allein als veränderlich betrachtet werden, eine der Gleichungen des Krümmungskreises des betrachteten Normalschnittes ist, und daß das Differenzial der zweiten Ordnung dieser Gleichung, nämlich:

$$\left\{\begin{array}{l}(x-\xi)\,d^2x + (y-\eta)\,d^2y + (z-\zeta)\,d^2z + dx^2 \\ + dy^2 + dz^2 = 0\end{array}\right. \tag{4}$$

nach den in der achtzehnten Vorlesung aufgestellten Prinzipien durch die aus den Gleichungen des Normalschnittes abgeleiteten Werthe von x, y, z; dx, dy, dz; d^2x, d^2y, d^2z verificirt werden muß.

Wenn man der Bequemlichkeit wegen den Bogen dieser Curve mit s bezeichnet, so sind die Coordinaten x, y, z derselben mit diesem Bogen durch die Differenzialgleichung:

$$(5) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

verbunden, vermöge welcher die Gleichung (4) auf:

$$(6) \qquad (x-\xi)\,d^2x + (y-\eta)\,d^2y + (z-\zeta)\,d^2z = -ds^2$$

reducirt werden kann. Außerdem ergibt sich aus der Gleichung (1), wenn sie zweimal nach einander differenzirt wird:

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx}d^2x + \dfrac{du}{dy}d^2y + \dfrac{du}{dz}d^2z \\ + \dfrac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \dfrac{d^2u}{dy^2}d \quad + \dfrac{d^2u}{dz^2}dz^2 \\ + 2\dfrac{d^2u}{dydz}dydz + \quad \dfrac{d^2u}{dzdx}dzdx + 2\dfrac{d^2u}{dxdy}dxdy = 0, \end{cases}$$

und wenn man der Kürze wegen:

$$(8) \quad \begin{cases} Q = \\ \dfrac{d^2u}{dx^2}\dfrac{dx^2}{ds^2} + \dfrac{d^2u}{dy^2}\dfrac{dy^2}{ds^2} + \dfrac{d^2u}{dz^2}\dfrac{dz^2}{ds^2} + \\ 2\dfrac{d^2u}{dydz}\dfrac{dy}{ds}\dfrac{dz}{ds} + 2\dfrac{d^2u}{dzdx}\dfrac{dz}{ds}\dfrac{dx}{ds} + 2\dfrac{d^2u}{dxdy}\dfrac{dx}{ds}\dfrac{dy}{ds}, \end{cases}$$

setzt, so reducirt sich die Gleichung (7) auf folgende:

$$(9) \qquad \frac{du}{dx}d^2x + \frac{du}{dy}d^2y + \frac{du}{dz}d^2z = -Q\,ds^2.$$

Wenn man außerdem wie in der vierzehnten Vorlesung:

$$(10) \qquad R = \sqrt{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]}$$

setzt, so ergibt sich aus der Gleichung (3) in Verbindung mit den Gleichungen (2), (5), (9) und (10) leicht:

$$\frac{x-\xi}{\left(\frac{du}{dx}\right)} = \frac{y-\eta}{\left(\frac{du}{dy}\right)} = \frac{z-\zeta}{\left(\frac{du}{dz}\right)} =$$

$$\pm \frac{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]}} = \pm\frac{\varrho}{R}$$

$$= \frac{(x-\xi)\,d^2x + (y-\eta)\,d^2y + (z-\zeta)\,d^2z}{\frac{du}{dx}\,d^2x + \frac{du}{dy}\,d^2y + \frac{du}{dz}\,d^2z} = \frac{1}{Q}.$$

Man hat also:

$$(11) \qquad \frac{x-\xi}{\left(\frac{du}{dx}\right)} = \frac{y-\eta}{\left(\frac{du}{dy}\right)} = \frac{z-\zeta}{\left(\frac{du}{dz}\right)} = \pm\frac{\varrho}{R} = \frac{1}{Q},$$

und folglich:

$$(12) \qquad \frac{1}{\varrho} = \pm\frac{Q}{R}.$$

Es ist wohl zu bemerken, daß R in den Gleichungen (11) und (12) eine bekannte Function der Coordinaten x, y, z bezeichnet. Was die Größe Q betrifft, deren Werth durch die Gleichung (8) bestimmt wird, so kann sie als Function der Coordinaten x, y, z und der Winkel, welche die durch den Punkt (x, y, z) des betrachteten Normalschnittes gezogene Tangente mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet, ausgedrückt werden. Denn bezeichnet man diese Winkel mit α, β, γ, so hat man (s. Vorles. 16):

$$(13) \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

oder vielmehr:

$$(14) \qquad \cos\alpha = -\frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = -\frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = -\frac{dz}{ds},$$

und in beiden Fällen folgt aus der Gleichung (8):

$$(15) \qquad \begin{cases} Q = \frac{d^2u}{dx^2}\cos^2\alpha + \frac{d^2u}{dy^2}\cos^2\beta + \frac{d^2u}{dz^2}\cos^2\gamma \\ + 2\frac{d^2u}{dydz}\cos\beta\cos\gamma + 2\frac{d^2u}{dzdx}\cos\gamma\cos\alpha \\ + 2\frac{d^2u}{dxdy}\cos\alpha\cos\beta. \end{cases}$$

Nun ist aber klar, daß sich der zweite Theil dieser letzten Gleichung auf eine bekannte Function der Veränderlichen $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ reducirt. Wenn nun der Punkt (x, y, z) und die durch diesen Punkt des Normalschnittes der gegebenen krummen Fläche gezogene Tangente gegeben sind, so braucht man sich offenbar nur der Gleichung (12) zu bedienen, um den Krümmungshalbmesser ϱ dieses Normalschnittes zu bestimmen, und der Gleichung (11), um außer dem Krümmungshalbmesser ϱ auch die Coordinaten ξ, η, ζ des Krümmungsmittelpunktes zu bestimmen.

Wenn man von einem Normalschnitte zu einem andern über-

geht, ohne den Punkt (x, y, z) zu verrücken, so verändern die Winkel α, β, γ ihre Werthe und dasselbe ist, wenigstens im Allgemeinen, für die Größe Q und für die davon abhängigen Veränderlichen, nämlich ξ, η, ζ und ϱ der Fall. Wenn die Größe Q bei diesem Uebergange ihr Zeichen verändert, so wird der Krümmungshalbmesser des einen Normalschnittes durch die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{Q}{R}, \tag{16}$$

und der des andern durch die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{Q}{R} \tag{17}$$

bestimmt. Denn da die Größen ϱ und R wesentlich positiv sind, so muß man das doppelte Zeichen $\pm$ des zweiten Theiles der Gleichung (12) auf das Zeichen $+$ reduciren, wenn Q positiv ist und im entgegengesetzten Falle auf das Zeichen $-$. Da anderer Seits die Größen:

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{du}{dz}$$

von den Winkeln α, β, γ unabhängig sind, so kann man behaupten, daß, wenn die Größe Q bei dem Uebergange von dem ersten Normalschnitte zu dem zweiten das Zeichen ändert, dieses mit den Differenzen:

$$x - \xi, \quad y - \eta, \quad z - \zeta$$

ebenfalls der Fall ist. Die Krümmungsmittelpunkte der beiden Normalschnitte liegen also auf der durch den Punkt (x, y, z) der gegebenen Fläche gezogenen Normale auf verschiedenen Seiten dieses Punktes, so daß die Krümmungshalbmesser der beiden Normalschnitte nach entgegengesetztem Sinne gerichtet sind.

Zwischen den Krümmungshalbmessern der verschiedenen, durch denselben Punkt (x, y, z) gehenden Normalschnitte finden bemerkenswerthe Relationen statt. Um diese Relationen zu finden, muß man zunächst das Gesetz suchen, nach welchem sich der durch die Gleichung (12) bestimmte Krümmungshalbmesser ϱ mit den in dem Werthe von Q vorkommenden Winkeln α, β, γ ändert. Man kann dieses Gesetz vermittelst einer geometrischen Construction sehr gut versinnlichen, welche darin besteht, daß man auf der Tangente jedes Normalschnittes von dem Punkte (x, y, z) aus zu beiden Seiten desselben zwei, dem entsprechenden Krümmungshalbmesser, oder einer positiven Potenz desselben gleiche Längen nimmt. Die Curve, welche durch die Endpunkte der auf diese Weise auf den verschiedenen Tangenten genommenen Längen geht, ist offenbar eine in der Berührungsebene der gegebenen krummen Fläche liegende ebene Curve, und da der vom Punkte (x, y, z) nach dieser Curve gezogene Radiusvector mit dem Krümmungshalbmesser des diesen Radiusvector berührenden Normalschnittes zu gleicher Zeit zu- oder abnimmt; so ist

einleuchtend, daß die Natur dieser Curve sehr dazu geeignet ist, das Gesetz anzugeben, nach welchem sich der Krümmungshalbmesser ändert.

In dem besondern Falle, wo die auf jeder Tangente genommene Länge der Quadratwurzel des entsprechenden Krümmungshalbmessers gleich ist, reducirt sich die eben erwähnte Curve auf eine Linie des zweiten Grades. Wir wollen in der That diese Voraussetzung annehmen und durch ξ, η, ζ nicht mehr die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes, sondern die des Endpunktes einer von dem Punkte (x, y, z) aus auf der Tangente, welche mit den Halbaxen der positiven Coordinaten die Winkel α, β, γ bildet, genommenen Länge $= \varrho^{\frac{1}{2}}$ bezeichnen. Wenn der Anfangspunkt der Coordinaten seine ursprüngliche Lage beibehält, so findet man:

$$\xi - x = \varrho^{\frac{1}{2}} \cos\alpha, \quad \eta - y = \varrho^{\frac{1}{2}} \cos\beta, \quad \zeta - z = \varrho^{\frac{1}{2}} \cos\gamma,$$

und wenn man den Anfangspunkt in den Punkt (x, y, z) verlegt:

$$\xi = \varrho^{\frac{1}{2}} \cos\alpha, \quad \eta = \varrho^{\frac{1}{2}} \cos\beta, \quad \zeta = \varrho^{\frac{1}{2}} \cos\gamma. \tag{18}$$

Aus der Gleichung (12) folgt überdies:

$$Q\varrho = \pm R,$$

und wenn man für Q seinen Werth wieder setzt, welchen die Gleichung (15) gibt:

$$\varrho \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2u}{dx^2}\cos^2\alpha + \dfrac{d^2u}{dy^2}\cos^2\beta + \dfrac{d^2u}{dz^2}\cos^2\gamma \\ + 2\dfrac{d^2u}{dydz}\cos\beta\cos\gamma + 2\dfrac{d^2u}{dzdx}\cos\gamma\cos\alpha \\ + 2\dfrac{d^2u}{dxdy}\cos\alpha\cos\beta \end{array} \right\} = \pm R. \tag{19}$$

Also erhält man endlich, wenn man die Gleichungen (18) berücksichtigt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2u}{dx^2}\xi^2 + \dfrac{d^2u}{dy^2}\eta^2 + \dfrac{d^2u}{dz^2}\zeta^2 + \\ 2\dfrac{d^2u}{dydz}\eta\zeta + 2\dfrac{d^2u}{dzdx}\zeta\xi + 2\dfrac{d^2u}{dxdy}\xi\eta = \pm R. \end{array} \right. \tag{20}$$

Diese letzte Gleichung drückt, wenn man darin ξ, η, ζ allein als veränderlich betrachtet, eine krumme Fläche des zweiten Grades aus, worin die oben erwähnte ebene Curve liegt. Zu bemerken ist, daß diese Fläche den neuen Anfangspunkt, d. h. den Punkt (x, y, z) zum Mittelpunkte hat, und da die Ebene der Curve ebenfalls durch denselben Punkt geht, so ist man zu dem Schlusse berechtigt, daß sich die in Rede stehende Curve auf eine Linie des zweiten Grades reducirt, welche den Punkt x, y, z ebenfalls zum Mittelpunkte hat. Um die beiden Gleichungen dieser Linie zu er-

halten, braucht man mit der Gleichung (20) nur die zu verbinden, welche die durch den Punkt (x, y, z) an die gegebene Fläche gelegte Berührungsebene ausdrückt, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten in diesen Punkt verlegt, d. h. die Gleichung:

$$(21) \qquad \xi \frac{du}{dx} + \eta \frac{du}{dy} + \zeta \frac{du}{dz} = 0,$$

welche sich aus der Gleichung (2) in Vorles. 14 ergibt, wenn man $\xi + x, \eta + y, \zeta + z$ für ξ, η, ζ setzt. Man könnte die Gleichung (21) auch erhalten, wenn man bemerkt, daß das Differenzial der Gleichung (1), nämlich:

$$(22) \qquad \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz = 0$$

sich vermöge der Gleichungen (13) oder (14) auf:

$$(23) \qquad \frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\beta + \frac{du}{dz}\cos\gamma = 0$$

reducirt und aus dieser letzten Gleichung vermittelst der Gleichungen (18) die drei Winkel α, β, γ eliminirt. Wenn man endlich die Winkel, welche die durch den Punkt (x, y, z) der gegebenen Fläche gezogene Normale mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet, mit λ, μ, ν bezeichnet, so hat man:

$$(24) \qquad \frac{\cos\lambda}{\left(\frac{du}{dx}\right)} = \frac{\cos\mu}{\left(\frac{du}{dy}\right)} = \frac{\cos\nu}{\left(\frac{du}{dz}\right)}$$

und folglich kann die Gleichung (21) auf die Form gebracht werden:

$$(25) \qquad \xi\cos\lambda + \eta\cos\mu + \zeta\cos\nu = 0.$$

Nun wollen wir bemerken, daß die Gleichungen (20) und (25) den Gleichungen (1) und (2) der funfzehnten Vorles. ganz ähnlich sind, aus welchen sie abgeleitet werden, wenn man die Coordinaten ξ, η, ζ für x, y, z und die Größen:

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dy^2}, \quad \frac{d^2u}{dz^2}, \quad \frac{d^2u}{dydz}, \quad \frac{d^2u}{dzdx}, \quad \frac{d^2u}{dxdy}, \quad \pm R$$

für die Coefficienten:

$$A, B, C, D, E, F, K$$

setzt. Nun folgt aber aus den in der funfzehnten Vorlesung auseinandergesetzten Prinzipien, daß sich die durch das System der Gleichungen (20) und (25) ausgedrückte Linie im Allgemeinen auf eine Ellipse, oder auf ein System zwei conjugirter Hyperbeln reducirt; aber daß sie sich in gewissen besondern Fällen auch in einen

Kreis, oder in einen einzigen Punkt, oder in ein System zweier von dem Punkte (x, y, z) gleich weit entfernter Parallelen, oder endlich auch in ein System zweier durch diesen Punkt gezogener Geraden verwandeln kann. Derselbe Schluß ergibt sich auch aus der Form, welche die Gleichung (20) annimmt, wenn die Ebene der xy zu der durch den Punkt (x, y, z) gelegten Berührungsebene parallel ist. Denn alsdann reducirt sich die Gleichung (21) oder (25) auf:

$$\zeta = 0, \tag{26}$$

und wenn man diese mit der Gleichung (20) verbindet, so findet man als die Gleichung der eben erwähnten Linie:

$$\frac{d^2u}{dx^2}\xi^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}\xi\eta + \frac{d^2u}{dy^2}\eta^2 = \pm R. \tag{27}$$

Nun überzeugt man sich aber leicht, daß die Gleichung (27) eine Ellipse ausdrückt, wenn die Differenz:

$$\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 \tag{28}$$

positiv ist, zwei conjugirte Hyperbeln, wenn diese Differenz negativ wird und zwei parallele Gerade, wenn sich diese Differenz auf Null reducirt. Die Ellipse verwandelt sich ferner in einen Kreis, wenn

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dy^2}, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = 0 \tag{29}$$

ist, und wenn die Bedingung:

$$R = 0 \tag{30}$$

erfüllt wird, so wird die Ellipse auf den Punkt (x, y, z), oder die beiden Hyperbeln auf die durch diesen Punkt gezogenen beiden Geraden reducirt. Da man überdies die Ebene der xy willkührlich wählen kann, so ist die eben angestellte Betrachtung offenbar auf alle Punkte der gegebenen Fläche anwendbar.

Soll sich die Gleichung (21), wie wir eben vorausgesetzt haben, auf die Gleichung (26) reduciren, so ist erforderlich, daß von den drei Größen:

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{du}{dz}$$

die beiden ersten verschwinden, oder daß die dritte unendlich wird. Im ersten Falle findet man:

$$R = \pm\frac{du}{dz} \tag{31}$$

und die Gleichung (27) verwandelt sich in:

$$(32) \qquad \frac{d^2u}{dx^2}\xi^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}\xi\eta + \frac{d^2u}{dy^2}\eta^2 = \pm\frac{du}{dz}.$$

Es ist wohl zu bemerken, daß für jeden Normalschnitt die Coordinaten ξ, η des Endpunktes der Länge $\rho^{\frac{1}{2}}$ immer eine der beiden Gleichungen:

$$(33) \qquad \frac{d^2u}{dx^2}\xi^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}\xi\eta + \frac{d^2u}{dy^2}\eta^2 = R,$$

$$(34) \qquad \frac{d^2u}{dx^2}\xi^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}\xi\eta + \frac{d^2u}{dy^2}\eta^2 = -R,$$

welche beide in der Formel (27) enthalten sind und wovon die erste der Gleichung (16) und die zweite der Gleichung (17) entspricht, verificiren. Wenn also der erste Theil der Gleichung (27) beim Uebergange von einem Normalschnitte zum andern das Zeichen verändert, so muß man die Gleichungen (34) und (17) für die Gleichungen (33) und (16) substituiren, oder umgekehrt, und folglich sind die Krümmungshalbmesser dieser beiden Normalschnitte nach entgegengesetztem Sinne gerichtet. Uebrigens kann dieses nur in dem Falle geschehen, wo die Differenz (28) negativ ist, d. h. wenn die Gleichung (27) ein System zwei conjugirter Hyperbeln ausdrückt. Alsdann theilt die Berührungsebene der gegebenen Fläche letztere in zwei Theile, wovon der eine die Normalschnitte enthält, deren Krümmungshalbmesser nach einem gewissen Sinne gerichtet ist, während der andere die Normalschnitte enthält, deren Krümmungshalbmesser nach entgegengesetztem Sinne gerichtet ist. Wenn dagegen die Gleichung (27) eine Ellipse ausdrückt, so reducirt sich diese Gleichung für alle Normalschnitte auf eine der Gleichungen (33), (34). Folglich sind alsdann die Krümmungen aller Normalschnitte nach demselben Sinne gekehrt, was voraussetzt, daß die krumme Fläche ganz auf derselben Seite der Berührungsebene liegt.

Da der Krümmungshalbmesser ρ eines Normalschnittes das Quadrat des von dem Punkte (x, y, z) nach der Linie (27) gezogenen Radiusvectors $\sqrt{(\xi^2+\eta^2)}$ ist, so kann man behaupten, daß jede der beiden Normalebenen, welche durch die beiden Axen dieser Linie gehen, einen Normalschnitt gibt, dessen Krümmungshalbmesser ein Maximum oder Minimum ist. Diese beiden Normalschnitte und ihre Krümmungshalbmesser wollen wir Hauptschnitte und Hauptkrümmungshalbmesser nennen. Hiernach ist klar, daß sich die Ebenen der Hauptschnitte immer unter rechten Winkeln schneiden und daß die Hauptkrümmungshalbmesser nach demselben Sinne gerichtet sind, wenn die Linie (27) eine Ellipse ist, aber nach entgegengesetztem Sinne, wenn sich diese Linie in ein System zwei conjugirter Hyperbeln verwandelt. Diese Krümmungshalbmesser drücken ferner im ersten Falle einen kleinsten und einen größten Werth der Veränderlichen ρ aus, und im zweiten Falle zwei kleinste Werthe derselben Veränderlichen, d. h. wenn die Linie

(27) eine Ellipse ist, so sind die Hauptschnitte Normalschnitte von der größten und kleinsten Krümmung. Aber wenn die Gleichung (27) zwei Hyperbeln angehört, so sind die Hauptschnitte beider Normalschnitte von der größten Krümmung, nur sind ihre Krümmungen nach entgegengesetztem Sinne gekehrt. In derselben Voraussetzung haben die Normalschnitte, in deren Ebenen die gemeinschaftlichen Asymptoten beider Hyperbeln liegen, offenbar Krümmungen gleich Null, welche unendlichen Werthen von ϱ entsprechen. Folglich bilden die beiden Schnitte, deren Krümmungen verschwinden, mit den Ebenen der Hauptschnitte gleiche Winkel.

Wenn die Differenz (28) positiv ist und die Bedingungen (29) erfüllt werden, so verwandelt sich die durch die Gleichung (27) ausgedrückte Ellipse, wie gesagt, in einen Kreis. Da alsdann alle Normalschnitte gleiche Krümmungen haben, so kann man jede zwei Normalschnitte, deren Ebenen sich unter rechten Winkeln schneiden, Hauptschnitte nennen.

Wenn die Differenz (28) Null ist, so reducirt sich die Linie (27) auf ein System zwei paralleler Geraden, welche man als eine Ellipse darstellend betrachten kann, deren große Axe unendlich geworden ist. Folglich entsprechen alsdann die Hauptschnitte einem kleinsten und einem unendlichen Werthe von ϱ, so daß die Krümmung eines dieser beiden Schnitte Null ist.

Wenn die Größe R verschwände, so wären die Krümmungshalbmesser aller Normalschnitte Null oder unendlich.

Zwischen den Hauptkrümmungshalbmessern und den Krümmungshalbmessern zweier Normalschnitte, deren Ebenen sich unter rechten Winkeln schneiden, findet eine Relation statt, welche sich leicht aus den Lehrsätzen 1 und 2 der funfzehnten Vorlesung ableiten läßt. Denn wenn man für die Curven, wovon in diesen Lehrsätzen die Rede ist, die Linie (27) setzt, so verwandeln sich die Quadrate der, nach diesen Curven gezogenen Radienvectoren in die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte der gegebenen krummen Fläche und man wird offenbar auf folgenden Lehrsatz geführt:

Lehrsatz. Wenn man durch einen Punkt (x, y, z) einer krummen Fläche zwei auf einander senkrechte Normalebenen legt und man dividirt die Einheit successive durch den Krümmungshalbmesser jeder der beiden Durchschnittslinien, so ist die Summe der Quotienten eine constante Größe, wofern man in dieser Summe die vom Punkte (x, y, z) aus nach einem gewissen Sinne gerichteten Radienvectoren mit dem Zeichen + und die nach entgegengesetztem Sinne gerichteten Radienvectoren mit dem Zeichen — nimmt. Folglich ist die in Rede stehende Summe, abgesehen vom Zeichen, der Summe oder Differenz der Quotienten aus der Einheit und den Hauptkrümmungshalbmessern gleich.

Auch die zwischen dem Krümmungshalbmesser eines beliebigen Normalschnittes und den Winkeln, welche die Ebene desselben mit den Ebenen der Hauptschnitte bildet, stattfindende Relation läßt sich

leicht finden. Zu dem Zwecke wollen wir zunächst bemerken, daß in dem Falle, wo die Berührungsebene der gegebenen krummen Fläche durch die Gleichung (26) ausgedrückt und zu der Ebene der xy parallel wird, für die Tangente jedes Normalschnittes

$$(35) \quad \cos\gamma = 0, \qquad (36) \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$$

ist. Folglich ergibt sich aus der Gleichung (15):

$$(37) \quad Q = \frac{d^2u}{dx^2}\cos^2\alpha + 2\frac{d^2u}{dxdy}\cos\alpha\cos\beta + \frac{d^2u}{dy^2}\cos^2\beta.$$

Der vorhergehende Werth von Q wird noch einfacher, wenn man die Ebene der xz und der yz zu den Ebenen der Hauptschnitte parallel annimmt. Denn da alsdann die Gleichung (27) eine, auf ihre Axen bezogene Linie des zweiten Grades ausdrückt, so kann sie das Product der Coordinaten ξ, η nicht mehr enthalten und muß sich auf:

$$(38) \quad \frac{d^2u}{dx^2}\xi^2 + \frac{d^2u}{dy^2}\eta^2 = \pm R$$

reduciren. Man hat folglich:

$$(39) \quad \frac{d^2u}{dxdy} = 0.$$

Nun verwandelt sich aber die Gleichung (37) in Folge dieser letzten Bedingung in:

$$(40) \quad Q = \frac{d^2u}{dx^2}\cos^2\alpha + \frac{d^2u}{dy^2}\cos^2\beta,$$

und da überdies aus der Gleichung (36):

$$\cos^2\beta = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$$

folgt, so kann folglich die Gleichung (40) folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$(41) \quad Q = \frac{d^2u}{dx^2}\cos^2\alpha + \frac{d^2u}{dy^2}\sin^2\alpha.$$

Hiernach gibt die Gleichung (12):

$$(42) \quad \frac{1}{\varrho} = \pm\frac{1}{R}\left[\frac{d^2u}{dx^2}\cos^2\alpha + \frac{d^2u}{dy^2}\sin^2\alpha\right].$$

Es seien nun ϱ_0, ϱ_1 die Hauptkrümmungshalbmesser. Da man, um sie zu erhalten, in der Gleichung (42) nur successive $\alpha = 0$ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ zu setzen braucht, so erhält man:

(43) $$\frac{1}{\varrho_0} = \pm \frac{1}{R} \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad \frac{1}{\varrho_1} = \pm \frac{1}{R} \frac{d^2 u}{dy^2};$$

und folglich verwandelt sich die Gleichung (42) in:

(44) $$\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{1}{\varrho_0} \cos^2 \alpha \pm \frac{1}{\varrho_1} \sin^2 \alpha.$$

Es ist wohl zu bemerken, daß die Größen $\frac{d^2 u}{dx^2}$, $\frac{d^2 u}{dy^2}$ dasselbe Zeichen haben, wenn die Gleichung (38) eine Ellipse ausdrückt und entgegengesetzte Zeichen, wenn dieselbe Gleichung zwei conjugirte Hyperbeln ausdrückt. Hieraus folgt unmittelbar, daß sich die Gleichung (44) im ersten Falle auf:

(45) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0} \cos^2 \alpha + \frac{1}{\varrho_1} \sin^2 \alpha,$$

und im zweiten Falle auf:

(46) $$\pm \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0} \cos^2 \alpha - \frac{1}{\varrho_1} \sin^2 \alpha$$

reducirt, wo der erste Theil das Zeichen + oder — bekommen muß, jenachdem die beiden Krümmungshalbmesser ϱ, ϱ_0 oder ϱ, ϱ_1 nach einerlei, oder nach entgegengesetztem Sinne gerichtet sind. Wenn die abgeleiteten Functionen $\frac{d^2 u}{dx^2}$, $\frac{d^2 u}{dy^2}$ einander gleich werden, so ist die Curve (38) ein Kreis. Alsdann ist zugleich $\varrho_1 = \varrho_0$ und die Gleichung (45) gibt, wie zu erwarten war, $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0}$ oder $\varrho = \varrho_0$.

Wenn eine der Größen $\frac{d^2 u}{dx^2}$, $\frac{d^2 u}{dy^2}$ verschwindet, so reducirt sich die Linie (38) auf ein System zwei paralleler Geraden. Alsdann wird einer der Krümmungshalbmesser ϱ_0, ϱ_1 unendlich und verschwindet aus der Gleichung (44). Wenn man, um die Begriffe zu fixiren, $\frac{d^2 u}{dy^2} = 0$ setzt, so hat man $\varrho_1 = \infty$, und die Gleichung (44) gibt:

(47) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0} \cos^2 \alpha.$$

Alsdann ist ϱ_0 der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes, welcher das durch den Punkt (x, y, z) auf die beiden Parallelen gezogene Perpendikel zur Tangente hat.

Wenn man zu dem Werthe von $\frac{1}{\varrho}$, welchen die Gleichung (44) gibt, die Größe addirt, in welche sich dieser Werth verwandelt, wenn man darin $\alpha + \frac{\pi}{2}$ für α setzt, so erhält man zur Summe:

$$\pm\frac{1}{\varrho_0}\pm\frac{1}{\varrho_1},$$

was mit dem Lehrſatze auf S. 276 übereinſtimmt.

Geſetzt nun, man wollte für einen Punkt (x, y, z) der gegebenen krummen Fläche die Richtungen der Tangenten an den Hauptſchnitten und die Hauptkrümmungshalbmeſſer beſtimmen, ſo iſt es offenbar hinreichend, das Maximum und Minimum, oder die beiden Minima des Krümmungshalbmeſſers:

$$\varrho^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \tag{48}$$

zu ſuchen, indem man die Coordinaten ξ, η, ζ als durch die Gleichungen (20) und (21) mit einander verbunden annimmt. Es ergibt ſich alſo, daß die den Hauptkrümmungshalbmeſſern entſprechenden Werthe von ξ, η, ζ der Gleichung:

$$\xi d\xi+\eta d\eta+\zeta d\zeta=0 \tag{49}$$

genügen müſſen, nachdem man $d\xi, d\eta$ und $d\zeta$ vermittelſt der Differenzialgleichungen:

$$\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{d^2u}{dx^2}\xi+\frac{d^2u}{dxdy}\eta+\frac{d^2u}{dxdz}\zeta\right)d\xi+\\&\left(\frac{d^2u}{dxdy}\xi+\frac{d^2u}{dy^2}\eta+\frac{d^2u}{dydz}\zeta\right)d\eta+\\&\left(\frac{d^2u}{dxdz}\xi+\frac{d^2u}{dydz}\eta+\frac{d^2u}{dz^2}\zeta\right)d\zeta=0,\end{aligned}\right. \tag{50}$$

$$\frac{du}{dx}d\xi+\frac{du}{dy}d\eta+\frac{du}{dz}d\zeta=0 \tag{51}$$

aus derſelben eliminirt hat. Wenn man nun die Gleichungen (49), (50) und (51), nachdem man die erſte und dritte durch die unbeſtimmten Factoren $-S, -T$ multiplicirt hat, zuſammenaddirt; ſo ergibt ſich, wenn man, wie in der funfzehnten Vorleſung (S. 214), ſchließt, daß man dieſe Factoren ſo wählen kann, daß in der reſultirenden Gleichung die Coefficienten der Differenziale $d\xi, d\eta, d\zeta$ verſchwinden, d. h. ſo, daß den drei Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx^2}\xi+\frac{d^2u}{dxdy}\eta+\frac{d^2u}{dxdz}\zeta&=S\xi+T\frac{du}{dx},\\\frac{d^2u}{dxdy}\xi+\frac{d^2u}{dy^2}\eta+\frac{d^2u}{dydz}\zeta&=S\eta+T\frac{du}{dy},\\\frac{d^2u}{dxdz}\xi+\frac{d^2u}{dydz}\eta+\frac{d^2u}{dz^2}\zeta&=S\zeta+T\frac{du}{dz}\end{aligned}\right. \tag{52}$$

Genüge geſchieht.

Wenn man dieſe letzten Gleichungen zuſammenaddirt, nachdem

man sie resp. durch die Coordinaten ξ, η, ζ multiplicirt hat und dann die Gleichungen (20), (21) und (48) berücksichtigt; so findet man:

$$(53) \qquad \pm R = SQ, \quad S = \frac{\pm R}{Q} = Q.$$

Der Factor S ist also von der im Vorhergehenden durch den Buchstaben Q bezeichneten Größe nicht verschieden. Man kann also statt der Gleichungen (52) die folgenden setzen:

$$(54) \quad \begin{cases} \left(\frac{d^2u}{dx^2} - Q\right)\xi + \frac{d^2u}{dxdy}\eta + \frac{d^2u}{dxdz}\zeta = T\frac{du}{dx}, \\ \frac{d^2u}{dxdy}\xi + \left(\frac{d^2u}{dy^2} - Q\right)\eta + \frac{d^2u}{dydz}\zeta = T\frac{du}{dy}, \\ \frac{d^2u}{dxdz}\xi + \frac{d^2u}{dydz}\eta + \left(\frac{d^2u}{dz^2} - Q\right)\zeta = T\frac{du}{dz}, \end{cases}$$

und hieraus folgt:

$$(55) \quad \xi = s\begin{Bmatrix} \frac{du}{dx}\left[\left(\frac{d^2u}{dy^2} - Q\right)\left(\frac{d^2u}{dz^2} - Q\right) - \left(\frac{d^2u}{dydz}\right)^2\right] \\ + \frac{du}{dy}\left[\frac{d^2u}{dzdx}\frac{d^2u}{dydz} - \left(\frac{d^2u}{dz^2} - Q\right)\frac{d^2u}{dxdy}\right] \\ + \frac{du}{dz}\left[\frac{d^2u}{dydz}\frac{d^2u}{dxdy} - \left(\frac{d^2u}{dy^2} - Q\right)\frac{d^2u}{dzdx}\right] \end{Bmatrix},$$

$$(56) \quad \eta = s\begin{Bmatrix} \frac{du}{dx}\left[\frac{d^2u}{dzdx}\frac{d^2u}{dydx} - \left(\frac{d^2u}{dz^2} - Q\right)\frac{d^2u}{dxdy}\right] \\ + \frac{du}{dy}\left[\left(\frac{d^2u}{dz^2} - Q\right)\left(\frac{d^2u}{dx^2} - Q\right) - \left(\frac{d^2u}{dzdx}\right)^2\right] \\ + \frac{du}{dz}\left[\frac{d^2u}{dxdy}\frac{d^2u}{dzdx} - \left(\frac{d^2u}{dx^2} - Q\right)\frac{d^2u}{dydz}\right] \end{Bmatrix},$$

$$(57) \quad \zeta = s\begin{Bmatrix} \frac{du}{dx}\left[\frac{d^2u}{dydz}\frac{d^2u}{dxdy} - \left(\frac{d^2u}{dy^2} - Q\right)\frac{d^2u}{dzdx}\right] \\ + \frac{du}{dy}\left[\frac{d^2u}{dxdy}\frac{d^2u}{dzdx} - \left(\frac{d^2u}{dx^2} - Q\right)\frac{d^2u}{dydz}\right] \\ + \frac{du}{dz}\left[\left(\frac{d^2u}{dx^2} - Q\right)\left(\frac{d^2u}{dy^2} - Q\right) - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2\right] \end{Bmatrix},$$

wo s einen Coefficienten bezeichnet, dessen Werth sich aus der Gleichung (48) ergibt. Denn wenn man diese mit den Gleichungen (55), (56) und (57) verbindet, so ergibt sich:

$$(58) \qquad u = \pm \frac{\varrho^{\frac{1}{2}}}{U^2},$$

wo U^2 die Summe der Quadrate der Coefficienten von u in den, durch die drei erwähnten Gleichungen gegebenen Werthen von ξ, η, ζ bezeichnet. Ferner gibt die Substitution dieser Werthe in die Gleichung (21) folgende:

$$(50) \qquad 0 =$$
$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2\left[\left(\frac{d^2u}{dy^2}-Q\right)\left(\frac{d^2u}{dz^2}-Q\right)-\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)^2\right]+$$
$$\left(\frac{du}{dy}\right)^2\left[\left(\frac{d^2u}{dz^2}-Q\right)\left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right)-\left(\frac{d^2u}{dzdx}\right)^2\right]+$$
$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2\left[\left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right)\left(\frac{d^2u}{dy^2}-Q\right)-\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2\right]+$$
$$2\frac{du}{dy}\frac{du}{dz}\left[\frac{d^2u}{dxdy}\frac{d^2u}{dzdx}-\frac{d^2u}{dydz}\left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right)\right]+$$
$$2\frac{du}{dz}\frac{du}{dx}\left[\frac{d^2u}{dydz}\frac{d^2u}{dxdy}-\frac{d^2u}{dzdx}\left(\frac{d^2u}{dy^2}-Q\right)\right]+$$
$$2\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}\left[\frac{d^2u}{dzdx}\frac{d^2u}{dydz}-\frac{d^2u}{dxdy}\left(\frac{d^2u}{dz^2}-Q\right)\right],$$

welche in Beziehung auf Q vom zweiten Grade ist und deren beide Wurzeln die beiden, den Hauptkrümmungshalbmessern entsprechenden Werthe von Q sind. Wenn man diese Wurzeln für einen Punkt (x, y, z) der gegebenen krummen Fläche berechnet hat, so gibt die Gleichung (53) unmittelbar die Werthe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser und aus den Gleichungen (55), (56), (57) und (58) ergeben sich die Coordinaten ξ, η, ζ von vier, auf den Tangenten der Hauptschnitte liegenden Punkten. Wenn man endlich die Gleichungen (55), (56), (57) und (58) mit den Gleichungen (18) verbindet, so erhält man die folgenden:

$$(60) \quad \cos\alpha = \pm\frac{1}{U}\left\{\begin{array}{l} \frac{du}{dx}\left[\left(\frac{d^2u}{dy^2}-Q\right)\left(\frac{d^2u}{dz^2}-Q\right)-\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)^2\right] \\ +\frac{du}{dy}\left(\frac{d^2u}{dzdx}\frac{d^2u}{dydz}-\left(\frac{d^2u}{dz^2}-Q\right)\frac{d^2u}{dxdy}\right] \\ +\frac{du}{dz}\left[\frac{d^2u}{dydz}\frac{d^2u}{dxdy}-\left(\frac{d^2u}{dy^2}-Q\right)\frac{d^2u}{dzdx}\right] \end{array}\right\},$$

$$(61)\quad \cos\beta = \pm\frac{1}{U}\left\{\begin{array}{l} \frac{du}{dx}\left[\frac{d^2u}{dzdx}\frac{d^2u}{dydz} - \left(\frac{d^2u}{dz^2}-Q\right)\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\right] \\ +\frac{du}{dy}\left[\left(\frac{d^2u}{dz^2}-Q\right)\left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right) - \left(\frac{d^2u}{dzdx}\right)^2\right] \\ +\frac{du}{dz}\left[\frac{d^2u}{dxdy}\frac{d^2u}{dzdx} - \left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right)\frac{d^2u}{dydz}\right] \end{array}\right\},$$

$$(62)\quad \cos\gamma = \pm\frac{1}{U}\left\{\begin{array}{l} \frac{du}{dx}\left[\frac{d^2u}{dydz}\frac{d^2u}{dxdy} - \left(\frac{d^2u}{dy^2}-Q\right)\frac{d^2u}{dxdx}\right] \\ +\frac{du}{dy}\left[\frac{d^2u}{dxdy}\frac{d^2u}{dzdx} - \left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right)\frac{d^2u}{dydz}\right] \\ +\frac{du}{dz}\left[\left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right)\left(\frac{d^2u}{dy^2}-Q\right) - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2\right] \end{array}\right\},$$

welche zur Bestimmung der Winkel α, β, γ dienen, die die Tangenten der Hauptschnitte mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bilden. Es ist wohl zu bemerken, daß in jeder der drei Gleichungen (60), (61) und (62) das doppelte Zeichen $\pm$ auf das Zeichen $+$ reducirt werden muß, wenn die Tangente an einem der Hauptschnitte nach einem gewissen Sinne verlängert ist, und auf das Zeichen $-$, wenn dieselbe Tangente nach entgegengesetztem Sinne verlängert ist.

Die Gleichung (59) ist also der Gleichung (115) in Vorl. 15 ähnlich, woraus sie abgeleitet wird, wenn man für die Größen

$$\cos\lambda,\ \cos\mu,\ \cos\nu;\ A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F \text{ und } s$$

die Größen:

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}; \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dy^2}, \frac{d^2u}{dz^2}; \frac{d^2u}{dydz}, \frac{d^2u}{dzdx}, \frac{d^2u}{dxdy} \text{ und } Q$$

setzt. Wenn die Veränderlichen x, y, z in der Gleichung (1) getrennt sind, d. h. wenn die Function u aus drei Theilen besteht, wovon jeder nur eine dieser Veränderlichen enthält; so hat man für alle Punkte der gegebenen krummen Fläche:

$$(63)\qquad \frac{d^2u}{dydz}=0,\ \frac{d^2u}{dzdx}=0,\ \frac{d^2u}{dxdy}=0.$$

Alsdann verwandeln sich die Gleichungen (54) in:

$$(64)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right)\xi = T\frac{du}{dx}, \left(\frac{d^2u}{dy^2}-Q\right)\eta = T\frac{du}{dy}, \\ \left(\frac{d^2u}{dz^2}-Q\right)\zeta = T\frac{du}{dz}, \end{array}\right.$$

und wenn man die aus diesen Gleichungen abgeleiteten Werthe von ξ, η, ζ in die Gleichung (21) substituirt, so erhält man die folgende:

$$(65)\quad \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^2}{\frac{d^2u}{dx^2}-Q}+\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)^2}{\frac{d^2u}{dy^2}-Q}+\frac{\left(\frac{du}{dz}\right)^2}{\frac{d^2u}{dz^2}-Q}=0.$$

In derselben Voraussetzung ergibt sich aus den Gleichungen (64) verbunden mit der Gleichung (48):

$$(66)\quad T=\pm\varrho^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\left\{\left(\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{d^2u}{dx^2}-Q}\right)^2+\left(\frac{\frac{du}{dy}}{\frac{d^2u}{dy^2}-Q}\right)^2+\left(\frac{\frac{du}{dz}}{\frac{d^2u}{dz^2}-Q}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

und wenn man die Gleichungen (18) berücksichtigt, so findet man:

$$(67)\quad \begin{cases} \frac{\left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right)\cos\alpha}{\frac{du}{dx}}=\frac{\left(\frac{d^2u}{dy^2}-Q\right)\cos\beta}{\frac{du}{dy}}=\frac{\left(\frac{d^2u}{dz^2}-Q\right)\cos\gamma}{\frac{du}{dz}} \\ =\pm\left\{\left(\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{d^2u}{dx^2}-Q}\right)^2+\left(\frac{\frac{du}{dy}}{\frac{d^2u}{dy^2}-Q}\right)^2+\left(\frac{\frac{du}{dz}}{\frac{d^2u}{dz^2}-Q}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Man braucht nur diese letzte Gleichung mit den Gleichungen (12) und (65) zu verbinden, um die Richtungen der Tangenten der Hauptschnitte und die Hauptkrümmungshalbmesser in der gemachten Voraussetzung zu bestimmen.

Wir wollen nun die bisher abgeleiteten Formeln auf einige Beispiele anwenden.

Beispiel 1. Gesetzt die gegebene krumme Fläche reducirte sich auf die des Ellipsoides, welches durch die Gleichung:

$$(68)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ausgedrückt wird, so kann man setzen:

$$u=\tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

und man hat folglich:

$$\frac{du}{dx}=\frac{x}{a^2},\quad \frac{du}{dy}=\frac{y}{b^2},\quad \frac{du}{dz}=\frac{z}{c^2},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{a^2},\quad \frac{d^2u}{dy^2}=\frac{1}{b^2},\quad \frac{d^2u}{dz^2}=\frac{1}{c^2}.$$

Demnach verwandeln sich die Gleichungen (65), (12) und (67) resp. in:

$$(69)\qquad \frac{x^2}{a^2(1-Qa^2)}+\frac{y^2}{b^2(1-Qb^2)}+\frac{z^2}{c^2(1-Qc^2)}=0,$$

$$(70)\qquad \frac{1}{\varrho}=\pm Q\left[\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$(71)\qquad \begin{cases}\dfrac{(1-Qa^2)\cos\alpha}{x}=\dfrac{(1-Qb^2)\cos\beta}{y}=\dfrac{(1-Qc^2)\cos\gamma}{z}\\ =\pm\left[\left(\dfrac{x}{1-Qa^2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{1-Qb^2}\right)^2+\left(\dfrac{z}{1-Qc^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.\end{cases}$$

Diese letzten Gleichungen sind zur Bestimmung der Richtungen der Tangenten der Hauptschnitte und der Hauptkrümmungshalbmesser für jeden Punkt des Ellipsoides hinreichend. Zieht man ferner die Gleichung (69) von der Gleichung (68) ab, so findet man:

$$(72)\qquad \frac{x^2}{a^2-\frac{1}{Q}}+\frac{y^2}{b^2-\frac{1}{Q}}+\frac{z^2}{c^2-\frac{1}{Q}}=1.$$

Nun folgt aber aus der Gleichung (72), daß, wenn man, nachdem einer der größten oder kleinsten Werthe der Veränderlichen Q berechnet ist, ein neues Ellipsoid construit, dessen Halbaxen a', b', c' durch die Gleichungen:

$$(73)\qquad a'^2=a^2-\frac{1}{Q},\quad b'^2=b^2-\frac{1}{Q},\quad c'^2=c^2-\frac{1}{Q}$$

bestimmt werden, dieses zweite Ellipsoid ebenfalls durch den Punkt (x, y, z) geht. Bemerken wollen wir noch, daß die Durchschnitte des gegebenen und des neuen Ellipsoides mit den Coordinatenebenen aus denselben Brennpunkten beschrieben sind. Denn es ist:

$$(74)\qquad \begin{cases}a'^2-b'^2=a^2-b^2,\ a'^2-c'^2=a^2-c^2,\\ b'^2-c'^2=b^2-c^2.\end{cases}$$

Beispiel 2. Wir wollen nun annehmen, daß man, nachdem in der Ebene der xy eine durch die Gleichung:

$$(75)\qquad y=f(x)$$

ausgedrückte Curve beschrieben ist, diese Curve sich um die Axe der x drehen lasse, so erzeugt sie eine Rotationsfläche, in welcher die Entfernung des Punktes (x, y, z) von der Axe der x, nämlich $\sqrt{(y^2+z^2)}$, abgesehen vom Zeichen, der Ordinate $f(x)$ der Erzeugungscurve gleich ist. Man hat also für alle Punkte der krummen Fläche:

$$(76) \qquad \sqrt{(y^2+z^2)} = \pm f(x), \text{ oder } y^2+z^2 = [f(x)]^2$$

und man kann setzen:

$$u = \tfrac{1}{2}\{y^2+z^2-[f(x)]^2\}.$$

Man findet folglich:

$$\frac{du}{dx} = -f(x)f'(x), \quad \frac{du}{dy} = y, \quad \frac{du}{dz} = z,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\{[f'(x)]^2 + f(x).f''(x)\},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = 1, \quad \frac{d^2u}{dz^2} = 1.$$

Demnach ergibt sich aus der Gleichung (65):

$$\frac{[f(x).f'(x)]^2}{Q+[f'(x)]^2+f(x)f''(x)} + \frac{y^2+z^2}{Q-1} = 0,$$

und wenn man für y^2+z^2 seinen Werth $[f(x)]^2$ wieder setzt, so folgt:

$$(77) \qquad Q = -\frac{f(x)f''(x)}{1+[f'(x)]^2}.$$

Ueberdies hat man:

$$(78) \quad \begin{cases} R = \sqrt{\{y^2+z^2+[f(x)f'(x)]^2\}} \\ \quad = \pm f(x)\sqrt{\{1+[f'(x)]^2\}} \end{cases}$$

und folglich gibt die Gleichung (12):

$$(79) \qquad \varrho = \pm \frac{\{1+[f'(x)]^2\}^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$

Der vorhergehende Werth von ϱ ist der Krümmungshalbmesser der Erzeugungscurve, welche in der That mit einem der Hauptschnitte der Rotationsfläche übereinstimmt. Um den Krümmungshalbmesser des andern Hauptschnittes zu bestimmen, braucht man nur auf die Gleichungen (64) zurückzugehen, welche sich in diesem Falle auf:

$$(80)\quad \begin{cases} \{Q+[f'(x)]^2+f(x)\}f''(x)\xi = Tf(x)f'(x), \\ (1-Q)\eta = Ty, \quad (1-Q)\zeta = Tz \end{cases}$$

reduciren. In der That geschieht diesen drei Gleichungen Genüge, wenn man

$$(81)\qquad Q=1, \quad T=0, \quad \xi=0$$

setzt; folglich gibt die Gleichung (12) für den gesuchten Krümmungshalbmesser:

$$(82)\qquad \varrho = \pm R = \pm f(x)\,\{1+[f'(x)]^2\}^{\frac{1}{2}}$$

Also fällt dieser Krümmungshalbmesser immer mit der Normale N der Erzeugungslinie zusammen (s. Seite 37 Gleich (5)). Da ferner die letzte der Gleichungen (81), nämlich $\xi=0$, die Gleichung:

$$(83)\qquad \cos\alpha = 0$$

zur Folge hat, so ist klar, daß der dem in Rede stehenden Krümmungshalbmesser entsprechende Hauptschnitt eine in der auf der Axe der x senkrechten Ebene liegende Gerade zur Tangente hat.

Die im Vorhergehenden erhaltenen allgemeinen Formeln vereinfachen sich, wenn die Gleichung der krummen Fläche als für z aufgelöst und auf die Form:

$$(84)\qquad z = f(x, y)$$

zurückgeführt vorausgesetzt wird. Wenn man in dieser Voraussetzung der Kürze wegen:

$$(85)\quad \begin{cases} \dfrac{df(x,y)}{dx}=p, \quad \dfrac{df(x,y)}{dy}=q, \\ \dfrac{d^2f(x,y)}{dx^2}=r, \quad \dfrac{d^2f(x,y)}{dxdy}=s, \quad \dfrac{d^2f(x,y)}{dy^2}=t \end{cases}$$

und:

$$u = f(x, y) - z$$

setzt, so findet man:

$$\frac{du}{dx}=p, \quad \frac{du}{dy}=q, \quad \frac{du}{dz}=-1,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=r, \quad \frac{d^2u}{dy^2}=t, \quad \frac{d^2u}{dz^2}=0,$$

$$\frac{d^2u}{dydz}=0, \quad \frac{d^2u}{dzdx}=0, \quad \frac{d^2u}{dxdy}=s.$$

Folglich geben die Gleichungen (10), (15) und (23):

$$(86)\qquad R = \sqrt{(1+p^2+q^2)},$$

(87) $$Q = r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta,$$

(88) $$p\cos\alpha + q\cos\beta = \cos\gamma,$$

während sich die Gleichungen (20) und (21) auf:

(89) $$r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2 = \pm R$$

und

(90) $$p\xi + q\eta = \zeta$$

reduciren. Dieses sind in der gemachten Voraussetzung die beiden Gleichungen der ebenen Curve, welche man erhält, wenn man von dem Punkte (x, y, z) aus auf der Tangente jedes Normalschnittes Längen nimmt, welche der Quadratwurzel aus dem Krümmungshalbmesser dieses Normalschnittes gleich sind. Da die erste dieser Gleichungen nur die beiden Coordinaten ξ, η enthält, so ist klar, daß sie die Projection der Curve auf die Ebene der xy ausdrückt, und da sich diese Projection nach der Form der Gleichung (89) offenbar auf eine Ellipse, oder auf zwei conjugirte Hyperbeln, oder auf ein System zweier paralleler Geraden, oder endlich auf ein System zweier sich im Punkte (x, y, z) schneidender Geraden reducirt; so kann man behaupten, daß sich die fragliche Curve selbst auf eine der ebengenannten Linien reducirt. Aus dieser Bemerkung ergeben sich die verschiedenen Folgerungen leicht, zu welchen wir bereits gelangt sind, indem wir von den Gleichungen (20) und (21) ausgingen.

Was die Hauptkrümmungshalbmesser anlangt, so werden sie immer durch die Gleichung (49) bestimmt, aus welcher die Differenziale $d\xi, d\eta$ und $d\zeta$ vermittelst der Differenzialgleichungen:

(91) $$(r\xi + s\eta)\,d\xi + (s\xi + t\eta)\,d\eta = 0,$$

(92) $$p\,d\xi + q\,d\eta = d\zeta$$

eliminirt werden müssen. Eliminirt man nun zunächst $d\zeta$ zwischen den Gleichungen (49) und (92), so erhält man:

$$(\xi + p\zeta)\,d\xi + (\eta + q\zeta)\,d\eta = 0,$$

und aus dieser letzten Gleichung, verglichen mit (91) folgt:

(93) $$\frac{r\xi + s\eta}{\xi + p\zeta} = \frac{s\xi + t\eta}{\eta + q\zeta} = \frac{\xi(r\xi + s\eta) + \eta(s\xi + t\eta)}{\xi(\xi + p\zeta) + \eta(\eta + q\zeta)}.$$

Wenn man nun die Gleichungen (89), (90) und (48) berücksichtigt, so findet man blos:

(94) $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{r\xi + s\eta}{(1+p^2)\xi + pq\eta} = \dfrac{s\xi + t\eta}{(1+q^2)\eta + pq\xi} \\ \qquad\qquad = \pm\dfrac{R}{\varrho} = Q, \end{array}\right.$$

oder was daſſelbe iſt:

$$(95)\quad \begin{cases} [r-(1+p^2)Q]\xi+(s-pqQ)\eta=0, \\ (s-pqQ)\xi+[t-(1+q^2)Q]\eta=0. \end{cases}$$

Um aus den Gleichungen (95) den Werth von Q abzuleiten, braucht man nur die Coordinaten ξ, η zwiſchen ihnen zu eliminiren, und wenn dieſes geſchieht, ſo erhält man die Gleichung des zweiten Grades:

$$(96)\quad [r-(1+p^2)Q][t-(1+q^2)Q]-(s-pqQ)^2=0,$$

welche, wenn ſie entwickelt wird, ſich auf:

$$(97)\quad (1+p^2+q^2)Q^2- [(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]Q+rt-s^2=0$$

reduzirt. Ferner gibt die Gleichung (12):

$$(98)\quad \frac{1}{\varrho}=\pm\frac{Q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},$$

Endlich folgt aus den Gleichungen (95) und (90):

$$(99)\quad \begin{cases} \dfrac{\xi}{s-pqQ}=\dfrac{\eta}{(1+p^2)Q-r}=\dfrac{\zeta}{ps-qr+qQ} \\ =\pm\dfrac{\varrho^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{\{[(1+p^2)s-pqr]^2+(1+p^2+q^2)[(1+p^2)Q-r]^2\}}}, \end{cases}$$

und folglich, wenn man die Gleichungen (18) berückſichtigt:

$$(100)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha}{s-pqQ}=\dfrac{\cos\beta}{(1+p^2)Q-r}=\dfrac{\cos\gamma}{ps-qr+qQ}= \\ \pm\dfrac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{\{[(1+p^2)s-pqr]^2+(1+p^2+q^2)[(1+p^2)Q-r]^2\}}}. \end{cases}$$

Die Gleichung (97) gibt offenbar zwei reelle Werthe der Größe Q; denn die beiden Wurzeln dieſer Gleichung ſind in folgender Formel enthalten:

$$(101)\quad Q=\left\{\frac{(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r\pm\sqrt{\{[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]^2-4(1+p^2+q^2)(rt-s^2)\}}}{2(1+p^2+q^2)}\right\}$$

und da identiſch:

$$(102)\quad \left\{\begin{array}{l}[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]^2- \\ 4(1+p^2+q^2)(rt-s^2)\end{array}\right\}$$
$$= \frac{\left[\begin{array}{l}[(1+p^2)[(1+p^2)t-(1+q^2)r]+2pq[pqr-(1+p^2)s]]^2 \\ +4(1+p^2+q^2)[pqr-(1+p^2)s]^2\end{array}\right]}{(1+p^2)^2}$$

ist, so folgt, daß das in der Gleichung (101) unter dem Wurzelzeichen stehende Polynom nothwendig positiv ist. Nachdem man die beiden reellen Wurzeln der Gleichung (97) berechnet hat, braucht man sie nur in die Gleichung (98) zu substituiren, um die Werthe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser zu erhalten, und in die Gleichung (100), um die Richtungen der durch den Punkt (x, y, z) an die Hauptschnitte gezogenen Tangenten zu bestimmen.

Aus der bloßen Betrachtung der Gleichung (97) erhellet, daß die, den Hauptkrümmungshalbmessern entsprechenden beiden Werthe von ϱ Größen von einerlei Zeichen sind, wenn

$$(103)\qquad rt-s^2>0$$

ist. Folglich sind alsdann diese beiden Krümmungshalbmesser nach demselben Sinne gerichtet und drücken die größten und kleinsten Werthe der Veränderlichen ϱ aus. Wenn

$$(104)\qquad rt-s^2<0$$

wäre, so wären die beiden Wurzeln der Gleichung (97) Größen von verschiedenem Zeichen und die nach entgegengesetztem Sinne gerichteten Hauptkrümmungshalbmesser drückten zwei kleinste Werthe der Veränderlichen ϱ aus. Wenn endlich

$$(105)\qquad rt-s^2=0$$

wäre, so verschwände eine der Wurzeln der Gleichung (97) und der größte Werth von ϱ würde unendlich; folglich wäre alsdann die Krümmung eines der Hauptschnitte Null. Man überzeugt sich leicht, daß dieser Umstand in jedem Punkte einer developpabelen Fläche stattfindet, und folglich leisten die, aus der Gleichung einer solchen krummen Fläche gezogenen Werthe von r, s, t der Gleichung (105) für alle, den Coordinaten x, y, z beigelegten Werthe Genüge.

Die beiden Wurzeln der Gleichung (97) werden einander gleich, wenn der Ausdruck (102) verschwindet, was nur insofern stattfinden kann, als zu gleicher Zeit

$$pqr-(1+p^2)s=0,\quad (1+p^2)t-(1+q^2)r=0,$$

oder was dasselbe ist:

$$(106)\qquad \frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}$$

ist. Nun folgt aber in dieser Voraussetzung aus der Gleichung (101) und auch aus der Gleichung (96):

$$(107) \qquad Q = \frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}.$$

Folglich werden alsdann alle Werthe der Veränderlichen Q und ϱ einander gleich, was mit einer bereits S. 276 gemachten Bemerkung übereinstimmt, und alsdann werden auch die durch die Gleichungen (100) gegebenen Werthe von $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ unbestimmt.

Sollen die Hauptkrümmungshalbmesser gleich und nach entgegengesetztem Sinne gerichtet sein, so muß in der Gleichung (97) der Coefficient von Q verschwinden, und man hat folglich:

$$(108) \qquad (1+p^2) - 2pqs + (1+q^2)r = 0.$$

Wir können diese Vorlesung nicht schließen, ohne zu bemerken, daß es Euler ist, welcher die Theorie der krummen Flächen aufgestellt und die zwischen den Krümmungshalbmessern der verschiedenen Normalschnitte einer krummen Fläche stattfindenden Relationen zuerst angegeben hat. Die Untersuchungen dieses großen Geometers über den in Rede stehenden Gegenstand findet man in den Memoiren der Berliner Academie vom Jahre 1760.*)

*) Die wichtigsten und allgemeinsten Untersuchungen über diesen Gegenstand nach Euler hat Gauß angestellt in der Abhandlung: Disquisitiones generales circa superficies curvas. Göttingae MDCCCXXVIII. Auch Poisson hat diesen Gegenstand auf eine eigenthümliche Weise behandelt in dem Journal de l'Ecole Polytechnique, cahier 21.

Zwanzigste Vorlesung.

Krümmungshalbmesser der verschiedenen Curven, welche man auf einer gegebenen krummen Fläche beschreiben kann. — Von den krummen Flächen, welche einander in einem gemeinschaftlichen Punkte osculiren.

Wir wollen wieder eine durch die Gleichung:

$$u = 0, \tag{1}$$

wo u eine Function der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bezeichnet, ausgedrückte krumme Fläche betrachten und uns auf derselben eine durch den Punkt (x, y, z) gehende Curve construirt vorstellen. Wenn man den Bogen dieser Curve mit s und den, dem Punkte (x, y, z) entsprechenden Krümmungshalbmesser derselben mit ϱ bezeichnet, so sind die Cosinus der Winkel, welche dieser Krümmungshalbmesser mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet, vermöge der Gleichungen (3) der achtzehnten Vorlesung:

$$\varrho \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \varrho \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \varrho \frac{d^2z}{ds^2}. \tag{2}$$

Wenn man ferner in dem Punkte (x, y, z) auf der krummen Fläche eine Normale errichtet und der Kürze wegen

$$R = \sqrt{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]}, \tag{3}$$

setzt, so sind die Cosinus der Winkel, welche die, nach einer bestimmten Richtung verlängerte Normale mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet, resp.:

$$\frac{1}{R}\frac{du}{dx}, \quad \frac{1}{R}\frac{du}{dy}, \quad \frac{1}{R}\frac{du}{dz}. \tag{4}$$

(s. Vorl. 14 Gleich. (8)).

Nun sei δ der Winkel, welchen die Richtung der Normale mit der des Krümmungshalbmessers bildet, so braucht man, um $\cos\delta$ zu erhalten, nach der Gleichung (48) der Vorerinnerungen nur die

Ausdrücke (2) durch die Ausdrücke (4) zu multipliciren und die Summe der Producte zu bilden. Man hat also:

$$(5) \qquad \cos\delta = \frac{\rho}{R}\,\frac{\frac{du}{dx}d^2x + \frac{du}{dy}d^2y + \frac{du}{dz}d^2z}{ds^2}.$$

Wenn man ferner die Winkel, welche die nach dem einen oder andern Sinne verlängerte Tangente mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet, durch α, β, γ bezeichnet und die Gleichung (1) zweimal hintereinander differenzirt; so ergibt sich, wie in der neunzehnten Vorlesung:

$$(6) \qquad \frac{du}{dx}d^2x + \frac{du}{dy}d^2y + \frac{du}{dz}d^2z = -Q\,ds^2,$$

wo der Werth von Q durch die Gleichung:

$$(7) \qquad \begin{aligned} Q = {} & \frac{d^2u}{dx^2}\cos^2\alpha + \frac{d^2u}{dy^2}\cos^2\beta + \frac{d^2u}{dz^2}\cos^2\gamma \\ & + 2\,\frac{d^2u}{dydz}\cos\beta\cos\gamma + 2\,\frac{d^2u}{dzdx}\cos\gamma\cos\alpha \\ & + 2\,\frac{d^2u}{dxdy}\cos\alpha\cos\beta. \end{aligned}$$

bestimmt wird. Folglich gibt die Gleichung (5):

$$(8) \qquad \cos\delta = -\frac{\rho}{R}Q, \quad \frac{\cos\delta}{\rho} = -\frac{Q}{R};$$

und hieraus folgt:

$$(9) \qquad \rho = -\frac{R}{Q}\cos\delta.$$

Von den drei, im zweiten Theile der Gleichung (9) vorkommenden Größen R, Q und δ ist die erste einzig und allein von der Lage des Punktes (x, y, z) auf der krummen Fläche (1) abhängig. Die zweite Größe, nämlich Q hängt zugleich von dieser Lage und von der Richtung der durch den Punkt (x, y, z) an die, auf der krummen Fläche beschriebene Curve gezogenen Tangente ab. Was die Größe δ anlangt, so drückt sie immer den spitzen oder stumpfen Winkel aus, welchen die Krümmungsebene der Curve oder die Hauptnormale derselben mit der Normale der krummen Fläche bildet. Nun ist klar, daß, wenn nebst dem Punkte (x, y, z) die Tangente der Curve und die Krümmungsebene gegeben ist, die Größen Q und R, sowie der Zahlenwerth von $\cos\delta$ bekannt sind. Man kann also alsdann den Krümmungshalbmesser ρ durch die Formel (9) bestimmen. Da ferner die Größen ρ und R nothwendig positiv sind, so folgt aus der Gleichung (9), daß

(10) $\cos\delta$ und Q

immer Größen von verschiedenen Zeichen sind. Nach dieser Bemerkung kann man das Zeichen von $\cos\delta$ und folglich die Richtung, nach welcher der Krümmungshalbmesser ϱ auf der Hauptnormale der gegebenen Curve genommen werden muß unmittelbar bestimmen.

Aus dem eben Gesagten folgt: 1) daß, wenn zwei, auf der krummen Fläche (1) beschriebene Curven dieselbe Krümmungsebene haben, sie auch denselben Krümmungshalbmesser haben, und 2) daß, wenn diese beiden Curven dieselbe Tangente haben, aber nicht dieselbe Krümmungsebene, ihre Krümmungshalbmesser den Cosinus der Winkel proportional sind, welche ihre Hauptnormalen mit der Normale der gegebenen krummen Fläche bilden. In dem besonderen Falle, wo die Krümmungsebene einer Curve eine Normalebene der krummen Fläche wird, hat man nothwendig:

$$\cos\delta = \pm 1, \tag{11}$$

wo das Zeichen + oder — genommen werden muß, jenachdem der Krümmungshalbmesser nach dem einen oder andern Sinne gerichtet ist, und die Gleichung (9) reducirt sich auf:

$$\varrho = \mp\frac{R}{Q} \tag{12}$$

Diese letzte Gleichung stimmt mit der Gleichung (12) der neunzehnten Vorlesung überein. Man braucht sie nur mit der Gleichung (9) zu vergleichen, um folgenden Lehrsatz zu erhalten.

Lehrsatz 1. Wenn auf einer krummen Fläche eine beliebige Curve beschrieben ist und man legt durch die Tangente der Curve in einem gegebenen Punkte (x, y, z) eine Normalebene der krummen Fläche, so ist der Krümmungshalbmesser der Curve das Product aus dem Krümmungshalbmesser des Normalschnittes der krummen Fläche und dem Cosinus des spitzen Winkels zwischen der Ebene dieses Schnittes und der Krümmungsebene der Curve.

Die Richtigkeit des vorhergehenden Lehrsatzes läßt sich leicht in mehreren besondern Fällen nachweisen. Wenn man z. B. durch einen gegebenen Punkt auf einer Kugelfläche einen größten und einen kleinen Kreis legt, welche in diesem Punkte dieselbe Tangente haben, so erhellet leicht, daß der Halbmesser des kleinen Kreises dem Producte aus dem Halbmesser der Kugel und dem Cosinus des spitzen Winkels zwischen den Ebenen beider Kreise gleich ist.

Ferner wollen wir annehmen, daß in der Ebene der xy eine durch die Gleichung:

$$y = f(x) \tag{13}$$

ausgedrückte Curve beschrieben sei, daß sich diese Curve um die Axe der x drehe, wodurch eine krumme Fläche erzeugt wird, und daß der Krümmungshalbmesser ϱ des Durchschnittes dieser krummen Fläche für den Punkt (x, y, z) mit einer Normalebene der Erzeugungscurve gesucht werde. Der spitze Winkel zwischen dieser Normalebene und

der durch den Punkt (x, y, z) senkrecht auf die Axe der x gelegten Ebene ist offenbar der Neigung τ der Erzeugungscurve gegen dieselbe Axe gleich. Da die zweite Ebene die Rotationsfläche nach einem Kreise schneidet, so ist folglich der Halbmesser dieses Kreises dem Producte $\varrho \cos\tau$ gleich. Außerdem ist der absolute Werth dieses Halbmessers der Ordinate $f(x)$ der Erzeugungscurve gleich. Man hat folglich:

$$\varrho \cos\tau = \pm f(x). \tag{14}$$

Da endlich die letzte der Gleichungen (6) der ersten Vorlesung

$$\cos\tau = \frac{1}{\sqrt{\{1+[f'(x)]^2\}}} \tag{15}$$

gibt, so folgt aus der Gleichung (14):

$$\varrho = \pm f(x)\sqrt{\{1+[f'(x)]^2\}}, \tag{16}$$

und man kommt also wieder auf die Gleichung (82) der vorhergehenden Vorlesung.

Wir wollen nun annehmen, daß die Gleichung (1) in Beziehung auf z aufgelöst und auf die Form:

$$z = f(x, y) \tag{17}$$

zurückgeführt sei. Wenn man alsdann von den in der neunzehnten Vorlesung angewandten Bezeichnungen Gebrauch macht, oder wenn man durch

$$\left\{\begin{array}{l} df(x,y) = p\,dx + q\,dy, \quad \text{und} \\ d^2 f(x,y) = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2, \end{array}\right. \tag{18}$$

die Totaldifferenziale der ersten und zweiten Ordnung von $f(x, y)$, in Beziehung auf die als unabhängig betrachteten Veränderlichen x und y genommen, bezeichnet; so hat man:

$$\left\{\begin{array}{l} R = \sqrt{(1+p^2+q^2)}, \quad \text{und} \\ Q = r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta. \end{array}\right. \tag{19}$$

und folglich verwandelt sich die Gleichung (8) in:

$$\frac{\cos\delta}{\varrho} = -\frac{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}. \tag{20}$$

In dieser letzten Gleichung ist δ der Winkel zwischen dem Krümmungshalbmesser ϱ und der so verlängerten Normale der krummen Fläche, daß sie mit den Halbaxen der positiven Coordinaten die Winkel λ, μ, ν bildet, welche durch die Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\lambda = \dfrac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}, \quad \cos\mu = \dfrac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}, \\ \cos\nu = -\dfrac{1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \end{array}\right. \tag{21}$$

bestimmt werden.

Man sagt, daß zwei krumme Flächen einander in einem gemeinschaftlichen Punkte osculiren, wenn sie in diesem Punkte nicht blos dieselbe Berührungsebene, sondern auch ihre Hauptschnitte in denselben Normalebenen und dieselben, nach einerlei Sinne gerichteten Hauptkrümmungshalbmesser haben. Alsdann wird die zwischen den beiden krummen Flächen stattfindende Berührung eine Osculation genannt. In diesem Falle wollen wir annehmen, daß durch den gemeinschaftlichen Punkt der beiden krummen Flächen eine beliebige Ebene gelegt sei, so folgt aus der Gleichung (44) in Vorl. 19, wenn diese Ebene auf den beiden krummen Flächen normal ist, und aus dem S. 293 angeführten Satze, wenn sie schief ist, daß sie die beiden Flächen nach zwei Curven schneidet, welche denselben Krümmungshalbmesser haben. Folglich müssen der zweite Theil der Gleichung (20) und der Bruch:

$$(22) \qquad \frac{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$$

bei dem Uebergange von der ersten krummen Fläche zur zweiten für alle Werthe der Winkel α, β unveränderlich bleiben, welche der Gleichung:

$$(23) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + (p\cos\alpha + q\cos\beta)^2 = 1$$

genügen, die man erhält, wenn man die Gleichung (88) der Vorl. 19 mit der Gleichung:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

verbindet.

Da sich überdies die beiden krummen Flächen nach der Voraussetzung berühren, so bleiben die Größen p, q und folglich der Nenner des Bruches (22) beim Uebergange von der einen zur andern ungeändert. Dasselbe ist also auch mit dem Zähler:

$$(24) \qquad r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta.$$

der Fall. Da sich nun dieser Zähler, wenn man $\cos\beta = 0$ setzt, auf das Product $r\cos^2\alpha$ reducirt und auf das Product $t\cos^2\beta$, wenn man $\cos\alpha = 0$ setzt; so ist einleuchtend: 1) daß sich die Werthe der beiden Größen r, t beim Uebergange von der einen krummen Fläche zur andern nicht ändern, und 2) daß dasselbe auch vom zweiten Gliede des Ausdruckes (24) und folglich von der Größe s gilt. Noch wollen wir bemerken, daß die fünf Größen, welche hier mit p, q, r, s, t bezeichnet sind, genau die partiellen abgeleiteten Functionen der ersten und zweiten Ordnung des Werthes von z sind, welchen die Gleichung einer krummen Fläche gibt, wenn x und y als unabhängige Veränderliche betrachtet werden. Man kann also folgenden Lehrsatz aufstellen:

Lehrsatz 2. Wenn zwei, durch zwei Gleichungen zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z ausge-

drückte krumme Flächen einander in einem gegebenen Punkte osculiren, so behalten die sechs Größen:

$$(25)\quad z, p=\frac{dz}{dx}, q=\frac{dz}{dy}, r=\frac{d^2z}{dx^2}, s=\frac{d^2z}{dxdy}, t=\frac{d^2z}{dy^2}$$

für den gemeinschaftlichen Punkt bei dem Uebergange von der ersten Fläche zur zweiten dieselben Zahlenwerthe und dieselben Zeichen.

Zusatz 1. Man könnte auch den umgekehrten des vorhergehenden Lehrsatzes allgemein beweisen und zeigen, daß, wenn die Größen (25) für gegebene Werthe von x und y bei dem Uebergange von einer ersten Fläche zu einer zweiten ungeändert bleiben, diese beiden Flächen einander osculiren. Denn zunächst ist einleuchtend, daß sie einen gemeinschaftlichen Punkt haben, worin sie sich berühren. Ferner ergibt sich aus der Gleichung (20), daß, wenn man die beiden krummen Flächen durch irgend eine normale, oder schiefe Ebene schneidet, die beiden Durchschnittscurven denselben Krümmungshalbmesser haben. Folglich haben die beiden krummen Flächen dieselben Hauptkrümmungshalbmesser, welche denselben Normalebenen entsprechen und ihr Berührungspunkt ist ein Osculationspunkt. Dieser Schluß würde jedoch nicht richtig sein, wenn der aus der Gleichung (20) abgeleitete Werth von ϱ unter einer unbestimmten Form erschiene, welches stattfände, wenn die Werthe der Größen p, q, r, s, t oder einiger derselben unendlich würden, und in diesem letzten Falle könnten die beiden krummen Flächen für den gemeinschaftlichen Punkt gleiche Werthe der abgeleiteten Functionen p, q, r, s, t geben, ohne sich zu osculiren. Diese Bemerkung ist der analog, welche wir in Beziehung auf die Bedingungen, die die Ordnung der Berührung zweier ebenen Curven ausdrücken, gemacht haben (s. S. 111 u. 112).

Zusatz 2. Soll ein Punkt, worin sich zwei krumme Flächen berühren, ein Osculationspunkt werden, so genügt es offenbar, daß die auf der Berührungsebene beschriebene Curve des zweiten Grades, deren Radienvectoren den Quadratwurzeln aus den Krümmungshalbmessern der Normalschnitte gleich sind, bei dem Uebergange von der einen krummen Fläche zu der andern nicht geändert wird. Nun ist aber eine Curve des zweiten Grades vollständig bestimmt, wenn man den Mittelpunkt derselben und drei von diesem Mittelpunkte nach drei ihrer Punkte gezogene Radienvectoren kennt. Wenn ferner der Krümmungshalbmesser eines Schnittes einer krummen Fläche mit einer schiefen Ebene gegeben ist, so ergibt sich daraus vermittelst des Lehrsatzes 1 unmittelbar der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes, welcher dieselbe Tangente hat und folglich einer der Radienvectoren der vorhin erwähnten Curve. Soll also ein Punkt, worin sich zwei krumme Flächen berühren, ein Osculationspunkt sein, so genügt es, daß jede von drei, durch diesen Punkt willkührlich gelegten Ebenen die krummen Flächen nach zwei einander osculirenden Curven schneidet. Es verdient bemerkt zu werden, daß diese Bedingung erfüllt wird, wenn die Krümmungshalbmesser der Durchschnitte der ersten

und zweiten krummen Fläche mit Ebenen, welche zu den Coordinatenebenen parallel sind, gleich und nach demselben Sinne gerichtet sind.

Zusatz 3. Es seien nun:

(26) $u=0$, (27) $v=0$

die Gleichungen zweier krummen Flächen, wo u, v Functionen der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z sind. Wenn man die Gleichung (26) 1) in Beziehung auf x differenzirt, indem man z als eine Function von x betrachtet, und 2) in Beziehung auf y, indem man z als eine Function von y ansieht; so erhält man die beiden Gleichungen:

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\frac{du}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}=0,$$

und wenn man mit jeder dieser letzten Gleichungen wie mit der Gleichung $u=0$ verfährt, so findet man:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{d^2u}{dxdz}\frac{dz}{dx}+\frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dx^2}=0,$$

$$\frac{d^2u}{dxdy}+\frac{d^2u}{dydz}\frac{dz}{dx}+\frac{d^2u}{dxdz}\frac{dz}{dy}+$$

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dxdy}=0,$$

$$\frac{d^2u}{dy^2}+2\frac{d^2u}{dydz}\frac{dz}{dy}+\frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+\frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dy^2}=0;$$

d. h. man hat:

(28) $$\frac{du}{dx}+p\frac{du}{dy}=0, \quad \frac{du}{dy}+q\frac{du}{dz}=0;$$

(29)
$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2}+2p\frac{d^2u}{dxdz}+p^2\frac{d^2u}{dz^2}+r\frac{du}{dz}=0, \\ \frac{d^2u}{dxdy}+p\frac{d^2u}{dydz}+q\frac{d^2u}{dxdz}+pq\frac{d^2u}{dz^2}+s\frac{du}{dz}=0, \\ \frac{d^2u}{dy^2}+2q\frac{d^2u}{dydz}+q^2\frac{d^2u}{dz^2}+t\frac{du}{dz}=0. \end{cases}$$

Man findet folglich:

(30) $$p=-\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dz}\right)}, \qquad q=-\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{du}{dz}\right)},$$

$$(31)\quad \begin{cases} r=-\dfrac{\dfrac{d^2u}{dx^2}\left(\dfrac{du}{dz}\right)^2-2\dfrac{d^2u}{dxdz}\dfrac{du}{dx}\dfrac{du}{dz}+\dfrac{d^2u}{dz^2}\left(\dfrac{du}{dx}\right)^2}{\left(\dfrac{du}{dz}\right)^3}, \\ s=-\dfrac{\dfrac{d^2u}{dxdy}\left(\dfrac{du}{dz}\right)^2-\dfrac{d^2u}{dydz}\dfrac{du}{dx}\dfrac{du}{dz}-\dfrac{d^2u}{dxdz}\dfrac{du}{dy}\dfrac{du}{dz}+\dfrac{d^2u}{dz^2}\dfrac{du}{dx}\dfrac{du}{dy}}{\left(\dfrac{du}{dz}\right)^3}, \\ t=-\dfrac{\dfrac{d^2u}{dy^2}\left(\dfrac{du}{dz}\right)^2-2\dfrac{d^2u}{dydz}\dfrac{du}{dy}\dfrac{du}{dz}+\dfrac{d^2u}{dz^2}\left(\dfrac{du}{dy}\right)^2}{\left(\dfrac{du}{dz}\right)^3}. \end{cases}$$

Sollen sich demnach die beiden krummen Flächen (26) und (27) in einem gemeinschaftlichen Punkte (x, y, z) osculiren, so ist erforderlich und im Allgemeinen auch zureichend, daß die aus den Gleichungen (30) und (31) abgeleiteten Werthe von p, q, r, s, t nicht geändert werden, wenn man darin die Function v für die Function u setzt. Nun wird aber diese Bedingung erfüllt, wenn die Coordinaten x, y, z des gemeinschaftlichen Punktes beider krummen Flächen der Gleichung:

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{\dfrac{d^2u}{dx^2}\left(\dfrac{du}{dz}\right)^2-2\dfrac{d^2u}{dxdz}\dfrac{du}{dx}\dfrac{du}{dz}+\dfrac{d^2u}{dz^2}\left(\dfrac{du}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2v}{dx^2}\left(\dfrac{dv}{dz}\right)^2-2\dfrac{d^2v}{dxdz}\dfrac{du}{dx}\dfrac{du}{dz}+\dfrac{d^2v}{dz^2}\left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2} \\ =\dfrac{\dfrac{d^2u}{dxdy}\left(\dfrac{du}{dz}\right)^2-\dfrac{d^2u}{dydz}\dfrac{du}{dx}\dfrac{du}{dz}-\dfrac{d^2u}{dxdz}\dfrac{du}{dy}\dfrac{du}{dz}+\dfrac{d^2u}{dz^2}\dfrac{du}{dx}\dfrac{du}{dy}}{\dfrac{d^2v}{dxdy}\left(\dfrac{dv}{dz}\right)^2-\dfrac{d^2v}{dydz}\dfrac{dv}{dx}\dfrac{dv}{dz}-\dfrac{d^2v}{dxdz}\dfrac{dv}{dy}\dfrac{dv}{dz}+\dfrac{d^2v}{dz^2}\dfrac{dv}{dx}\dfrac{dv}{dy}} \\ =\dfrac{\dfrac{d^2u}{dy^2}\left(\dfrac{du}{dz}\right)^2-2\dfrac{d^2u}{dydz}\dfrac{du}{dy}\dfrac{du}{dz}+\dfrac{d^2u}{dz^2}\left(\dfrac{du}{dy}\right)^2}{\dfrac{d^2v}{dy^2}\left(\dfrac{dv}{dz}\right)^2-2\dfrac{d^2v}{dydz}\dfrac{dv}{dy}\dfrac{dv}{dz}+\dfrac{d^2v}{dz^2}\left(\dfrac{dv}{dy}\right)^2} \\ =\dfrac{\left(\dfrac{du}{dx}\right)^3}{\left(\dfrac{dv}{dx}\right)^3}=\dfrac{\left(\dfrac{du}{dy}\right)^3}{\left(\dfrac{dv}{dy}\right)^3}=\dfrac{\left(\dfrac{du}{dz}\right)^3}{\left(\dfrac{dv}{dz}\right)^3}. \end{cases}$$

genügen. Es ist zu bemerken: 1) daß die Formel (32) so gut als fünf verschiedene Gleichungen ist, und 2) daß, da diese Formel stattfinden muß, wenn man die Axen der x, y und z mit einander vertauscht, es gestattet ist, für einen der darin vorkommenden Brüche,

z. B. für den zweiten, den zu setzen, welchen man erhielte, wenn man im ersten Theile den Buchstaben y für z setzte. Sollen sich also die krummen Flächen (26) und (27) in einem gemeinschaftlichen Punkte (x, y, z) osculiren, so ist erforderlich und im Allgemeinen auch zureichend, daß die Coordinaten dieses Punktes folgender Gleichung genügen:

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\left(\frac{du}{dx}\right)^3}{\left(\frac{dv}{dx}\right)^3} = \dfrac{\left(\frac{du}{dy}\right)^3}{\left(\frac{dv}{dy}\right)^3} = \dfrac{\left(\frac{du}{dz}\right)^3}{\left(\frac{dv}{dz}\right)^3} \\ = \dfrac{\frac{d^2u}{dx^2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 - 2\frac{d^2u}{dydz}\frac{du}{dy}\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{du}{dy}\right)^2}{\frac{d^2v}{dy^2}\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 - 2\frac{d^2v}{dydz}\frac{dv}{dy}\frac{dv}{dz} + \frac{d^2v}{dz^2}\left(\frac{dv}{dy}\right)^2} \\ \dfrac{\frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - 2\frac{d^2u}{dzdx}\frac{du}{dz}\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2}{\frac{d^2v}{dz^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - 2\frac{d^2v}{dzdx}\frac{dv}{dz}\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2}\left(\frac{dv}{dz}\right)^2} \\ = \dfrac{\frac{d^2u}{dx^2}\left(\frac{du}{dy}\right)^2 - 2\frac{d^2u}{dxdy}\frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + \frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}{\frac{d^2v}{dx^2}\left(\frac{dv}{dy}\right)^2 - 2\frac{d^2v}{dxdy}\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dy} + \frac{d^2v}{dy^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2} \end{array}\right.$$

Zu dieser letzten Gleichung würde man direct gelangen, wenn man die Bedingungsgleichung (47) der sechszehnten Vorlesung mit dem im zweiten Zusatze des zweiten Lehrsatzes ausgesprochenen Prinzipe verbände und ausdrückte, daß der Krümmungshalbmesser ϱ eines Durchschnittes mit einer zu einer der Coordinatenebenen parallelen Ebene bei dem Uebergange von der ersten krummen Fläche zur zweiten einen unveränderlichen Werth behält, welcher durch die Gleichung (30) der sechsten Vorlesung oder durch die vermittelst einer Vertauschung der Coordinaten x, y, z daraus abgeleiteten Gleichungen bestimmt wird.

Ein und zwanzigste Vorlesung.

Ueber die verschiedenen Ordnungen der Berührung im Raume beschriebener Curven.

Betrachten wir zwei im Raume beschriebene Curven, welche sich in einem gegebenen Punkte berühren. Wenn man aus dem Berührungspunkte als Mittelpunkt mit einem unendlich kleinen Halbmesser i eine Kugel beschreibt, so schneidet die Oberfläche derselben die beiden Curven in zwei einander sehr nahe liegenden Punkten und die größere oder geringere gegenseitige Annäherung der beiden Curven in der Entfernung i vom Berührungspunkte hat offenbar die zwischen diesen beiden Punkten liegende unendlich kleine Länge oder die Sehne des zwischen den beiden Curven liegenden Bogens eines größten Kreises zum Maße. Ferner bilden die Richtungen der nach den Endpunkten dieses Bogens gezogenen Kugelhalbmesser mit der gemeinschaftlichen Tangente beider Curven sehr kleine Winkel und folglich ist der Winkel zwischen diesen beiden Halbmessern selbst eine sehr kleine Größe. Es sei dieser letzte Winkel $= \omega$, so hat der Bogen des größten Kreises zwischen den beiden Curven das Product:

$$i\omega, \tag{1}$$

zum Maße und die Sehne dieses Bogens ist gleich:

$$2i\sin\frac{\omega}{2}. \tag{2}$$

Wenn die beiden Curven ihre Form so ändern, daß sie sich, indem sie sich immer in dem gegebenen Punkte berühren, in der Nähe dieses Punktes einander mehr nähern, so nehmen die, sehr kleinen Werthen von i entsprechenden Werthe des Ausdruckes (2) nothwendig ab, was voraussetzt, daß die durch ω bezeichnete Function von i selbst abnimmt. Wenn dagegen die gegenseitige Annäherung der beiden Curven in Folge ihrer Formveränderung geringer wird, so nehmen die, sehr kleinen Werthe von i entsprechenden Werthe von ω nothwendig zu. Man kann also behaupten, daß die gegenseitige Annäherung der beiden Curven in der Nähe des Berührungspunktes größer oder geringer und ihre Berührung mehr oder weniger innig ist, jenachdem

die sehr kleinen Werthen von i entsprechenden Werthe von ω kleiner oder größer sind. Hieraus und aus dem Lehrsatze 1 Seite 12 der Differenzialrechnung ergibt sich unmittelbar folgender Lehrsatz:

Lehrsatz 1. Wenn sich zwei Curven in einem gegebenen Punkte (P) berühren, und man bemerkt auf denselben in der unendlich kleinen Entfernung i vom Berührungspunkte zwei Punkte (Q), (R), so ist die gegenseitige Annäherung der beiden Curven in der Nähe des Berührungspunktes desto beträchtlicher, je höher die Ordnung der unendlich kleinen Größe ω ist, welche den Winkel zwischen den Radienvectoren PQ, PR ausdrückt.

Beweis. Denn wenn sich die Form der beiden Curven, oder einer derselben so ändert, daß die Ordnung der unendlich kleinen Größe ω steigt, so nimmt der Zahlenwerth von ω in der Nähe des Berührungspunktes nach dem Lehrsatze 1 Seite 12 der Differenzialrechnung ab und folglich nähern sich die beiden Curven einander mehr als zuvor.

Nachdem der Lehrsatz 1 bewiesen ist, ist es natürlich, die Ordnung der als Function der Basis i betrachteten unendlich kleinen Größe ω zum Ausdrucke der Ordnung der Berührung der beiden im Raume beschriebenen Curven zu nehmen. Es sei diese Ordnung $= a$. Da das Verhältniß:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}$$

die Einheit zur Grenze hat, so ist das Product:

$$\omega \frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} = 2 \sin \frac{\omega}{2}$$

auch eine unendlich kleine Größe von der Ordnung a, während die Ausdrücke (1) und (2) nach dem Lehrsatze 3 Seite 14 der Differenzialrechnung unendlich kleine Größen der Ordnung $a+1$ sind. Man kann also folgenden Lehrsatz aufstellen:

Lehrsatz 2. Wenn sich zwei Curven in einem gegebenen Punkte (P) berühren, so ist die Ordnung der Berührung um eine Einheit niedriger als die der unendlich kleinen Größe, welche die Entfernung zwischen zwei Punkten (Q), (R) ausdrückt, die auf diesen beiden Curven liegen und deren gemeinschaftliche Entfernung vom Berührungspunkte eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung ist.

Es verdient bemerkt zu werden, daß die von dem Punkte (Q) nach dem Punkte (R) gezogene Gerade QR die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes ist, welche in diesem Dreiecke dem sehr kleinen Winkel ω gegenüberliegt und fast auf den Radienvectoren PQ, PR, also auch auf der gemeinschaftlichen Tangente beider Curven fast senkrecht ist. Ferner ist die Fläche des Dreieckes PQR nach einem bekannten Lehrsatze der Trigonometrie der Hälfte des Produc-

tes aus den gleichen Seiten PQ, PR und dem Sinus des zwischen ihnen liegenden Winkels, d. h. dem Ausdrucke:

$$(3) \qquad \tfrac{1}{2} i^2 \sin\omega$$

und folglich einer unendlich kleinen Größe von der Ordnung $a+2$, welche um zwei Einheiten höher ist als die Ordnung der Berührung der beiden Curven, gleich.

Wir wollen nun annehmen, daß die beiden Curven und das Dreieck PQR auf eine Ebene projicirt werden, welche nicht fast auf der Ebene dieses Dreieckes senkrecht ist. Da die beiden projicirten Curven nach dem Seite 155 angeführten Satze dieselbe Tangente haben, so berühren sie einander. Durch $(p), (q), (r)$ wollen wir die Projectionen der Punkte $(P), (Q), (R)$, durch δ den Winkel zwischen den Ebenen der beiden Dreiecke PQR, pqr und durch φ, χ, ψ die Winkel bezeichnen, welche die Geraden PQ, PR, QR resp. mit ihren Projectionen pq, pr, qr bilden; so ist:

$$(4) \qquad \begin{cases} pq = PQ\cos\varphi = i\cos\varphi, \quad pr = PR\cos\chi = i\cos\chi, \\ qr = QR\cos\psi = 2i\sin\frac{\omega}{2}.\cos\psi. \end{cases}$$

Es läßt sich übrigens leicht beweisen, daß die Projection der Fläche eines Dreieckes auf eine beliebige Ebene dem Producte aus dieser Fläche und dem Cosinus des spitzen Winkels zwischen der Ebene des Dreieckes und der Ebene, auf welche es projicirt wird, oder dem Cosinus des spitzen Winkels zwischen den Perpendikeln auf diesen Ebenen gleich ist. *) Folglich wird die Fläche des Dreieckes pqr durch das Product:

$$(5) \qquad \tfrac{1}{2} i^2 \sin\omega . \cos\delta = i^2 \sin\tfrac{1}{2}\omega . \cos\delta,$$

ausgedrückt und der Cosinus des Winkels pqr ist dem Quotienten gleich, welchen man erhält, wenn man diese doppelte Fläche durch das Product $pq \times qr$ dividirt, d. h. dem Bruche:

$$(6) \qquad \frac{\cos\frac{1}{2}\omega . \cos\delta}{\cos\varphi . \cos\psi}.$$

gleich. Folglich ist das Product aus diesem Cosinus und der Geraden pq oder das vom Punkte (p) auf die Gerade qr gefällte Perpendikel dem Bruche

$$(7) \qquad i\frac{\cos\frac{1}{2}\omega . \cos\delta}{\cos\psi}$$

*) Um diesen Lehrsatz, welchen man auf eine beliebige Fläche ausdehnen kann, zu beweisen, braucht man nur die Gleichungen (81) der Vorerin. anzuwenden, und die Ebene, auf welche man projicirt, mit einer der Coordinatenebenen zusammenfallen zu lassen.

gleich. Da nun aber der Winkel ω sehr klein und die Winkel φ, χ, ψ merklich von $\frac{\pi}{2}$ verschieden sind, so haben die Größen:

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega,\quad \cos\delta,\quad \cos\varphi,\quad \cos\chi,\quad \cos\psi$$

merkliche Werthe. Man braucht aber blos die Formeln (4) und den Ausdruck (7) zu betrachten, um sofort einzusehen: 1) daß die Entfernung qr in der gemachten Voraussetzung eine unendlich kleine Größe von der Ordnung $a+1$ ist und daß sie mit der Entfernung pq einen merklich von Null verschiedenen Winkel pqr bildet, und 2) daß die Entfernung des Punktes (p) von der Geraden qr eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung ist. Ferner wollen wir bemerken, daß da die gemeinschaftliche Tangente der beiden projicirten Curven fast mit der Geraden pq zusammenfällt, sie selbst mit der Secante qr einen merklichen endlichen Winkel bildet. Folglich findet zwischen den projicirten Curven sowohl als zwischen den gegebenen nach dem Lehrsatze 3 der neunten Vorlesung eine Berührung von der Ordnung a statt.

Wenn die Ebene des Dreieckes pqr fast auf der Ebene des Dreieckes PQR senkrecht würde, aber mit den Seiten PQ, PR und folglich mit der gemeinschaftlichen Tangente der beiden gegebenen Curven immer wieder einen endlichen Winkel bildete; so könnte zwischen den beiden projicirten Curven nur eine Berührung stattfinden, deren Ordnung $=a$ oder größer als a wäre. Denn alsdann wären die Entfernungen pq, pr noch unendlich kleine Größen der ersten Ordnung, während die Entfernung qr eine unendlich kleine Größe von der Ordnung $a+1$ oder von einer höhern Ordnung wäre. Nun wollen wir uns in dieser neuen Voraussetzung eine aus dem Punkte (p) als Mittelpunkt mit einem Halbmesser gleich pq beschriebene Kugel denken, welche die zweite der beiden projicirten Curven im Punkte (s) schneidet. Wenn man den Punkt (s) mit den Punkten (q) und (r) verbindet, so ist die Gerade rs fast zu der gemeinschaftlichen Tangente der beiden projicirten Curven parallel, weil ihre Endpunkte auf einer dieser Curven in unendlich kleinen Entfernungen von dem Punkte (p) liegen. Dagegen ist die Gerade qs, oder die Grundlinie des gleichschenkligen Dreieckes pqs fast auf derselben Tangente senkrecht. Folglich ist das Dreieck qrs in s fast rechtwinklig, und folglich ist die Länge qs, welche fast dem Producte $qr\cos(rqs)$ gleich ist, so wie die Länge qr eine unendliche kleine Größe von der Ordnung $a+1$ oder von einer höhern Ordnung. Also ist nach dem Lehrsatze 2 der neunten Vorlesung die Ordnung der Berührung der beiden projicirten Curven nothwendig gleich a oder größer als a.

Wir wollen uns vorstellen, daß, indem alle Punkte des Raumes auf drei Coordinatenaxen der x, y und z bezogen werden, die beiden gegebenen Curven successive auf die Ebene der xy und der xz projicirt werden. Ferner wollen wir annehmen, daß der Winkel zwischen der Axe der x und der gemeinschaftlichen Tangente der beiden Curven merklich von einem rechten verschieden ist, so kann

diese Tangente weder auf der Ebene der xy, noch auf der Ebene der xz fast senkrecht sein, weil beide durch die Axe der x gehen. Ferner können diese letzten Ebenen nicht beide zugleich auf der Ebene des Dreieckes PQR fast senkrecht sein; denn in diesem Falle würde ihre Durchschnittslinie, d. h. die Axe der x mit den in der Ebene PQR liegenden Geraden PQ, PR und folglich mit der gemeinschaftlichen Tangente der beiden Curven einen sehr wenig von $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Winkel bilden. Demnach folgt aus den weiter oben aufgestellten Sätzen, daß in der gemachten Voraussetzung die Berührung der 1) auf die Ebene der xy und 2) auf die Ebene der xz projicirten Curven immer von der Ordnung a oder von einer höhern Ordnung und wenigstens auf einer der beiden Ebenen nur von der Ordnung a ist. Man kann also folgenden Lehrsatz aufstellen:

Lehrsatz 3. Um die Ordnung der Berührung zweier Curven, welche sich in einem Punkte berühren, worin die gemeinschaftliche Tangente mit der Axe der x keinen rechten Winkel bildet, zu erhalten, braucht man nur die Zahlen zu suchen, welche die Ordnungen der Berührung der Projectionen der beiden Curven auf die Ebenen der xy und der xz ausdrücken, so gibt jede dieser Zahlen, wenn sie einander gleich sind, oder die kleinste derselben, wenn sie verschieden sind, die Ordnung der Berührung der beiden gegebenen Curven an.

Zusatz 1. Der vorhergehende Lehrsatz findet sowohl statt, wenn die Veränderlichen x, y, z rechtwinklige, als wenn sie schiefwinklige Coordinaten bezeichnen.

Zusatz 2. Wenn sich zwei Curven von doppelter Krümmung in einem Punkte berühren, worin die Tangente keinen rechten Winkel mit der Axe der x bildet, so wird die Bestimmung der Ordnung der Berührung zwischen ihnen durch den Lehrsatz 3 auf die Bestimmung der Ordnung der Berührung zweier ebener Curven, d. h. auf eine in der neunten Vorlesung gelöste Aufgabe zurückgeführt.

Zusatz 3. Wir wollen annehmen, daß die beiden Curven, wovon jede durch zwei Gleichungen zwischen den recht- oder schiefwinklichen Coordinaten x, y, z ausgedrückt wird, einen der Abscisse x entsprechenden gemeinschaftlichen Punkt und in diesem Punkte eine gemeinschaftliche, nicht auf der Axe der x senkrechte Tangente haben, und daß zwischen ihnen eine Berührung von der Ordnung a stattfindet. Ueberdies sei n die ganze Zahl, welche gleich a oder unmittelbar größer als a ist. Endlich wollen wir annehmen, daß die Abscisse x zur unabhängigen Veränderlichen genommen wird und daß $y', y'', y''' \ldots, z', z'', z''' \ldots$ die successiven abgeleiteten Functionen der als Functionen von x betrachteten Veränderlichen y und z sind; so behalten die Größen:

$$(8) \quad \begin{cases} y, & y', & y'', & \ldots & y^{(n)}, \\ z, & z', & z'', & \ldots & z^{(n)}, \end{cases}$$

nach dem Lehrsatze 3 und dem in der neunten Vorlesung Gesagten für den Berührungspunkt bei dem Uebergange von der ersten Curve zur zweiten dieselben Werthe, während jede der Größen:

$$(9) \qquad y^{(n+1)}, \quad z^{(n+1)}$$

oder wenigstens eine derselbe den Werth verändert.

Zusatz 4. Wenn die gemeinschaftliche Tangente der beiden Curven mit der Axe der x keinen rechten Winkel bildet, und die Ordnung der Berührung eine ganze Zahl ist, so braucht man, um diese Ordnung zu bestimmen, nur den größten Werth zu suchen, welchen man der ganzen Zahl n beilegen kann, indem man diese Zahl so wählt, daß die Größen (8) für den Berührungspunkt bei dem Uebergange von der einen Curve zur andern unveränderlich bleiben, und alsdann drückt dieser Werth von n genau die gesuchte Ordnung der Berührung aus.

Zusatz 5. Wenn die gemeinschaftliche Tangente der beiden Curven mit der Axe der x einen rechten Winkel bildete, so könnte sie nicht zugleich auf der Ebene der xy und auf der der xz senkrecht sein. Sie würde also mit der Axe der y und mit der der z, oder wenigstens mit einer dieser beiden Axen einen von $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Winkel bilden. Um also in dieser Voraussetzung die Ordnung der Berührung der beiden Curven vermittelst des Lehrsatzes 3 zu bestimmen, brauchte man für die Axe der x nur die Axe der y oder z und zu gleicher Zeit für die Ebene der xz oder der xy die der yz zu setzen.

Für den Lehrsatz 3, mit Hülfe dessen man leicht die Ordnung der Berührung zweier ebenen Curven bestimmen kann, kann man auch einen andern anwenden, welcher keiner Beschränkung unterliegt und welchen wir nun in aller Kürze ableiten wollen.

Es sei (P) wieder der gemeinschaftliche Punkt der beiden sich berührenden Curven. Ferner seien (Q), (R) zwei andere Punkte, welche auf der ersten und zweiten Curve liegen und deren Entfernung von dem gemeinschaftlichen Punkte sich auf eine unendlich kleine Länge i reducirt. Endlich wollen wir annehmen, daß auf der zweiten Curve von dem Punkte (P) aus ein Bogen PS genommen sein, welcher dieselbe Länge hat als der nach demselben Sinne gerichtete Bogen PQ; so ist die Secante QS nach dem Lehrsatze 2 der sechszehnten Vorlesung, so wie die Secante QR auf der gemeinschaftlichen Tangente fast senkrecht. Da ferner die Sehne RS zwischen zwei, dem Berührungspunkte sehr nahe liegenden Punkten der zweiten Curve liegt, so ist sie fast zu dieser Tangente parallel. Folglich bilden in dem geradlinigen Dreiecke QRS die Seiten QR, QS mit der dritten Seite RS Winkel, wovon jeder sehr wenig von einem rechten verschieden ist. Folglich ist das Verhältniß zwischen den beiden ersten Seiten, oder was dasselbe ist, zwischen den Sinus der ihnen gegenüber liegenden Winkel, sehr wenig von der Einheit verschieden und wenn I eine unendlich kleine Größe bezeichnet, so hat man:

(10) $$QS = QR(1+I) = (1+I)\,2i\sin\frac{\omega}{2}.$$

Anderer Seits, da das Verhältniß zwiſchen dem Bogen PQ und der Sehne $PQ = i$ die Einheit zur Grenze hat, ſo iſt auch, wenn J eine unendlich kleine Größe bezeichnet:

(11) $$\text{Bogen } PQ = (1+J)\,i.$$

Nun wollen wir annehmen, daß zwiſchen den beiden Curven eine Berührung der Ordnung a ſtattfindet und der Radiusvector i als eine unendlich kleine Größe der erſten Ordnung betrachtet wird, ſo iſt klar, daß der Bogen PQ auch eine unendlich kleine Größe der erſten Ordnung iſt, während die Entfernung QS eine unendlich kleine Größe von der Ordnung $a+1$ iſt. Ferner wird die Ordnung dieſer unendlich kleinen Entfernung nicht geändert, wenn man den Bogen PQ oder eine ſolche Größe, daß dieſer Bogen eine unendlich kleine Größe der erſten Ordnung bleibt, zur Baſis nimmt (Diffr. S. 15, Zuſ. 3). Hieraus ergibt ſich nun folgender Lehrſatz:

Lehrſatz 4. Um die Ordnung der Berührung zweier ſich in einem gegebenen Punkte berührenden Curven zu erhalten, braucht man nur die Zahl zu ſuchen, welche die Ordnung der unendlich kleinen Entfernung zwiſchen den Endpunkten zweier vom Berührungspunkte aus auf den beiden Curven genommenen gleichen Längen, wenn dieſe Längen unendlich kleine Größen der erſten Ordnung werden, ausdrückt, ſo gibt dieſe, um eine Einheit verminderte Zahl immer die Ordnung der Berührung an.

Zuſatz 1. Es ſei i die unendlich kleine Größe, welche jede der beiden in Lehrſatz 4 erwähnten Längen ausdrückt. Außerdem wollen wir durch x, y, z und ξ, η, ζ die Coordinaten der Endpunkte dieſer Längen auf der erſten und zweiten Curve bezeichnen. Endlich ſei:

(12) $$s = \sqrt{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]}$$

die Länge der vom Punkte (ξ, η, ζ) nach dem Punkte (x, y, z) gezogenen Geraden. Wenn man i als eine unendlich kleine Größe der erſten Ordnung betrachtet und die Ordnung der Berührung der beiden Curven mit a bezeichnet, ſo iſt die Entfernung s nach dem Lehrſatze 3 eine unendlich kleine Größe der Ordnung $a+1$. Folglich iſt das Quadrat dieſer Entfernung oder die Summe:

(13) $$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

eine unendlich kleine Größe von der Ordnung $2a+2$, wozu erforderlich iſt, daß von den drei Differenzen:

(14) $$x-\xi,\quad y-\eta,\quad z-\zeta$$

wenigſtens die eine von der Ordnung $a+1$ iſt, indem die beiden andern von derſelben, oder von einer höhern Ordnung ſind. Zu

demſelben Schluſſe gelangt man, wenn man erwägt, daß die Zahlenwerthe der Ausdrücke (14) die Projectionen der Entfernung s auf die Axen der x, y und z ausdrücken. Denn man ſieht leicht ein, daß eine unendlich kleine Entfernung und ihre Projection auf eine beliebige Axe im Allgemeinen Größen von derſelben Ordnung ſind; nur kann die Ordnung der Projection die der Entfernung in dem Falle überſteigen, wo dieſe faſt auf der Axe ſenkrecht wird. Aber es iſt einleuchtend, daß dieſe letzte Bedingung nicht für alle drei Coordinatenaxen erfüllt werden kann.

Zuſatz 2. Wir wollen dieſelben Bezeichnungen wie im vorhergehenden Zuſatze beibehalten. Es ſei a wieder die Ordnung der Berührung der beiden gegebenen Curven und durch n wollen wir die ganze Zahl bezeichnen, welche gleich a oder unmittelbar größer als a iſt. Da die Größe i als eine unendlich kleine Größe der erſten Ordnung betrachtet wird, ſo muß eine der drei Differenzen:

$$(14) \qquad x-\xi,\quad y-\eta,\quad z-\zeta$$

von der Ordnung $a+1$ ſein, indem die beiden andern von derſelben, oder von einer höhern Ordnung ſind. Aus dem in der ſechsten Vorleſung der Differ. Geſagten folgt, daß, wenn i zur unabhängigen Veränderlichen genommen wird, die Größen:

$$(15) \quad \begin{cases} x-\xi, & \frac{d(x-\xi)}{di}, & \frac{d^2(x-\xi)}{di^2}, \ldots & \frac{d^n(x-\xi)}{di^n}, \\ y-\eta, & \frac{d(y-\eta)}{di}, & \frac{d^2(y-\eta)}{di^2}, \ldots & \frac{d^n(y-\eta)}{di^n}, \\ z-\zeta, & \frac{d(z-\zeta)}{di}, & \frac{d^2(z-\zeta)}{di^2}, \ldots & \frac{d^n(z-\zeta)}{di^n}, \end{cases}$$

mit i verſchwinden, während jede der abgeleiteten Functionen:

$$(16) \qquad \frac{d^{n+1}(x-\xi)}{di^{n+1}},\quad \frac{d^{n+1}(y-\eta)}{di^{n+1}},\quad \frac{d^{n+1}(z-\zeta)}{di^{n+1}},$$

oder wenigſtens eine von ihnen nicht mehr für $i=0$ verſchwindet. Ferner ſeien s und ς die beiden Bogen, welche reſp. zwiſchen einem feſten Punkte der erſten gegebenen Curve und dem beweglichen Punkte (x, y, z) und zwiſchen einem feſten Punkte der zweiten Curve und dem Punkte (ξ, η, ζ) liegen, indem wir zugleich annehmen, daß dieſe Bogen nach demſelben Sinne als der Bogen i gerichtet ſind. Da die drei Veränderlichen i, s und ς nur um conſtante Größen von einander verſchieden ſind, ſo iſt:

$$(17) \qquad di=ds=d\varsigma,$$

und man kann in Beziehung auf die erſte Curve s ſtatt i und für die zweite Curve ς ſtatt i zur unabhängigen Veränderlichen nehmen. Alsdann verwandeln ſich die Ausdrücke (15) und (16) reſp. in:

$$(18)\quad \begin{cases} x-\xi, & \frac{dx}{ds}-\frac{d\xi}{d\varsigma}, & \frac{d^2x}{ds^2}-\frac{d^2\xi}{d\varsigma^2}, \ldots & \frac{d^nx}{ds^n}-\frac{d^n\xi}{d\varsigma^n}, \\ y-\eta, & \frac{dy}{ds}-\frac{d\eta}{d\varsigma}, & \frac{d^2y}{ds^2}-\frac{d^2\eta}{d\varsigma^2}, \ldots & \frac{d^ny}{ds^n}-\frac{d^n\eta}{d\varsigma^n}, \\ z-\zeta, & \frac{dz}{ds}-\frac{d\zeta}{d\varsigma}, & \frac{d^2z}{ds^2}-\frac{d^2\zeta}{d\varsigma^2}, \ldots & \frac{d^nz}{ds^n}-\frac{d^n\zeta}{d\varsigma^n}, \end{cases}$$

und

$$(19)\quad \frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}}-\frac{d^{n+1}\xi}{d\varsigma^{n+1}},\ \frac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}}-\frac{d^{n+1}\eta}{d\varsigma^{n+1}},\ \frac{d^{n+1}z}{ds^{n+1}}-\frac{d^{n+1}\zeta}{d\varsigma^{n+1}}.$$

Setzt man die Größen (18) gleich Null, so erhält man die Gleichungen:

$$(20)\quad \begin{cases} x=\xi, & \frac{dx}{ds}=\frac{d\xi}{d\varsigma}, & \frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d^2\xi}{d\varsigma^2}, \ldots & \frac{d^nx}{ds^n}=\frac{d^n\xi}{d\varsigma^n}, \\ y=\eta, & \frac{dy}{ds}=\frac{d\eta}{d\varsigma}, & \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{d^2\eta}{d\varsigma^2}, \ldots & \frac{d^ny}{ds^n}=\frac{d^n\eta}{d\varsigma^n}, \\ z=\xi, & \frac{dz}{ds}=\frac{d\zeta}{d\varsigma}, & \frac{d^2z}{ds^2}=\frac{d^2\zeta}{d\varsigma^2}, \ldots & \frac{d^nz}{ds^n}=\frac{d^n\zeta}{d\varsigma^n}, \end{cases}$$

welche alle für den Berührungspunkt der gegebenen Curven erfüllt werden müssen, während jeder der Ausdrücke (19), oder wenigstens einer derselben für denselben Punkt einen von Null verschiedenen Werth bekommt. Erwägt man nun, daß man in Beziehung auf die zweite Curve für die Buchstaben ξ, η, ζ und ς die Buchstaben x, y, z und s substituiren kann, so erhält man unmittelbar folgenden Lehrsatz:

Lehrsatz 5. Wenn zwei sich in einem Punkte berührende Curven gegeben sind, und man betrachtet die Coordinaten x, y, z jeder derselben als Functionen des als unabhängige Veränderliche betrachteten Bogens s, welcher auf jeder dieser Curven über den Berührungspunkt hinaus nach demselben Sinne genommen ist; so ändern nicht blos die Veränderlichen x, y, z und ihre abgeleiteten Functionen der ersten Ordnung:

$$\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}$$

für den Berührungspunkt bei dem Uebergange von der ersten Curve zur zweiten ihre Werthe nicht, sondern dasselbe findet auch bei den successiven abgeleiteten Functionen:

$$\frac{d^2x}{ds^2},\ \frac{d^3x}{ds^3}, \ldots\ \frac{d^2y}{ds^2},\ \frac{d^3y}{ds^3}, \ldots\ \frac{d^2z}{ds^2},\ \frac{d^3z}{ds^3}, \ldots$$

bis zu denjenigen statt, deren Ordnung durch die ganze Zahl ausgedrückt wird, welche der Ordnung der Berührung gleich, oder unmittelbar größer als dieselbe ist. Diese abgeleiteten Functionen sind die letzten, welche die ausgesprochene Bedingung erfüllen, so daß die drei folgenden, oder wenigstens eine derselben bei dem Uebergange von der einen Curve zur andern den Werth verändern.

Zusatz 1. Wenn zwischen den beiden Curven eine Berührung der $n$ten Ordnung stattfindet, wo n eine ganze Zahl bezeichnet, so behält jede der Größen:

$$(21)\quad \begin{cases} x, \frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}, \ldots\ldots \frac{d^nx}{ds^n}, \\ y, \frac{dy}{ds}, \frac{d^2y}{ds^2}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{ds^n}, \\ z, \frac{dz}{ds}, \frac{d^2z}{ds^2}, \ldots\ldots \frac{d^nz}{ds^n}, \end{cases}$$

bei dem Uebergange von der ersten Curve zur zweiten für den Berührungspunkt denselben Werth, während jede der drei Größen:

$$(22)\quad \frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}}, \frac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}}, \frac{d^{n+1}z}{ds^{n+1}},$$

oder wenigstens eine derselben einen neuen Werth bekommt.

Zusatz 2. Es sei

$$(23)\quad r = \mathfrak{F}(x, y, z)$$

eine beliebige Function der drei Veränderlichen x, y, z. Wenn man diese Veränderlichen selbst als Functionen von s betrachtet, welche die Coordinaten der ersten oder zweiten Curve ausdrücken können, so wird r ebenfalls eine Function von s und man findet:

$$(24)\quad \begin{cases} \frac{dr}{ds} = \frac{d\mathfrak{F}(x,y,z)}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{d\mathfrak{F}(x,y,z)}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{d\mathfrak{F}(x,y,z)}{dz}\frac{dz}{ds}, \\ \frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d\mathfrak{F}(x,y,z)}{dx}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d\mathfrak{F}(x,y,z)}{dy}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{d\mathfrak{F}(x,y,z)}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} \\ + \frac{d^2\mathfrak{F}(x,y,z)}{dx^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{d^2\mathfrak{F}(x,y,z)}{dy^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \frac{d^2\mathfrak{F}(x,y,z)}{ds^2}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \\ + 2\frac{d^2\mathfrak{F}(x,y,z)}{dydz}\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds} + 2\frac{d^2\mathfrak{F}(x,y,z)}{dzdx}\frac{dz}{ds}\frac{dx}{ds} + 2\frac{d^2\mathfrak{F}(x,y,z)}{dxdy}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}, \\ \text{etc.}\ldots\ldots \\ \frac{d^nr}{ds^n} = \frac{d\mathfrak{F}(x,y,z)}{dx}\frac{d^nx}{ds^n} + \frac{d\mathfrak{F}(x,y,z)}{dy}\frac{d^ny}{ds^n} + \frac{d\mathfrak{F}(x,y,z)}{dz}\frac{d^nz}{ds^n} + \text{etc.} \end{cases}$$

Nun folgt aber aus diesen letzten Gleichungen in Verbindung mit dem Zusatze 1, daß, wenn zwischen den beiden gegebenen Curven eine Berührung der $n$ten Ordnung stattfindet, jede der Größen:

$$(25)\quad \begin{cases} r=\mathfrak{F}(x,y,z), \dfrac{dr}{ds}=\dfrac{d\mathfrak{F}(x,y,z)}{ds}, \dfrac{d^2r}{ds^2}=\dfrac{d^2\mathfrak{F}(x,y,z)}{ds^2}, \\ \cdots \dfrac{d^nr}{ds^n}=\dfrac{d^n\mathfrak{F}(x,y,z)}{ds^n} \end{cases}$$

bei dem Uebergange von der ersten Curve zu der zweiten für den Berührungspunkt denselben Werth behält. Dieses findet z. B. statt, wenn man für r den vom Anfangspunkte nach dem Punkte (x,y,z) gezogenen Radiusvector nimmt, welcher durch die Formel:

$$(26)\qquad r=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$$

bestimmt wird. Ferner ist zu bemerken, daß die abgeleitete Function:

$$(27)\qquad \frac{d^{n+1}r}{ds^{n+1}}=\frac{d^{n+1}\mathfrak{F}(x,y,z)}{ds^{n+1}},$$

welche durch die Gleichung:

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{d^{n+1}r}{ds^{n+1}}=\dfrac{d\mathfrak{F}(x,y,z)}{dx}\dfrac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}}+\dfrac{d\mathfrak{F}(x,y,z)}{dy}\dfrac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}}+ \\ \qquad \dfrac{d\mathfrak{F}(x,y,z)}{dz}\dfrac{d^{n+1}z}{ds^{n+1}}+\text{etc.}\ldots \end{cases}$$

bestimmt wird, gewöhnlich den Werth verändert, wenn man von der ersten Curve zur zweiten übergeht, weil jeder der Ausdrücke (22), oder wenigstens einer derselben einen neuen Werth bekommt. Dessenungeachtet könnte in gewissen besondern Fällen auch das Gegentheil stattfinden, wenn z. B. die Coefficienten der Ausdrücke (22) oder wenigstens der Coefficient desjenigen, dessen Werth sich ändert, im zweiten Theile der Gleichung (28) durch die dem Berührungspunkte entsprechenden Werth von x, y, z auf Null reducirt würden. Diese Bemerkung ist auch auf die abgeleiteten Functionen:

$$(29)\qquad \frac{d^{n+2}r}{ds^{n+2}}, \frac{d^{n+3}r}{ds^{n+3}}, \text{etc.}\ldots$$

anwendbar.

Zusatz 3. Gesetzt nun, daß statt des Bogens s die Größe $r=\mathfrak{F}(x,y,z)$ zur unabhängigen Veränderlichen genommen würde, so kann man sich vorstellen, daß, da die Coordinaten x, y, z immer Functionen des Bogens s sind, dieser Bogen eine Function von r

werde, und alsdann folgt aus der mehrere Male in Beziehung auf r differenzirten Gleichung (23):

$$(30)\quad \begin{cases} 1 = \dfrac{d\mathfrak{F}(x,y,z)}{ds}\,\dfrac{ds}{dr}, \\ 0 = \dfrac{d\mathfrak{F}(x,y,z)}{ds}\,\dfrac{d^2s}{dr^2} + \dfrac{d^2\mathfrak{F}(x,y,z)}{ds^2}\left(\dfrac{ds}{dr}\right)^2, \\ \text{etc.}\ldots. \\ 0 = \dfrac{d\mathfrak{F}(x,y,z)}{ds}\,\dfrac{d^ns}{dr^n} + \text{etc.}\ldots \end{cases}$$

Nun folgt aber aus den Gleichungen (30) in Verbindung mit Zusatz 3, daß, wenn zwischen den beiden gegebenen Curven eine Berührung der $n$ten Ordnung stattfindet, die Größen:

$$(31)\qquad \frac{ds}{dr},\ \frac{d^2s}{dr^2},\ \text{etc.}\ldots.\ \frac{d^ns}{dr^n}$$

im Allgemeinen für den Berührungspunkt bei dem Uebergange von der ersten Curve zur zweiten dieselben Werthe behalten. Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen:

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dr} = \dfrac{dx}{ds}\,\dfrac{ds}{dr},\ \dfrac{d^2x}{ds^2} = \dfrac{dx}{ds}\,\dfrac{d^2s}{dr^2}\left(\dfrac{ds}{dr}\right)^2,\ \text{etc.}\ldots. \\ \dfrac{d^nx}{dr^n} = \dfrac{dx}{ds}\,\dfrac{d^ns}{dr^n} + \text{etc.}\ldots., \\ \dfrac{dy}{dr} = \dfrac{dy}{ds}\,\dfrac{ds}{dr},\ \dfrac{d^2y}{ds^2} = \dfrac{dy}{ds}\,\dfrac{d^2s}{dr^2} + \dfrac{d^2x}{ds^2}\left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2,\ \text{etc.}\ldots \\ \dfrac{d^ny}{dr^n} = \dfrac{dy}{ds}\,\dfrac{d^ns}{dr^n} + \text{etc.}\ldots. \\ \dfrac{dz}{dr} = \dfrac{dz}{ds}\,\dfrac{ds}{dr},\ \dfrac{d^2z}{dr^2} = \dfrac{dz}{ds}\,\dfrac{d^2s}{dr^2} + \dfrac{d^2z}{ds^2}\left(\dfrac{ds}{dr}\right)^2,\ \text{etc.}\ldots \\ \dfrac{d^nz}{dr^n} = \dfrac{dz}{ds}\,\dfrac{d^ns}{dr^n} + \text{etc.}\ldots. \end{cases}$$

und berücksichtigt den Zusatz 1, so gelangt man zu folgenden Schlüssen:

Wenn zwischen den beiden gegebenen Curven eine Berührung der $n$ten Ordnung stattfindet, und wenn man $r = \mathfrak{F}(x,y,z)$ zur unabhängigen Veränderlichen nimmt, so behalten nicht blos die Coordinaten x, y, z, sondern auch ihre abgeleiteten Functionen bis zur $n$ten Ordnung, nämlich:

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dr}, \frac{d^2x}{dr^2}, \frac{d^3x}{dr^3}, \ldots\ldots \frac{d^nx}{dr^n}, \\ \frac{dy}{dr}, \frac{d^2y}{dr^2}, \frac{d^3y}{dr^3}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{dr^n}, \\ \frac{dz}{dr}, \frac{d^2z}{dr^2}, \frac{d^3z}{dr^3}, \ldots\ldots \frac{d^nz}{dr^n} \end{array}\right.$$

bei dem Uebergange von der ersten Curve zur zweiten für den Berührungspunkt im Allgemeinen dieselben Werthe. Man muß jedoch gewisse besondere Fälle ausnehmen, in welchen die aus den Gleichungen (30) und (32) abgeleiteten Werthe der Ausdrücke (33) oder einige derselben für die eine oder andere Curve unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ erscheinen und sich nothwendig bei dem Uebergange von der einen Curve zur andern verändern. In allen übrigen Fällen findet der Zusatz 1 statt, wenn man für die Veränderliche s die durch eine endliche Gleichung mit den Coordinaten x, y, z verbundene Veränderliche r substituirt; nur kann man nach dieser Substitution nicht immer behaupten, daß wenigstens eine der drei abgeleiteten Functionen:

$$\frac{d^{n+1}x}{dr^{n+1}}, \frac{d^{n+1}y}{dr^{n+1}}, \frac{d^{n+1}z}{dr^{n+1}}$$

bei dem Uebergange von der ersten Curve zur zweiten für den Berührungspunkt den Werth verändert.

Zusatz 4. Wir wollen annehmen, die Ordnung der Berührung der beiden gegebenen Curven sei $= n$, r werde wieder zur unabhängigen Veränderlichen genommen und man bezeichne durch p, q, ... neue Functionen der Coordinaten x, y, z; so hat man:

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{dp}{dr} = \frac{dp}{dx}\frac{dx}{dr} + \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dr} + \frac{dp}{dz}\frac{dz}{dr}, \\ \frac{d^2p}{dr^2} = \frac{dp}{dx}\frac{d^2x}{dr^2} + \frac{dp}{dy}\frac{d^2y}{dr^2} + \frac{dp}{dz}\frac{d^2z}{dr^2} \\ \quad + \frac{d^2p}{dx^2}\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \frac{d^2p}{dy^2}\left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + \frac{d^2p}{dz^2}\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 \\ \quad + 2\frac{d^2p}{dydz}\frac{dy}{dr}\frac{dz}{dr} + 2\frac{d^2p}{dzdx}\frac{dz}{dr}\frac{dx}{dr} + 2\frac{d^2p}{dxdy}\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dr}, \\ \quad \text{etc.} \ldots\ldots \\ \frac{d^np}{dr^n} = \frac{dp}{dx}\frac{d^nx}{dr^n} + \frac{dp}{dy}\frac{d^ny}{dr^n} + \frac{dp}{dz}\frac{d^nz}{dr^n} + \text{etc.} \ldots \end{array}\right.$$

und da die Ausdrücke (33) im Allgemeinen bei dem Uebergange

von der ersten Curve zur zweiten für den Berührungspunkt dieselben Werthe behalten, so ist klar, daß man dasselbe nicht blos von den abgeleiteten Functionen:

$$(35) \qquad \frac{dp}{dr}, \frac{d^2p}{dr^2}, \ldots\ldots \frac{d^np}{dr^n},$$

deren Werthe durch die Gleichungen (34) bestimmt werden, sondern auch von den Differenzialen:

$$(36) \qquad dp, \; d^2p, \ldots\ldots d^np$$

sagen kann. Zu ähnlichen Schlüssen würde man gelangen, wenn man die Function q für die Function p substituirte, und endlich könnte man auch die Größen p, q, r auf alle möglichen Arten mit einander vertauschen. So fände man z. B. daß die in Beziehung auf die als unabhängig veränderlich betrachtete Größe p genommenen Differenziale:

$$(37) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dq, \; d^2q, \ldots\ldots d^nq, \\ dr, \; d^2r, \ldots\ldots d^nr \end{array} \right.$$

bei dem Uebergange von der einen Curve zur andern für den Berührungspunkt im Allgemeinen dieselben Werthe behalten.

Zusatz 5. Nichts hindert, in den Zusätzen 2 und 3

$$r = x$$

zu setzen. Alsdann reduciren sich von den Ausdrücken (33), welche die Veränderliche x enthalten, der erste auf die Einheit und die übrigen auf Null und die, welche y oder z enthalten, verwandeln sich resp. in:

$$(38) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}, \\ \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^nz}{dx^n}. \end{array} \right.$$

Wenn also zwischen den beiden gegebenen Curven eine Berührung der $n$ten Ordnung stattfindet, und man nimmt x zur unabhängigen Veränderlichen, so behalten nicht blos die Coordinaten y, z, sondern auch ihre successiven abgeleiteten Functionen bis zur $n$ten Ordnung bei dem Uebergange von der ersten Curve zur zweiten für den Berührungspunkt im Allgemeinen dieselben Werthe. Die abgeleiteten Functionen von der Ordnung $n+1$ und den folgenden Ordnungen bekommen aber bei diesem Uebergange gewöhnlich andere Werthe.

Jedoch kann in gewissen besondern Fällen nach der bereits für ebene Curven gemachten Bemerkung (Seite 111) auch das Gegentheil stattfinden.

Wenn die gemeinschaftliche Tangente der beiden Curven mit der Axe der x keinen rechten Winkel bildet, so verändert jede der Größen:

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}, \quad \frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}}, \tag{39}$$

oder wenigstens eine derselben, wie bereits bemerkt worden (siehe Lehrs. 3 Zus. 3) bei dem Uebergange von der einen Curve zur andern nothwendig den Werth.

Zum Schlusse dieser Vorlesung wollen wir noch bemerken, daß man die Axe der x immer so wählen kann, daß sie mit der gemeinschaftlichen Tangente der beiden Curven keinen rechten Winkel bildet. Verbindet man alsdann den Zusatz 3 des Lehrsatzes 3 mit dem Lehrsatze 1 der achtzehnten Vorlesung, so ergibt sich allgemein, daß zwei Curven, zwischen welchen eine Berührung der 2ten oder einer höhern Ordnung stattfindet, einander osculiren, und umgekehrt, daß zwischen zwei einander osculirenden Curven im Osculationspunkte immer eine Berührung der zweiten oder einer höhern Ordnung stattfindet.

Zwei und zwanzigste Vorlesung.

Ueber die verschiedenen Ordnungen der Berührung krummer Flächen.

Wir wollen zwei krumme Flächen betrachten, welche sich in einem gegebenen Punkte (P) berühren. Wenn man durch den Punkt (P) eine Normalebene der beiden krummen Flächen legt, so berühren die beiden Durchschnittslinien einander, und wenn man diese Ebene sich um die Normale drehen läßt, so verändern diese Durchschnittslinien im Allgemeinen ihre Lage und Form.

Was die Zahl anlangt, welche die Ordnung der Berührung dieser beiden Durchschnittslinien ausdrückt, so kann sie entweder immer dieselbe bleiben, oder ihren Werth mit der Lage der Normalebene verändern. Wenn diese Zahl unveränderlich ist, oder ihren kleinsten Werth im entgegengesetzten Falle hat, so dient sie als Maß der Ordnung der Berührung der beiden krummen Flächen. Es sei diese Ordnung $= a$ und (Q), (R) seien die Punkte, wo die Durchschnittscurven der beiden krummen Flächen mit einer beliebigen Normalebene, d. h. mit einer Ebene, welche durch die Normale geht, von dem aus dem Punkte (P) als Mittelpunkt mit einem sehr kleinen Halbmesser i beschriebenen Kreise geschnitten werden. Wenn man diesen Halbmesser als eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung betrachtet, so ist die Entfernung QR, welche mit der Lage der Normalebene veränderlich ist, selbst eine unendlich kleine Größe, deren Ordnung durch eine constante oder veränderliche Zahl ausgedrückt wird, deren einziger oder kleinster Werth $= a+1$ ist.

Denken wir uns nun durch den auf der ersten krummen Fläche liegenden Punkt (Q) eine zu einer Geraden, welche mit der gemeinschaftlichen Berührungsebene der beiden krummen Flächen einen merklich von Null verschiedenen Winkel δ bildet, der aber kleiner als, oder höchstens $= \frac{\pi}{2}$ ist, parallele Secante gezogen, welche die zweite krumme Fläche im Punkte (S) trifft; so ist in dem Dreiecke QRS die Seite RS fast zur Berührungsebene parallel, weil sie zwischen zwei Punkten der zweiten krummen Fläche liegt, die dem Berührungspunkte sehr nahe liegen und mit den Seiten QR,

QS offenbar endliche Winkel bildet, wovon der erste sehr wenig von einem rechten verschieden ist, während der zweite gleich oder größer als δ ist. Wenn man also durch I eine unendlich kleine Größe und durch $\triangle$ einen zwischen den Grenzen δ und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Winkel bezeichnet; so hat man:

$$QS = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+I\right)}{\sin\triangle} QR.$$

Aus dieser letzten Formel folgt, daß die unendlich kleine Entfernung QS für alle Lagen der Normalebene von derselben Ordnung ist als die Entfernung QR. Da ferner das Verhältniß zwischen den vom Punkte (P) auf die Gerade QS oder ihre Verlängerung gefällten Perpendikel und dem Radiusvector $PQ = i$ dem Sinus des Winkels PQS gleich ist, welchen die Gerade QS mit einer fast zu der Berührungsebene parallelen Geraden PQ bildet und folglich eine endliche, von Null verschiedene Größe hat; so ist dieses Perpendikel offenbar eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung. Aus diesen verschiedenen Bemerkungen ergibt sich unmittelbar folgender Lehrsatz:

Lehrsatz 1. Die Ordnung der Berührung zwei krummer Flächen, welche sich in einem gegebenen Punkte (P) berühren, ist um eine Einheit kleiner, als der einzige oder der kleinste Werth der Zahl, welche die Ordnung der unendlich kleinen Entfernung zwischen den Punkten (Q), (S), wo diese krummen Flächen von einer Secante geschnitten werden, welche mit ihrer gemeinschaftlichen Berührungsebene einen merklichen Winkel bildet, ausdrückt, wenn die Entfernung des Berührungspunktes von der erwähnten Secante als eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung betrachtet wird.

Wir wollen annehmen, es wäre durch den Punkt (P) eine beliebige Ebene gelegt, welche mit der Berührungsebene einen merklichen Winkel bildet, so schneidet diese Ebene die beiden krummen Flächen nach zwei neuen Curven. Ferner kann man annehmen, daß die vorhin erwähnte Secante mit einer in dieser Ebene liegenden Geraden zusammenfalle, und wenn man alsdann den vorhergehenden Lehrsatz mit dem Lehrsatze 3 der neunten Vorlesung vergleicht, so ergibt sich leicht folgender Lehrsatz:

Lehrsatz 2. Wenn zwischen zwei krummen Flächen in einem gegebenen Punkte eine Berührung der $a$ten Ordnung stattfindet, so schneidet jede normale oder schiefe Ebene, welche mit der gemeinschaftlichen Berührungsebene beider krummen Flächen einen merklichen Winkel bildet, die letztern nach zwei Curven, zwischen

welchen eine Berührung von der Ordnung a oder von einer höhern Ordnung stattfindet.

Hierbei ist wohl zu bemerken, daß die Durchschnitte der beiden krummen Flächen mit einer durch den gemeinschaftlichen Punkt gehenden normalen oder schiefen Ebene nicht nur eine Berührung von einer weit höhern als der $a$ten Ordnung mit einander haben, sondern daß sie in gewissen Fällen ganz mit einander zusammenfallen können, und alsdann bekommt die Zahl, welche die Ordnung der Berührung der beiden Durchschnittscurven ausdrückt, einen unendlich großen Werth. Ferner ist zu bemerken, daß sich diese beiden Durchschnittscurven zuweilen auf eine einzige gerade Linie reduciren, und als Beispiel kann die gemeinschaftliche Erzeugungslinie zweier Kegel- oder Cylinderflächen, welche sich in einem gegebenen Punkte berühren, angeführt werden.

Wenn die beiden krummen Flächen durch zwei Gleichungen zwischen den geradlinigen Coordinaten x, y, z ausgedrückt werden, und wenn die durch den gemeinschaftlichen Punkt gelegte Berührungsebene nicht fast zu der Axe der z parallel ist, so ergibt sich, wenn die Secante QS zu dieser Axe parallel angenommen wird, aus dem Lehrsatze 1 unmittelbar der folgende:

Lehrsatz 3. Um die Ordnung der Berührung zwei krummer Flächen zu erhalten, welche sich in einem Punkte berühren, worin die Berührungsebene nicht zu der Axe der z parallel ist, braucht man nur eine dem Berührungspunkte sehr nahe liegende Ordinate zu ziehen und den einzigen oder kleinsten Werth der constanten oder veränderlichen Zahl zu suchen, welche die Ordnung des zwischen den beiden krummen Flächen liegenden unendlich kleinen Theiles der Ordinate ausdrückt, wenn die Entfernung des Berührungspunktes von dieser Ordinate als eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung betrachtet wird; so gibt dieser kleinste Werth, um eine Einheit vermindert, die Ordnung der Berührung an.

Zusatz 1. Es seien

$$(1) \qquad z = f(x, y), \qquad (2) \qquad z = F(x, y)$$

die Gleichungen der beiden krummen Flächen, so haben dieselben einen gemeinschaftlichen Punkt, welcher einem Systeme gegebener Werthe der Veränderlichen x, y, entspricht und in diesem Punkte eine nicht zu der Axe der z parallele gemeinschaftliche Berührungsebene (s. Vorles. 16 S. 233 und 234), wenn für die gegebenen Werthe von x, y die Gleichungen (1) und (2) nicht blos für die Ordinate z, sondern auch für ihre partiellen abgeleiteten Functionen $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$ dieselben Werthe geben, so daß den Gleichungen:

$$(3) \qquad f(x, y) = F(x, y),$$

und:

$$(4) \qquad \frac{df(x,y)}{dx} = \frac{dF(x,y)}{dx}, \quad \frac{df(x,y)}{dy} = \frac{dF(x,y)}{dy}$$

Genüge geschieht und die beiden Theile jeder derselben endliche Werthe behalten. In dieser Voraussetzung wird die Differenz:

$$(5) \qquad F(x,y) - f(x,y),$$

welche für die dem Berührungspunkte entsprechenden Werthe von x und y verschwindet, eine unendlich kleine Größe, wenn die Veränderlichen x, y unendlich kleine Incremente $\triangle x, \triangle y$ bekommen, und wenn man die Entfernung:

$$(6) \qquad \sqrt{(\triangle x^2 + \triangle y^2)}$$

als eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung betrachtet, so ist die Ordnung der unendlich kleinen Größe, welche den neuen Werth von:

$$F(x,y) - f(x,y),$$

ausdrückt, um eine Einheit höher als die Ordnung der Berührung der beiden krummen Flächen. Uebrigens ist wohl zu bemerken, daß der Ausdruck (6) eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung ist, wenn jedes der Incremente $\triangle x$, $\triangle y$ von der ersten Ordnung, oder wenn eins derselben von der ersten Ordnung und das andere Null oder von einer höhern Ordnung ist.

Zusatz 2. Wenn sich die beiden krummen Flächen in einem Punkte der Axe der z berühren, aber so, daß diese Axe nicht in der durch den Berührungspunkt gelegten Berührungsebene liegt, so ist es zur Bestimmung der Ordnung der Berührung nach dem eben Gesagten hinreichend, die Zahl zu suchen, welche die Ordnung der Differenz $F(x,y) - f(x,y)$ ausdrückt, wenn man die beiden Veränderlichen x, y als unendlich kleine Größen der ersten Ordnung betrachtet, und diese Zahl um eine Einheit zu vermindern. Verfährt man auf diese Weise, so ergibt sich, daß die durch die vier Gleichungen:

$$z = x^2 + y^2, \quad z = x^3 + y^3,$$
$$z = x^2 + y^3, \quad z = x^3 + y^2,$$

ausgedrückten krummen Flächen im Anfangspunkte der Coordinaten eine Berührung der ersten Ordnung mit einander eingehen, während zwischen den beiden krummen Flächen:

$$z = x^n + y^n, \quad z = x^{n+1} + y^{n+1},$$

eine Berührung der $n$ten Ordnung, und zwischen den beiden krummen Flächen:

$$z = x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}, \quad z = x^{\frac{4}{2}} + y^{\frac{4}{2}},$$

eine Berührung von der Ordnung $\frac{1}{4}-1=\frac{1}{4}$ in demselben Punkte stattfindet.

Zusatz 3. Wir wollen annehmen, daß die beiden krummen Flächen (1) und (2) einen, den Coordinaten x, y entsprechenden gemeinschaftlichen Punkt und in diesem Punkte eine gemeinschaftliche, nicht zu der Axe der z parallele Berührungsebene haben, daß zwischen ihnen eine Berührung von der Ordnung a stattfindet und daß ferner n die ganze Zahl bezeichnet, welche unmittelbar größer ist als a; so verschwindet die Differenz:

$$(5) \qquad F(x, y)-f(x, y),$$

und wenn man durch $\triangle x, \triangle y$ unendlich kleine, den Coordinaten x, y ertheilte Incremente der ersten Ordnung bezeichnet, so ist der Ausdruck:

$$(7) \qquad F(x+\triangle x,\ y+\triangle y)-f(x+\triangle x,\ y+\triangle y)$$

nach Zusatz 1 eine unendlich kleine Größe von der Ordnung $a+1$. Damit ferner die Incremente $\triangle x, \triangle y$ unendlich kleine Größen der ersten Ordnung sind, braucht man nur:

$$(8) \qquad \triangle x=\alpha dx, \quad \triangle y=\alpha dy,$$

zu nehmen, wo α eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung bezeichnet und die Differenziale dx, dy endliche Werthe erhalten. Alsdann erscheint der Ausdruck (7) unter der Form:

$$(9) \qquad F(x+\alpha dx,\ y+\alpha dy)-f(x+\alpha dx,\ y+\alpha dy).$$

Wenn man also die Veränderliche a als eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung betrachtet, so ist der Ausdruck (9) in der gemachten Voraussetzung eine unendlich kleine Größe von der Ordnung $a+1$, welche Werthe man übrigens den Differenzialen dx, dy auch beilegen mag.

Setzen wir nun der Kürze wegen:

$$(10) \qquad F(x+\alpha dx,\ y+\alpha dy)-f(x+\alpha dx,\ y+\alpha dy)=\psi(\alpha).$$

so ist nach dem in der Differenzialr. Vorles. 6 Gesagten $\psi^{(n+1)}(\alpha)$ die erste der Größen:

$$\psi(\alpha),\ \psi'(\alpha),\ \psi''(\alpha),$$

welche nicht mehr mit α verschwindet, oder mit andern Worten, $\psi^{(n+1)}(0)$ ist die erste der Größen:

$$\psi(0),\ \psi'(0),\ \psi''(0),\ \text{etc.}\ldots,$$

welche einen von Null verschiedenen Werth bekommt, und man hat folglich:

$$(11) \qquad \psi(0)=0,\ \psi'(0)=0,\ \psi''(0)=0,\ \ldots\ \psi^{(n)}(0)=0.$$

Ferner ist nach dem in der Differenzialrechnung Vorlesung 19 Gesagten:

$$(12)\quad \begin{cases} \psi(0) = F(x,y) - f(x,y), \\ \psi'(0) = dF(x,y) - df(x,y), \\ \psi''(0) = d^2F(x,y) - d^2f(x,y), \\ \text{etc.}\ldots. \\ \psi^{(n)}(0) = d^nF(x,y) - d^nf(x,y). \end{cases}$$

Man hat also für den gemeinschaftlichen Punkt der beiden krummen Flächen:

$$(13)\quad \begin{cases} F(x,y) = f(x,y), \\ dF(x,y) = df(x,y), \\ d^2F(x,y) = d^2f(x,y), \\ \text{etc}\ldots., \\ d^nF(x,y) = d^nf(x,y), \end{cases}$$

oder was dasselbe ist:

$$(14)\quad \begin{cases} F(x,y) = f(x,y), \\ \dfrac{dF(x,y)}{dx}dx + \dfrac{dF(x,y)}{dy}dy = \dfrac{df(x,y)}{dx}dx + \dfrac{df(x,y)}{dy}dy, \\ \dfrac{d^2F(x,y)}{dx^2}dx^2 + 2\dfrac{d^2F(x,y)}{dxdy}dxdy + \dfrac{d^2F(x,y)}{dy^2}dy^2 \\ = \dfrac{d^2f(x,y)}{dx^2}dx^2 + 2\dfrac{d^2f(x,y)}{dxdy}dxdy + \dfrac{d^2f(x,y)}{dy^2}dy^2, \\ \text{etc.}\ldots. \\ \dfrac{d^nF(x,y)}{dx^n}dx^n + \dfrac{n}{1}\dfrac{d^nF(x,y)}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy + \ldots + \dfrac{d^nF(x,y)}{dy^n}dy^n \\ = \dfrac{d^nf(x,y)}{dx^n}dx^n + \dfrac{n}{1}\dfrac{d^nf(x,y)}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy + \ldots + \dfrac{d^nf(x,y)}{dy^n}dy^n. \end{cases}$$

Da diese letzten Gleichungen stattfinden müssen, welche Werthe man den Differenzialen dx, dy auch geben mag, so haben sie offenbar die nachstehenden Gleichungen zur Folge:

$$(15)\quad \begin{cases} F(x, y) = f(x, y), \\ \dfrac{dF(x,y)}{dx} = \dfrac{df(x,y)}{dx}, \quad \dfrac{dF(x,y)}{dy} = \dfrac{df(x,y)}{dy}, \\ \dfrac{d^2F(x,y)}{dx^2} = \dfrac{d^2f(x,y)}{dx^2}, \quad \dfrac{d^2F(x,y)}{dxdy} = \dfrac{d^2f(x,y)}{dxdy}, \\ \dfrac{d^2F(x,y)}{dy^2} = \dfrac{d^2f(x,y)}{dy^2}, \quad \text{etc.} \\ \dfrac{d^nF(x,y)}{dx^n} = \dfrac{d^nf(x,y)}{dx^n}, \quad \dfrac{d^nF(x,y)}{dx^{n-1}dy} = \dfrac{d^nf(x,y)}{dx^{n-1}dy}, \\ \dfrac{d^nF(x,y)}{dxdy^{n-1}} = \dfrac{d^nf(x,y)}{dxdy^{n-1}}, \quad \dfrac{d^nF(x,y)}{dy^n} = \dfrac{d^nf(x,y)}{dy^n}. \end{cases}$$

Wenn sich also zwei krumme Flächen in einem Punkte berühren, worin die Berührungsebene nicht zu der Axe der z parallel ist, so ist für diesen Punkt nicht blos der Werth der als Function der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y betrachteten Ordinate z und der Werth jeder ihrer partiellen abgeleiteten Functionen der ersten Ordnung:

$$(16)\quad \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dy},$$

bei dem Uebergange von der ersten Curve zur zweiten unveränderlich, sondern dasselbe gilt auch von den partiellen abgeleiteten Functionen:

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2z}{dx^2}, \quad \dfrac{d^2z}{dxdy}, \quad \dfrac{d^2z}{dy^2}, \\ \dfrac{d^3z}{dx^3}, \quad \dfrac{d^3z}{dx^2dy}, \quad \dfrac{d^3z}{dxdy^2}, \quad \dfrac{d^3z}{dy^3}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

bis zu denen, deren Ordnungszahl der ganzen Zahl gleich ist, welche der Ordnungszahl der Berührung gleich oder unmittelbar größer als sie ist. Mit andern Worten, wenn man diese ganze Zahl mit n bezeichnet, so behalten die Ordinate z und ihre Totaldifferenziale der verschiedenen Ordnungen bis zu dem von der Ordnung n, d. h. die Größen:

$$(18)\quad z, \quad dz, \quad d^2z, \quad \ldots \quad d^{n-1}z, \quad d^nz$$

bei dem Uebergange von der ersten krummen Fläche zur zweiten dieselben Werthe, welche Werthe man auch den Differenzialen dx, dy der unabhängigen Veränderlichen beilegen mag.

Zusatz 4. Wenn zwischen den beiden krummen Flächen eine Berührung der $n$ten Ordnung stattfände und die gemeinschaftliche

Berührungsebene würde zu der Axe der z parallel, so erhielte man, wenn man den Werthen der sich auf den Berührungspunkt beziehenden Coordinaten x, y unendlich kleine Incremente der ersten Ordnung beilegte, für die entsprechenden Werthe der Differenz:

$$F(x, y) - f(x, y)$$

im Allgemeinen keine unendlich kleine Größe von der Ordnung $a+1$; jedoch könnte man die eben angewandte Methode noch zur Bestimmung der Ordnung der Berührung anwenden, wenn man für die Veränderliche z eine der Veränderlichen x, y substituirte. Um z. B. zu zeigen, daß zwischen den beiden krummen Flächen:

$$z = x^{\frac{1}{3}}(1-y^2)^{\frac{1}{3}}, \quad z = x^{\frac{1}{4}}(1-y^3)^{\frac{1}{4}},$$

welche die Ebene der yz im Anfangspunkte berühren, in diesem Punkte eine Berührung der zweiten Ordnung stattfindet, braucht man nur zu bemerken, daß ihre für x aufgelösten Gleichungen die Form annehmen:

$$x = \frac{z^3}{1-y^2}, \quad x = \frac{z^4}{1-y^3},$$

und daß die Differenz:

$$\frac{z^4}{1-y^3} - \frac{z^3}{1-y^2}$$

eine unendlich kleine Größe der dritten Ordnung ist, wenn man y und z als unendlich kleine Größen der ersten Ordnung betrachtet. Was die Differenz:

$$F(x, y) - f(x, y)$$

anlangt, so reducirt sie sich in diesem Beispiele auf:

$$x^{\frac{1}{4}}(1-y^3)^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{3}}(1-y^2)^{\frac{1}{3}}$$

und wenn man x und y als unendlich kleine Größen der ersten Ordnung betrachtet, so ist sie keine unendlich kleine Größe von der zweiten Ordnung mehr, sondern blos von der Ordnung $\frac{1}{4}$.

Zusatz 5. Wenn die gemeinschaftliche Berührungsebene der beiden krummen Flächen nicht zu der Axe der z parallel und die Ordnung der Berührung eine ganze Zahl ist, so braucht man zur Bestimmung dieser Ordnung nur die letzte der Gleichungen:

$$(19) \quad \begin{cases} F(x, y) = f(x, y), \; dF(x, y) = df(x, y), \\ d^2F(x, y) = d^2f(x, y), \text{ etc.} \ldots \end{cases}$$

aufzusuchen, welche für den Berührungspunkt, unabhängig von den, den Differenzialen dx, dy der unabhängigen Veränderlichen beigelegten Werthen, erfüllt wird, und alsdann ist die Ordnung der in dieser letzten Gleichung vorkommenden Differenziale genau die gesuchte Ordnung der Berührung.

Zum Schlusse dieser Vorlesung wollen wir noch bemerken, daß man die Axe der z immer so wählen kann, daß sie nicht zu der durch den Berührungspunkt der beiden krummen Flächen gelegten Berührungsebene parallel ist. Dieses vorausgesetzt, ergibt sich aus Zusatz 3 des 3ten Lehrsatzes in Verbindung mit dem Lehrsatze 2 der zwanzigsten Vorlesung, daß zwei krumme Flächen, zwischen welchen eine Berührung der zweiten oder einer höhern Ordnung stattfindet, einander osculiren und umgekehrt, daß zwischen zwei einander osculirenden krummen Flächen im Osculationspunkte immer eine Berührung der zweiten oder einer höhern Ordnung stattfindet.

Drei und zwanzigste Vorlesung.

Rectification ebener Curven oder Curven von doppelter Krümmung.

Wir wollen eine ebene Curve betrachten, welche durch eine Gleichung zwischen den beiden rechtwinkligen Coordinaten x, y ausgedrückt wird, oder eine Curve von doppelter Krümmung, welche durch zwei Gleichungen zwischen den drei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z ausgedrückt wird und auf dieser Curve einen zwischen einem festen Punkte (A) und dem beweglichen Punkte, dessen Abscisse x ist, liegenden Bogen. Wenn man diesen mit dem Zeichen $+$ oder $-$ genommenen Bogen, jenachdem er von dem Punkte (A) aus in der einen oder andern Richtung genommen ist, mit s bezeichnet und die Neigung der Curve gegen die Axe der x mit τ; so hat man nach den Formeln (10) der fünften Vorlesung und den Formeln (7) der sechszehnten Vorlesung:

$$sec\,\tau = \pm \frac{ds}{dx},$$

oder was dasselbe ist:

$$(1) \qquad ds = \pm sec\,\tau \,.\, dx,$$

wo das doppelte Zeichen $\pm$ auf das Zeichen $+$ reducirt werden muß, wenn der Bogen s mit der Abscisse x zugleich wächst und auf das Zeichen $-$ im entgegengesetzten Falle. Nun seien (P), (Q) zwei verschiedene Punkte der Curve, welche resp. durch das System der Coordinaten x_0, y_0 und durch das System der Coordinaten X, Y bestimmt werden und (p) der bewegliche Punkt, welcher den veränderlichen Coordinaten x, y entspricht. Ferner wollen wir annehmen, daß die Abscisse x beständig wächst, oder beständig abnimmt, während der bewegliche Punkt (p) von der Lage (P) zu der Lage (Q) übergeht und den Bogen PQ beschreibt. Endlich seien s_0 und S die beiden Werthe von s, welche $x = x_0$ und $x = X$ entsprechen, so ergibt sich aus der Gleichung (1), wenn man ihre beiden Theile von $x = x_0$ aus intregrirt:

$$(2) \qquad s - s_0 = \pm \int_{x_0}^{x} sec\,\tau \,.\, dx,$$

und wenn man $x = X$ setzt:

$$(3) \qquad S - s_0 = \pm \int_{x_0}^{X} ces\tau . dx.$$

Vermittelst der Formel (3) kann man immer die Länge des Bogens PQ, welche dem Zahlenwerthe der Differenz $S - s_0$ gleich ist, bestimmen. Man findet z. B.:

$$(4) \qquad S - s_0 = \int_{x_0}^{X} sec\tau\, dx,$$

wenn die Differenzen $S - s_0$, $X - x_0$ Größen von demselben Zeichen, und

$$(5) \qquad S - s_0 = - \int_{x_0}^{X} sec\tau\, dx,$$

wenn diese Differenzen Größen von entgegengesetzten Zeichen sind. Wenn der Punkt (P) mit dem Punkte (A) zusammenfiele, so wäre $s_0 = 0$. Nimmt man alsdann zur Fixirung der Begriffe an, daß die Größen $s, S, x - x_0, X - x_0$ positiv sind, so ergibt sich aus der Gleichung (2):

$$(6) \qquad s = \int_{x_0}^{x} sec\tau\, dx,$$

und aus der Gleichung (3):

$$(7) \qquad S = \int_{x_0}^{X} sec\tau\, dx.$$

Wenn man ferner die Abscisse x als unabhängige Veränderliche betrachtet, so wird der Werth von $sec\tau$ für eine ebene Curve nach der ersten Vorlesung durch die Gleichung:

$$(8) \qquad sec\tau = \sqrt{(1 + y'^2)} = \pm \frac{N}{y}$$

bestimmt, wo N die Normale ist. Folglich gibt alsdann die Gleichung (6):

$$(9) \qquad s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{(1 + y'^2)}\, dx.$$

Dagegen findet man für eine Curve von doppelter Krümmung (s. Vorles. 16):

$$(10) \qquad sec\tau = \sqrt{(1 + y'^2 + z'^2)},$$

und folglich:

$$(11) \qquad s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{(1 + y'^2 + z'^2)}\, dx.$$

Wenn die Neigung τ constant wird, wie solches geschieht, wenn sich die gegebene Curve auf eine gerade Linie oder auf eine Schraubenlinie reducirt, die auf einem Cylinder beschrieben ist, dessen Axe mit der Axe der x zusammenfällt; so gibt die Gleichung (6):

$$(12) \qquad s = \sec\tau \int_{x_0}^{x} dx = (x - x_0) \sec\tau.$$

Da nun $x - x_0$ genau die Projection des Bogens s auf die Axe der x ausdrückt, so kann man folgenden Lehrsatz aufstellen:

Lehrsatz. Wenn eine Linie in allen ihren Punkten dieselbe Neigung gegen die Axe der x hat, so ist eine auf derselben genommene Länge dem Producte aus ihrer Projection auf die Axe der x und der Secante ihrer Neigung gleich.

Wir wollen nun die Formel (6) auf einige Beispiele anwenden:

Beispiel 1. Wenn die gegebene Curve der durch die Gleichung:

$$(13) \qquad x^2 + y^2 = R^2$$

ausgedrückte Kreis ist, so hat man $N = R$. Folglich gibt die Formel (8):

$$(14) \qquad \sec\tau = \pm \frac{N}{y} = \frac{R}{\sqrt{(R^2 - x^2)}},$$

und aus der Gleichung (6) folgt:

$$(15) \qquad s = R \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}} = R\left(\arcsin\frac{x}{R} - \arcsin\frac{x_0}{R}\right).$$

Dieses Resultat war leicht vorher zu sehen; denn die Differenz:

$$\arcsin\frac{x}{R} - \arcsin\frac{x_0}{R}$$

zwischen den beiden Bogen des Kreises von dem Halbmesser $= 1$ ist das Maß des Winkels zwischen den vom Anfangspunkte nach den den Abscissen x_0 und x entsprechenden Punkten des gegebenen Kreises gezogenen Radienvectoren. Folglich ist das Product aus dieser Differenz und dem Halbmesser R das Maß des Bogens des gegenen Kreises, welcher zwischen den betrachteten Punkten liegt.

Beispiel 2. Wir wollen nun die durch die Gleichung:

$$(16) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ausgedrückte Ellipse betrachten, wo a und b resp. die halbe große und kleine Axe derselben bezeichnen. In diesem Falle hat man:

$$(17) \qquad \frac{x}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=0,\ y'^2=\frac{b^4x^2}{a^4y^2}=\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)},$$

$$(18) \qquad sec\,\tau=\sqrt{\left[\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}\right]}.$$

Wenn man ferner die Excentricität der Ellipse, d. h. das Verhältniß zwischen der Entfernung eines Brennpunktes vom Mittelpunkte und der halben großen Axe mit ε bezeichnet, so hat man (s. Vorles. 11):

$$(19) \qquad a\varepsilon=\sqrt{(a^2-b^2)}.$$

Hiernach verwandelt sich der Werth von $sec\,\tau$ in:

$$(20) \qquad sec\,\tau=\sqrt{\left(\frac{a^2-\varepsilon^2x^2}{a^2-x^2}\right)},$$

und aus der Gleichung (6) folgt:

$$(21) \qquad s=\int_{x_0}^{x}\sqrt{\left(\frac{a^2-\varepsilon^2x^2}{a^2-x^2}\right)}dx.$$

Wenn man in der Formel (21) die Grenzen des Integrales in Beziehung auf x resp. durch 0 und a bezeichnet, so reducirt sich der Werth von s auf:

$$(22) \qquad s=\int_{0}^{a}\sqrt{\left(\frac{a^2-\varepsilon^2x^2}{a^2-x^2}\right)}dx,$$

und drückt den vierten Theil des Umfanges der Ellipse aus. Folglich wird der ganze Umfang derselben durch die Größe:

$$(23) \qquad 4\int_{0}^{a}\sqrt{\left(\frac{a^2-\varepsilon^2x^2}{a^2-x^2}\right)}dx$$

ausgedrückt, worin man blos $x=at$ zu setzen braucht, um sie auf die Form:

$$(24) \qquad 4a\int_{0}^{1}\sqrt{\left(\frac{1-\varepsilon^2t^2}{1-t^2}\right)}dt$$

sche Linie ist, welche wir bereits in der ersten Vorlesung betrachtet haben, und welche durch die Gleichung:

$$y = al(x) \tag{36}$$

ausgedrückt wird, wo l das Zeichen der in dem Systeme von der Basis e genommenen Logarithmen ist, so findet man:

$$tang\tau = y' = \frac{a}{x}, \tag{37}$$

und folglich:

$$x = a\cot\tau, \quad dx = -a\frac{d\tau}{\sin^2\tau}. \tag{38}$$

Bezeichnet man nun durch τ_0 den $x = x_0$ entsprechenden Werth von τ, so folgt aus der Gleichung (6):

$$s = -a\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{d\tau}{\cos\tau\sin^2\tau}. \tag{39}$$

Außerdem hat man:

$$\frac{1}{\cos\tau\sin^2\tau} = \frac{\cos^2\tau + \sin^2\tau}{\cos\tau\sin^2\tau} = \frac{\cos\tau}{\sin^2\tau} + \frac{1}{\cos\tau},$$

und ferner:

$$\int\frac{\cos\tau d\tau}{\sin^2\tau} = -\frac{1}{\sin\tau} + const.,$$

$$\int\frac{d\tau}{\cos\tau} = \int\frac{\frac{1}{2}d\tau}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right)}$$

$$= l\,tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right) + const.$$

Folglich gibt die Gleichung (39):

$$s = a\left[\frac{1}{\sin\tau} - \frac{1}{\sin\tau_0} - l\,tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right) + l\,tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau_0}{2}\right)\right]. \tag{40}$$

Wenn man die Axen der x und der y mit einander vertauscht, so verwandelt sich die Gleichung der logarithmischen Linie, wie bereits in der zweiten Vorlesung bemerkt ist, in:

(31) $y^2 = 2px$

ausgedrückte Parabel ist, so hat man:

(32) $yy' = p, \quad y' = \frac{p}{y} = \pm\sqrt{\left(1+\frac{p}{2x}\right)},$

(33) $sec\tau = \sqrt{\left(1+\frac{p}{2x}\right)},$

und folglich:

(34) $s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\left(1+\frac{p}{2x}\right)}\, dx.$

Zur Bestimmung des Werthes des im zweiten Theile der Gleichung (34) vorkommenden Integrales setze man:

$$\sqrt{\left(1+\frac{p}{2x}\right)} = t, \text{ oder } x = \frac{p}{2(t^2-1)},$$

so findet man:

$$\int\sqrt{\left(1+\frac{p}{2x}\right)}dx = \int t\,dx = tx - \int x\,dt = tx - \frac{p}{2}\int\frac{dt}{t^2-1}$$

$$= tx - \frac{p}{4}l\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + const.$$

$$= x\sqrt{\left(1+\frac{p}{2x}\right)} - \frac{p}{4}l\left\{\frac{\sqrt{\left(1+\frac{p}{2x}\right)}-1}{\sqrt{\left(1+\frac{p}{2x}\right)}+1}\right\} + const.$$

Setzt man nun der Einfachheit wegen $x_0 = 0$, so ergibt sich aus der Formel (34):

(35) $$s = x\sqrt{\left(1+\frac{p}{2x}\right)} - \frac{p}{4}l\left\{\frac{\sqrt{\left(1+\frac{p}{2x}\right)}-1}{\sqrt{\left(1+\frac{p}{2x}\right)}+1}\right\}.$$

Dieses ist der Werth des Bogens der Parabel, welcher zwischen ihrem Scheitel und dem der Abscisse x entsprechenden Punkte derselben liegt.

Beispiel 5. Wenn die gegebene Curve die logarithmi-

$$(47) \qquad y' = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2},$$

und folglich:

$$(48) \qquad sec\,\tau = \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}.$$

Läßt man nun x_0 verschwinden, so folgt aus der Gleichung (6):

$$(49) \qquad s = \int_0^x \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} dx = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2} = ay'.$$

Außerdem sieht man leicht ein, daß der der Abscisse $x = 0$ entsprechende Punkt der Curve (46) der am tiefsten liegende ist. Folglich ist in dieser Curve der von dem tiefsten Punkte an gezählte Bogen s der Größe $y' = tang\,\tau$, d. h. der trigonometrischen Tangente der dem Endpunkte dieses Bogens entsprechenden Neigung proportional.

Kommen wir nun wieder auf die Gleichung (1) zurück. Wenn man darin y für x setzt, so muß man zu gleicher Zeit $\frac{\pi}{2} - \tau$ für τ setzen und man hat folglich:

$$(50) \qquad ds = \pm\, cosec\,\tau \,.\, dy.$$

Nun wollen wir annehmen, daß die Ordinate y des beweglichen Punktes (p) beständig zu- oder beständig abnimmt, während dieser Punkt den Bogen PQ beschreibt, dessen beide Endpunkte den Ordinaten y_0, Y entsprechen. Integrirt man alsdann die Gleichung (50) von $y = y_0$ an, so findet man:

$$(51) \qquad s - s_0 = \pm \int_{y_0}^{y} cosec\,\tau \,.\, dy,$$

und wenn man $y = Y$ setzt:

$$(52) \qquad S - s_0 = \pm \int_{y_0}^{Y} cosec\,\tau \,.\, dy,$$

und zwar ist:

$$(53) \qquad S - s_0 = \int_{y_0}^{Y} cosec\,\tau \,.\, dy,$$

wenn die Differenzen $S - s_0$, $Y - y_0$ Größen von demselben Zeichen, und:

$$(54) \qquad S - s_0 = -\int_{y_0}^{y} cosec\,\tau \,.\, dy,$$

wenn diese Differenzen Größen von entgegengesetzten Zeichen sind. Wenn ferner die gegebene Curve eben ist, so hat man, wenn man die Abscisse x als unabhängige Veränderliche betrachtet:

$$(55) \qquad cosec\,\tau = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{y'^2}\right)}.$$

Wenn man also den Bogen s_0 als auf Null reducirt und die Größen $s, y - y_0$ mit demselben Zeichen behaftet annimmt, so folgt aus der Gleichung (51):

$$(56) \qquad s = \int_{y_0}^{y} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{y'^2}\right)} dy.$$

Um von der Formel (56) eine Anwendung zu geben, wollen wir annehmen, daß der Bogen s von dem Anfangspunkte der Coordinaten aus auf der durch einen Kreis von dem Halbmesser R erzeugten und durch die Gleichung:

$$(57) \qquad x = R\,arc\,cos\frac{R-y}{R} - \sqrt{(2Ry - y^2)} \text{ (s. S. 40)}$$

ausgedrückten Cycloide genommen sei; so hat man in dieser Voraussetzung:

$$(58) \qquad \begin{cases} dx = \sqrt{\left(\frac{y}{2R-y}\right)} dy, \quad y' = \sqrt{\left(\frac{2R-y}{y}\right)}, \\ 1 + \frac{1}{y'^2} = \frac{2R}{2R-y}, \end{cases}$$

$$(59) \qquad \begin{cases} s = R(2)^{\frac{1}{2}} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(2R-y)}} = \\ 2(2R)^{\frac{1}{2}} [(2R)^{\frac{1}{2}} - (2R-y)^{\frac{1}{2}}] \end{cases}$$

und folglich:

$$(60) \qquad 4R - s = \sqrt{[2R \,.\, (2R-y)]}.$$

Diese letzte Gleichung gibt den Bogen s der Cycloide als Function der Ordinate y, so lange der Endpunkt desselben zwischen dem Anfangspunkte und dem Scheitel des ersten Zweiges der Curve liegt. Wenn der Endpunkt dieses Bogens s mit dem erwähnten Scheitel zusammenfallen soll, so muß man $y = 2R$ nehmen und die

Formel (60) gibt alsdann den Werth der Veränderlichen $s = 4R$. Das Doppelte dieses Werthes oder $8R$ ist die Länge eines beliebigen Zweiges der Cycloide, d. h. des zwischen zwei auf einander folgenden Rückkehrpunkten liegenden Bogens.

Die Formel (60) läßt sich auch leicht direct aufstellen, wenn man sich auf die bekannten Eigenschaften der Cycloide stützt. Denn wir wollen annehmen, daß man auf der Axe der x und auf einer durch den Scheitel der Cycloide zu dieser Axe parallelen Geraden zwei mit gleichen Halbmessern beschriebene Kreise zu gleicher Zeit fortrollen läßt, welche diese Parallele stets in demselben Punkte berühren. Während alsdann der Endpunkt eines Halbmessers des ersten Kreises die gegebene Cycloide beschreibt, beschreibt der Endpunkt eines aus dem Mittelpunkte des zweiten Kreises zu dem Halbmesser des ersten parallel, aber nach entgegengesetztem Sinne gezogenen Halbmessers eine zweite Cycloide, welche die Evolvente der ersten ist (s. Vorl. 7). Nun seien x, y die Coordinaten eines auf der gegebenen Cycloide zwischen dem Anfangspunkte und dem Scheitel des ersten Zweiges liegenden Punktes und ferner seien ξ, η die Coordinaten eines auf der zweiten Cycloide liegenden, correspondirenden Punktes, s sei der Bogen der ersten Cycloide zwischen dem Anfangspunkte und dem Punkte (x, y) und ϱ die Entfernung dieses letzten Punktes von dem Punkte (ξ, η); so drückt diese Entfernung ϱ nicht blos den Krümmungshalbmesser der Evolvente aus, welcher dem Punkte (ξ, η) entspricht, sondern auch den Bogen der Evolute zwischen dem Punkte (x, y) und dem Scheitel des ersten Zweiges. Man hat also offenbar, wenn der Punkt (x, y) mit dem Anfangspunkte zusammenfällt:

$$(61) \qquad s = 0, \qquad \varrho = 4R.$$

Aber wenn der Punkt (x, y) mit dem Scheitel des ersten Cycloidenzweiges zusammenfällt:

$$(62) \qquad s = 4R, \qquad \varrho = 0,$$

und im Allgemeinen:

$$(63) \qquad 4R - s = \varrho.$$

Da ferner der Krümmungshalbmesser ϱ von der Basis der zweiten Cycloide in zwei gleiche Theile getheilt wird, so ist er der doppelten Sehne gleich, welche in dem Erzeugungskreise der ersten Cycloide zwischen dem Punkte (x, y) und dem obern Endpunkte des zu der Axe der y parallelen Durchmessers liegt. Da also diese Sehne eine mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Durchmesser $2R$ und seinem obern Theile $2R - y$ ist, so hat man:

$$(64) \qquad \varrho = 2\sqrt{[2R(2R - y)]}.$$

Werden nun die Gleichungen (63) und (64) mit einander verbunden, so ergibt sich daraus unmittelbar die Gleichung (60).

Wenn man die Axen der x und der y mit einander vertauschte, so erhielte man statt der Gleichung (60) die folgende:

$$(65) \qquad 4R - s = 2\sqrt{[2R(2R - x)]}.$$

Vermittelst dieser letzten Formel lassen sich leicht mehrere merkwürdige Eigenschaften der Cycloide darthun, welche die Mechanik kennen gelehrt hat.

Die Formeln (4) und (5) würden beide unrichtig, wenn man auf der gegebenen Curve nicht von dem Punkte (P) zu dem Punkte (Q) übergehen könnte, ohne die Abscisse x bald zu- und bald abnehmen zu lassen. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß

$$s_1, \; s_2, \ldots\ldots s_{m-1}, \; s_m$$

neue Werthe des Bogens s bezeichnen, welche so gewählt sind, daß die Größen:

$$(66) \qquad s_0, \; s_1, \; s_2, \ldots\ldots s_{m-1}, \; s_m, \; S$$

eine zu- oder abnehmende Reihe bilden. Außerdem wollen wir annehmen, daß die Abscisse x stets zu- oder abnehme, während der bewegliche Punkt (p) von dem Endpunkte (P) des Bogens s_0 zu dem Endpunkte des Bogens s_1 oder von dem Endpunkte des Bogens s_1 zu dem des Bogens s_2 oder von dem Endpunkte des Bogens s_2 zu dem des Bogens s_3, ... oder endlich von dem Endpunkte des Bogens s_m zu dem Endpunkte (Q) des Bogens S übergeht. Alsdann kann man den Werth der Differenz $S - s_0$ weder vermittelst der Formel (4) noch vermittelst der Formel (5) unmittelbar berechnen; aber man kann jede der Differenzen:

$$(67) \qquad s_1 - s_0, \; s_2 - s_1, \; s_3 - s_2, \ldots\ldots S - s_m$$

vermittelst einer ganz ähnlichen Formel bestimmen und man braucht sie alsdann nur noch zusammen zu addiren, um den Werth von $S - s_0$ und folglich die Länge des Bogens PQ zu erhalten.

Wenn man zur Bestimmung des Bogens PQ nicht mehr ähnliche Gleichungen wie die Gleichungen (4) und (5), sondern wie die Gleichungen (53) und (54) anwenden wollte, so müßte man die vorhin erwähnten Bogen $s_1, s_2, \ldots\ldots s_m$ so wählen, daß die Ordinate y beständig zu- oder beständig abnähme, während der bewegliche Punkt (p) von dem Endpunkte des Bogens s_0 zu dem des Bogens s_1 oder von dem Endpunkte des Bogens s_1 zu dem des Bogens s_2, ... oder endlich von dem Endpunkte des Bogens s_m zu dem des Bogens S überginge.

Gesetzt z. B. man wollte den zwischen dem Anfangspunkte und einem beliebigen Punkte der durch die Gleichung:

$$(68) \qquad x = arc\cos\left(\left(\frac{R - y}{R}\right)\right) \pm \sqrt{(2Ry - y^2)}$$

entgegengesetzten Cycloide liegenden Bogen S bestimmen, wo die Wurzelgröße mit dem Zeichen $+$ oder $-$ genommen werden muß, je nachdem der durch die Formel:

$$(69) \qquad \omega = \arccos\left(\left(\frac{R-y}{R}\right)\right)$$

bestimmte Bogen einen negativen oder positiven Sinus hat (s. Vorl. 9), und außerdem wollen wir annehmen, daß der Bogen $s_0 = 0$ und der Bogen S positiv sei und die Coordinaten des Endpunktes dieses letzten Bogens durch X, Y bezeichnen; so nehme man die Scheitel- und Rückkehrpunkte der Cycloide zwischen dem Anfangspunkte und dem Punkte (X, Y) zu den Endpunkten der Bogen $s_1, s_2, \ldots s_m$ und wende die Formeln (53) und (54) zur Bestimmung der Differenzen (67) an, wodurch man folgende Resultate erhält.

Zunächst ist einleuchtend, daß jeder der Bogen:

$$s_1, \quad s_2 - s_1, \quad s_3 - s_2, \ldots s_m - s_{m-1}$$

zwischen zwei Punkten liegt, wovon der eine der Ordinate $y = 0$ und der andere der Ordinate $y = 2R$ entspricht, während der Bogen:

$$S - s_m$$

zwischen einem, einer dieser beiden Ordinaten entsprechenden Punkte und dem Punkte (X, Y) liegt. Ferner folgt aus der Gleichung (68):

$$(70) \quad \begin{cases} dx = \pm \dfrac{y}{\sqrt{(2Ry - y^2)}} dy, \; y' = \pm \sqrt{\left(\dfrac{2R-y}{y}\right)}, \\ cosec\, \tau = \sqrt{\left(\dfrac{2R}{2R-y}\right)}. \end{cases}$$

Nimmt man nun zur Fixirung der Begriffe an, daß die Größe S positiv sei, so folgt aus der Gleichung (53):

$$(72) \quad \begin{cases} s_1 = s_3 - s_2 = s_5 - s_4 = \text{etc.} \ldots \\ = \int_0^{2R} \sqrt{\left(\dfrac{2R}{2R-y}\right)} dy = 4R, \end{cases}$$

und aus der Gleichung (54):

$$(72) \quad \begin{cases} s_2 - s_1 = s_4 - s_3 = s_6 - s_5 = \text{etc.} \ldots \\ = -\int_{2R}^{0} \sqrt{\left(\dfrac{2R}{2R-y}\right)} dy = 4R. \end{cases}$$

Was den Werth von $S - s_m$ anlangt, welcher durch die Formel (53) bestimmt werden muß, wenn m eine gerade Zahl ist und

durch die Formel (64); wenn m eine ungerade Zahl ist, so wird derselbe im ersten Falle:

$$(73)\quad \left\{\begin{array}{l} S-s_m=\int_0^Y \sqrt{\left(\frac{2R}{2R-y}\right)}\,dy \\ \qquad =4R-\sqrt{[2R(2R-Y)]}; \end{array}\right.$$

und im zweiten:

$$(74)\quad \left\{\begin{array}{l} S-s_m=-\int_{2R}^Y \sqrt{\left(\frac{2R}{2R-y}\right)}\,dy \\ \qquad =\sqrt{[2R(2R-Y)]}. \end{array}\right.$$

Addirt man nun die Bogen:

$$x_1;\quad s_2-s_1;\quad s_3-s_2,\ldots s_m-s_{m-1},\quad S-s_m;$$

so findet man für gerade Werthe von m:

$$(75)\qquad S=4(m+1)R-\sqrt{[2R(2R-Y)]};$$

und für ungerade Werthe von m:

$$(76)\qquad S=4mR+\sqrt{[2R(2R-Y)]};$$

was leicht vorher zu sehen war.

Wenn sich die in den abgeleiteten allgemeinen Formeln enthaltenen Integrale nicht unter endlicher Form erhalten lassen, so muß man, wie bereits bemerkt worden, zu Näherungsmethoden seine Zuflucht nehmen. Eine der einfachsten besteht darin, daß man

$$sec\tau=\sqrt{(1+y'^2)},\ \text{oder}\ \ cosec\tau=\sqrt{\left(1+\frac{1}{y'^2}\right)}$$

in eine convergirende Reihe entwickelt, wovon sich jedes mit dx oder dy multiplicirte Glied unmittelbar integriren läßt. Hierzu gelangt man in mehreren Fällen, wenn man eine der beiden Formeln:

$$(77)\quad \left\{\begin{array}{l} sec\,\tau=(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}= \\ 1+\frac{1}{2}y'^2-\frac{1.1}{2.4}y'^4+\frac{1.1.3}{2.4.6}y'^6-\text{etc.} \end{array}\right.$$

$$(78)\quad \left\{\begin{array}{l} cosec\,\tau=\left(1+\frac{1}{y'^2}\right)^{\frac{1}{2}}= \\ 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y'}\right)^2-\frac{1.1}{2.4}\left(\frac{1}{y'}\right)^4+\frac{1.1.3}{2.4.6}\left(\frac{1}{y'}\right)^6-\text{etc.} \end{array}\right.$$

anwendet, wovon die erste für kleinere und die zweite für größere Werthe von y'^2 als die Einheit stattfindet. So kann man z. B. vermittelst dieser Formeln einen Bogen der Ellipse oder Hyperbel in eine convergirende Reihe entwickeln, wofern keiner der Punkte der Curve, welche $y'^2 = 1$ entsprechen, zwischen den Endpunkten dieses Bogens liegt.

Eine andere Methode, vermittelst welcher man leicht einen Bogen der Ellipse oder Hyperbel berechnen kann, besteht darin, daß man den zweiten Theil der Gleichung (21) oder (30) nach den steigenden oder fallenden Potenzen der Excentricität entwickelt. Wir wollen zunächst annehmen, daß die Länge eines Bogens der Ellipse berechnet werden sollte. Wenn man zu dem Zwecke die Formel (21) anwendet, so ist klar, daß der Zahlenwerth von x immer kleiner bleibt als die Constante a. Man kann also setzen:

$$x = a\cos\varphi, \tag{79}$$

und wenn man durch φ_0 den $x = x_0$ entsprechenden Werth von φ bezeichnet, so ergibt sich aus der Formel (21):

$$s = -a\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)}\,d\varphi. \tag{80}$$

Wenn man nun die Wurzelgröße:

$$\sqrt{(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)} = (1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$$

nach den steigenden Potenzen von ε entwickelt, so erhält man die Gleichung:

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)} = \\ 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2\varphi - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^4}{4}\cos^4\varphi - \frac{1.3}{2.4}\frac{\varepsilon^6}{6}\cos^6\varphi \\ -\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\varepsilon^8}{8}\cos^8\varphi - \text{etc.}\ldots.,\end{array}\right. \tag{81}$$

deren zweiter Theil eine Reihe enthält, welche immer convergirend ist, weil nach der Voraussetzung $\varepsilon < 1$ ist, und man erhält folglich:

$$\left\{\begin{array}{l}s = a(\varphi_0 - \varphi) \\ +\frac{\varepsilon^2}{2}a\int_{\varphi_0}^{\varphi}\cos^2\varphi d\varphi + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^4}{4}a\int_{\varphi_0}^{\varphi}\cos^4\varphi\,d\varphi \\ +\frac{1.3}{2.4}\frac{\varepsilon^6}{6}a\int_{\varphi_0}^{\varphi}\cos^6\varphi\,d\varphi + \text{etc.}\ldots\end{array}\right. \tag{82}$$

Außerdem ist allgemein:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right),$$

und hieraus folgt, wenn n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet:

$$\cos^{2n}\varphi = \frac{1}{2^{2n}}\left(e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)^{2n},$$

oder was dasselbe ist:

$$\cos^{2n}\varphi =$$

$$(83)\quad \left\{ \frac{1}{2^{2n-1}}\left[\cos 2n\varphi + \frac{2n}{1}\cos(2n-2)\varphi + \frac{2n(2n-1)}{1.2}\cos(2n-4)\varphi \right.\right.$$
$$\left.\left. + \ldots + \frac{1}{2}\frac{1.2.3\ldots 2n}{(1.2..n)(1.2..n)}\right]. \right.$$

Ferner, wenn man mit $d\varphi$ multiplicirt und von $\varphi = \varphi_0$ an integrirt, so erhält man:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos^{2n}\varphi\, d\varphi =$$

$$(84)\quad \left\{ \frac{1}{2^{2n-1}}\left[\frac{\sin 2n\varphi - \sin 2n\varphi_0}{2n} + \frac{2n}{1}\cdot\frac{\sin(2n-2)\varphi - \sin(2n-2)\varphi_0}{2n-2} + \ldots \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}\frac{1.2.3\ldots 2n}{(1.2..n)(1.2..n)}(\varphi - \varphi_0)\right]. \right.$$

Aus der letzten Formel folgt, daß man jedes der im zweiten Theile der Gleichung (62) vorkommenden Integrale unter endlicher Form erhalten kann, und folglich gibt diese Gleichung für den Werth des Bogens s die Summe einer convergirenden Reihe, wovon sich leicht jedes Glied berechnen läßt.

Es verdient bemerkt zu werden, daß der in den vorhergehenden Formeln vorkommende, durch die Gleichung:

$$\cos\varphi = \frac{x}{a},$$

bestimmte Winkel genau der Winkel zwischen der Halbaxe der positiven x und dem Radiusvector ist, welcher vom Anfangspunkte nach dem Punkte gezogen ist, wo die der Abscisse x entsprechende Ordinate den Kreis schneidet, welcher die große Axe $2a$ der gegebenen Ellipse zum Durchmesser hat.

Wenn der Bogen s den vierten Theil des Umfanges der Ellipse betragen sollte, so müßte das in der Formel (21) vorkommende Integral, welches diesen Bogen ausdrückt, zwischen den Grenzen 0 und a der Veränderlichen x, welchen die Grenzen $\frac{\pi}{2}$ und 0 der Ver-

änderlichen φ entsprechen, genommen werden, und alsdann ergäbe sich aus der Gleichung (84):

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^{2n}\varphi\, d\varphi = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\varphi\, d\varphi =$$

$$-\frac{1}{2^{2n}}\frac{1.2.3\ldots 2n}{(1.2..n)(1.2..n)}\frac{\pi}{2} = -\frac{1.2.3\ldots 2n}{(2.4..2n)(2.4..2n)}\frac{\pi}{2},$$

oder einfacher:

$$(85)\qquad \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^{2n}\varphi d\varphi = -\frac{1.3.5..(2n-1)}{2.4.6..2n}\frac{\pi}{2}.$$

Folglich geben die Gleichungen (82) und (84):

$$(86)\quad \begin{cases} s = a\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)}\, d\varphi \\ = \frac{a\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^3\right)^2 \right. \\ \left. \quad -\frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\varepsilon^4\right)^2 - \text{etc.}\ldots\right]. \end{cases}$$

Wenn man also den Umfang der Ellipse mit P bezeichnet, so hat man nicht blos:

$$(87)\qquad P = 4a\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)}\, d\varphi,$$

sondern auch:

$$(88)\quad \begin{cases} P = 2a\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^3\right)^2 \right. \\ \left. \quad -\frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\varepsilon^4\right)^2 - \ldots\right]. \end{cases}$$

Wenn sich die Ellipse in einen Kreis von dem Halbmesser R verwandelt, so hat man $\varepsilon = 0$, $a = R$, und die Gleichung (88) gibt:

$$P = 2\pi R.$$

wie vorherzusehen war.

Es mag noch bemerkt werden, daß die im zweiten Theile der Gleichung (88) zwischen den Klammern stehenden verschiedenen

Producte genau die verschiedenen Glieder der Entwickelung von $(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$ sind, weil nach dem binomischen Lehrsatze allgemein:

$$(89)\quad \left\{\begin{array}{c} (1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}} = \\ 1+\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^3+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\varepsilon^4+\text{etc.}\ldots \end{array}\right.$$

ist.

Wir wollen nun annehmen, es sollte die Länge eines Bogens der Hyperbel berechnet werden. Wenn man zu dem Zwecke die Formel (30) anwendet, so ist klar, daß der Zahlenwerth von x immer größer bleibt als die Constante a. Man kann also:

$$(90)\qquad x = \frac{a}{\cos\varphi}$$

setzen, und wenn man den $x = x_0$ entsprechenden Werth von φ mit φ_0 bezeichnet, so ergibt sich aus der Formel (30):

$$(91)\qquad s = a\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{(\varepsilon^2-\cos^2\varphi)}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Entwickelt man nun den Bruch:

$$\frac{\sqrt{(\varepsilon^2-\cos^2\varphi)}}{\cos^2\varphi} = \frac{\varepsilon}{\cos^2\varphi}\left(1-\frac{\cos^2\varphi}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

nach den abnehmenden Potenzen von ε, so erhält man die Gleichung:

$$(92)\quad \left\{\begin{array}{c} \frac{\sqrt{(\varepsilon^2-\cos^2\varphi)}}{\cos^2\varphi} = \\ \frac{\varepsilon}{\cos^2\varphi}-\frac{1}{2\varepsilon}-\frac{1}{2}\frac{1}{4\varepsilon^3}\cos^2\varphi-\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{6\varepsilon^5}\cos^4\varphi \\ -\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{8\varepsilon^7}\cos^6\varphi-\ldots, \end{array}\right.$$

deren zweiter Theil eine beständig convergirende Reihe enthält, weil in der Hyperbel $\varepsilon > 1$ ist. Man findet folglich:

$$(93)\quad \left\{\begin{array}{l} s = a\varepsilon[\mathit{tang}\,\varphi-\mathit{tang}\,\varphi_0]-\frac{a}{2\varepsilon}(\varphi-\varphi_0) \\ -\frac{1}{2}\frac{a}{4\varepsilon^3}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\cos^2\varphi\,d\varphi-\frac{1.3}{2.4}\frac{a}{6\varepsilon^5}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\cos^4\varphi\,d\varphi \\ -\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{a}{8\varepsilon^7}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\cos^6\varphi\,d\varphi-\text{etc.}\ldots \end{array}\right.$$

Nun folgt aber aus der Formel (84), daß man jedes der im zweiten Theile der Gleichung (93) vorkommenden Integrale unter endlicher Form erhalten kann, und diese Gleichung gibt folglich für den Werth von s die Summe einer convergirenden Reihe, wovon sich leicht jedes Glied berechnen läßt. Wenn man den Anfangspunkt des Bogens s mit dem der Abscisse $x = a$ entsprechenden Scheitel der Hyperbel zusammenfallen läßt, so muß man $\varphi_0 = 0$ setzen, und die Formel (93) reducirt sich auf folgende:

$$(94)\quad \left\{\begin{array}{l} s = a\varepsilon\, tang\,\varphi - \frac{a}{2\varepsilon^3}\varphi \\ -\frac{1}{2}\frac{a}{4\varepsilon^3}\int_0^\varphi cos^2\varphi\, d\varphi - \frac{1.3}{2.4}\frac{a}{6\varepsilon^5}\int_0^\varphi cos^4\varphi\, d\varphi \\ -\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{a}{8\varepsilon^7}\int_0^\varphi cos^6\varphi\, d\varphi - \text{etc...} \end{array}\right.$$

Es verdient bemerkt zu werden, daß der in den vorhergehenden Formeln vorkommende und durch die Gleichung:

$$cos\,\varphi = \frac{a}{x}$$

bestimmte Winkel genau der Winkel zwischen der Halbaxe der positiven x und dem Radiusvector ist, welcher vom Anfangspunkte nach dem Punkte gezogen ist, wo der Kreis, welcher die reelle Axe $2a$ der gegebenen Hyperbel zum Durchmesser hat, von einer Geraden berührt wird, welche die Axe der x in einem Punkte schneidet, dessen Abscisse x ist.

Da die Asymptoten der Hyperbel (18) durch die Gleichung:

$$(95)\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

ausgedrückt werden, so ist einleuchtend, daß, wenn man die auf einer Asymptote zwischen dem Anfangspunkte und einem beliebigen, der Abscisse x entsprechenden Punkte liegende Entfernung mit r bezeichnet,

$$r^2 = x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 = \varepsilon^2x^2,$$

und folglich, wenn x positiv angenommen wird:

$$(66)\qquad r = \varepsilon x = \frac{a\varepsilon}{cos^2\varphi}$$

ist. Wenn man von dem vorhergehenden Werthe von r den durch die Gleichung (94) bestimmten Bogen s abzieht und die Gleichung:

$$\frac{1}{\cos\varphi} - tang\,\varphi = \frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}$$

berücksichtigt, so findet man:

$$(97)\quad \begin{cases} r-s = a\varepsilon\dfrac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} + \dfrac{a}{2\varepsilon}\varphi \\ +\dfrac{1}{2}\dfrac{a}{4\varepsilon^3}\displaystyle\int_0^{\varphi}\cos^2\varphi d\varphi + \dfrac{1.3}{2.4}\dfrac{a}{6\varepsilon^5}\int_0^{\varphi}\cos^4\varphi d\varphi + \\ \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\dfrac{a}{8\varepsilon^7}\displaystyle\int_0^{\varphi}\cos^6\varphi d\varphi + \ldots \end{cases}$$

Wenn man nun $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzt, so gibt die Gleichung (97) den

$$x = \frac{a}{\cos\frac{\pi}{2}} = \infty$$

entsprechenden Werth von $r-s$, d. h. sehr nahe den Unterschied zwischen zwei sehr beträchtlichen Längen, welche resp. auf der Asymptote vom Anfangspunkte aus und auf der Hyperbel vom Scheitel aus so genommen sind, daß ihre Endpunkte derselben Abscisse entsprechen. Wenn man also diesen Unterschied durch D bezeichnet, so hat man ohne merklichen Fehler für sehr große Werthe von x, oder was dasselbe ist, wenn die Endpunkte der beiden in Rede stehenden Längen einander sehr nahe liegen:

$$(98)\quad \begin{cases} D = a\varepsilon + \dfrac{a\pi}{4\varepsilon}\Big[1 + \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\varepsilon}\Big)^2 + \dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{1.3}{2.4}\dfrac{1}{\varepsilon^2}\Big)^2 \\ \qquad + \dfrac{1}{4}\Big(\dfrac{1.3.5}{2.4.6}\dfrac{1}{\varepsilon^3}\Big)^2 + \ldots\Big]. \end{cases}$$

Zur Bestimmung der elliptischen oder hyperbolischen Bogen kann man auch noch andere Gleichungen anwenden, welche wir nun anführen wollen. Aus den Gleichungen (20) und (29) folgt offenbar für beide Curven:

$$sec^2\tau = \frac{1}{\cos^2\tau} = \frac{\varepsilon^2x^2 - a^2}{x^2 - a^2},$$

und folglich:

$$(99)\quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{a^2(1-\cos^2\tau)}{1-\varepsilon^2\cos^2\tau},\quad x = \pm\dfrac{a\sin\tau}{\sqrt{(1-\varepsilon^2\cos^2\tau)}}, \\ dx = \pm\dfrac{a(1-\varepsilon^2)\cos\tau\, dx}{(1-\varepsilon^2\cos^2\tau)^{\frac{3}{2}}}, \end{cases}$$

$$(100) \qquad ds = \pm sec\tau dx = \pm \frac{a(1-\varepsilon^2)d\tau}{(1-\varepsilon^2 cos^2\tau)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nimmt man nun an, daß der Bogen s für zunehmende Werthe der Neigung τ in der Ellipse zu- und in der Hyperbel abnimmt und bezeichnet die dem Anfangspunkte des Bogens s entsprechende Neigung mit τ_0, so findet man für die Ellipse:

$$(101) \qquad s = a(1-\varepsilon^2)\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{(1-\varepsilon^2 cos^2\tau)^{\frac{3}{2}}},$$

und für die Hyperbel:

$$(102) \qquad s = -a(1-\varepsilon^2)\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{(1-\varepsilon^2 cos^2\tau)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die zweiten Theile der Gleichungen (101) und (102) können wie die der Gleichung (80) und (91) nach den steigenden oder abnehmenden Potenzen der Exentricität in convergirende Reihen entwickelt werden. Entwickelt man z. B. den zweiten Theil der Gleichung (101) indem die Integrale zwischen den Grenzen $\tau = 0$, $\tau = \frac{\pi}{2}$ genommen werden, so erhält man für s einen Werth, welcher dem vierten Theile des Umfanges der Ellipse gleich ist, und es ergibt sich, daß der ganze Umfang P der Ellipse durch:

$$(103) \qquad \left\{ P = 2q\pi(1-\varepsilon^2)\left[1 + 3\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 + 5\left(\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2\right)^2 + 7\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^3\right)^2 + \ldots\right]\right.$$

ausgedrückt werden kann. Man überzeugt sich leicht, daß dieser letzte Werth von P von dem, welchen die Gleichung (88) gibt, nicht verschieden ist.

Wenn man in die erste der Gleichungen (39) für x seinen aus der Gleichung (79) abgeleiteten Werth $a\cos\varphi$ setzt, so findet man:

$$(104) \qquad 1 - cos^2\varphi - cos^2\tau + \varepsilon^2 cos^2\varphi cos^2\tau = 0,$$

und folglich, wenn man $cos\varphi$ positiv setzt:

$$(105) \qquad cos\varphi = \frac{sin\tau}{\sqrt{(1-\varepsilon^2 cos^2\tau)}}.$$

Demnach hat man:

$$d(\varepsilon^2 \cos\varphi \cos\tau) = d\left[\frac{\varepsilon^2 \cos\tau \sin\tau}{\sqrt{(1-\varepsilon^2\cos^2\tau)}}\right] =$$

$$-\sqrt{(1-\varepsilon^2\cos^2\tau)}\,d\tau + \frac{(1-\varepsilon^2)\,d\tau}{(1-\varepsilon^2\cos^2\tau)^{\frac{3}{2}}},$$

und hieraus folgt:

$$(1-\varepsilon^2)\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{(1-\varepsilon^2\cos^2\tau)^{\frac{3}{2}}} = \varepsilon^2(\cos\varphi\cos\tau - \cos\varphi_0\cos\tau_0)$$

$$+\int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{(1-\varepsilon^2\cos^2\tau)}\,d\tau.$$

Folglich kann die Gleichung (101) auf die Form gebracht werden:

$$(106)\quad \left\{ \begin{array}{l} s = a\varepsilon^2(\cos\varphi\cos\tau - \cos\varphi_0\cos\tau_0) + \\ \qquad a\int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{(1-\varepsilon^2\cos^2\tau)}\,d\tau. \end{array} \right.$$

Diese letzte Gleichung setzt, wie die Gleichung (101), voraus, daß $\tau > \tau_0$ ist. Alsdann ist das Product:

$$a\int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{(1-\varepsilon^2\cos^2\tau)}\,d\tau$$

offenbar positiv und drückt vermöge der Formel (80) den zwischen den beiden Punkten der Ellipse, deren Abscissen die Größen $a\cos\tau$, $a\cos\tau_0$ sind, liegenden Bogen aus. Bezeichnet man also diesen Bogen mit ς, so hat man:

$$s = a\varepsilon^2(\cos\varphi\cos\tau - \cos\varphi_0\cos\tau_0) + \varsigma,$$

oder was dasselbe ist:

$$(107)\qquad s - \varsigma = a\varepsilon^2(\cos\varphi\cos\tau - \cos\varphi_0\cos\tau_0).$$

Wenn man der Bequemlichkeit wegen die Abscissen der Endpunkte des Bogens ς mit ξ und ξ_0 bezeichnete, so hätte man blos:

$$(108)\qquad s - \varsigma = \varepsilon^2\frac{x\xi - x_0\xi_0}{a}.$$

Man kann also den Unterschied zwischen zwei Bogen der Ellipse, welche so gewählt sind, daß die Neigungen der Tangenten in den Endpunkten des einen dieser Bogen resp. den Neigungen der vom Mittel-

punkte der Ellipse nach den Punkten, wo der über der großen Axe als Durchmesser beschriebene Kreis von den Ordinaten, zwischen welchen die Endpunkte des zweiten Bogens liegen, geschnitten wird, gezogenen Radienvectoren gleich sind, in endlichen Ausdrücken erhalten.

Wenn man $\tau_0 = 0$ setzt, so hat man offenbar $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ und $x = x_0$. Alsdann reducirt sich die Gleichung (88) auf:

$$s - \varsigma = \varepsilon^2 \frac{x\xi}{a}, \tag{109}$$

und der in ihr enthaltene Satz stimmt mit dem von dem italienischen Mathematiker, Grafen von Fagnano, überein. Wir wollen übrigens bemerken, daß die den Endpunkten der Bogen s und ς entsprechenden Abscissen x und ξ in allen Fällen der Bedingungsgleichung:

$$a^4 - a^2(x^2 + \xi^2) + \varepsilon^2 x^2 \xi^2 = 0, \tag{110}$$

welche sich unmittelbar aus der Gleichung (104) ergibt, wenn man darin $\frac{x}{a}$ für $\cos\psi$ und $\frac{\xi}{a}$ für $\cos\tau$ setzt, genügen müssen.

Zum Schlusse dieser Vorlesung wollen wir noch einen Satz anführen, welcher bei der genäherten Bestimmung der Länge eines Curvenbogens von Nutzen sein kann und sich folgendermaßen ausdrücken läßt.

Lehrsatz 2. Wenn ein Curvenbogen von jeder auf einer gegebenen Axe senkrechten Ebene nur in einem Punkte geschnitten wird, so ist das Verhältniß zwischen diesem Bogen und seiner Projection auf die genannte Axe eine Mittelgröße zwischen den Secanten der verschiedenen Neigungen des Bogens gegen diese Axe.

Beweis. Denn wenn man die gegebene Axe zur Axe der x nimmt, so wird der betrachtete Bogen s durch die Gleichung (7) bestimmt, wofern x_0, X die Abscissen der Endpunkte und τ die einem beweglichen Punkte, dessen Abscisse x ist entsprechende Neigung bezeichnen. Nun folgt aber aus der Gleichung (7) nach einer bekannten Formel aus der Integralrechnung:

$$S = (X - x_0) \sec T, \tag{111}$$

wo T ein Mittel zwischen den verschiedenen Werthen der Neigung τ bezeichnet, und es leuchtet ein, daß der Lehrsatz 2 in der Gleichung (111) enthalten ist.

Vier und zwanzigste Vorlesung.

Quadratur ebener Flächen.

Wir wollen eine ebene Curve betrachten, deren Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten unter der Form:

$$(1) \qquad y = f(x)$$

erscheint, und es seien $(P), (Q)$ zwei feste Punkte dieser Curve, wovon der erste der Abscisse x_0 und der zweite der Abscisse X entspricht. Ferner sei (p) der bewegliche Punkt, dessen Ordinate x ist, und wir wollen die zwischen der Curve, der Axe der x und den beiden, den Abscissen x_0, x entsprechenden Ordinaten liegende Fläche bestimmen. Diese Fläche ist eine Function von x, welche wir mit u bezeichnen wollen und welche für $x = x_0$ verschwindet. Wenn man ferner $x > x_0$ annimmt und ein der Veränderlichen x ertheiltes positives, aber sehr kleines Increment mit $\triangle x$ bezeichnet, so drückt das entsprechende Increment $\triangle u$ der Function u das Flächenelement aus, welches zwischen der Curve, der Axe der x und den beiden Ordinaten $f(x), f(x+\triangle x)$ liegt. Nun sei (q) der Punkt der Curve, welcher der Abscisse $x+\triangle x$ entspricht, so ist die Ordinate eines beliebigen Punktes des Bogens pq offenbar eine Function von der Form $f(x+\theta\triangle x)$, wo θ eine kleinere Zahl als die Einheit bezeichnet. Die Ordinaten der auf demselben Bogen resp. in der kleinsten und größten Entfernung von der Axe der x liegenden beiden Punkte sind folglich Functionen von der Form:

$$(2) \qquad f(x+\theta_1\triangle x), f(x+\theta_2\triangle x),$$

wo θ_1, θ_2 kleinere Zahlen als die Einheit sind. Nun drücken aber die Zahlenwerthe dieser Ordinaten offenbar die Höhen der in und um das Flächenelement $\triangle u$ beschriebenen Rechtecke aus, während die Zahlenwerthe der Flächen dieser Rechtecke resp. durch die Producte:

$$(3) \qquad \triangle x . f(x+\theta_1\triangle x), \triangle x . f(x+\theta_2\triangle x)$$

ausgedrückt werden. Wenn man also durch

$$M(a, a', a''\ldots)$$

ein Mittel zwiſchen mehrern Größen $a, a', a''\ldots$ bezeichnet (ſiehe algebraiſche Analyſ. S. 11), ſo hat man:

$$(4) \quad \Delta u = \pm M[\Delta x . f(x+\theta_1 \Delta x),\ \Delta x . f(x+\theta_2 \Delta x)],$$

oder was einerlei iſt:

$$(5) \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} = \pm M[f(x+\theta_1 \Delta x),\ f(x+\theta_2 \Delta x)],$$

und wenn man Δx gegen die Grenze Null convergiren läßt, ſo ergibt ſich:

$$(6) \quad \frac{du}{dx} = \pm f(x) = \pm y,$$

und folglich:

$$(7) \quad du = \pm y\, dx,$$

Integrirt man nun die Gleichung (7) von $x = x_0$ an, ſo erhält man:

$$(8) \quad u = \pm \int_{x_0}^{x} y\, dx,$$

und wenn man den $x = X$ entſprechenden Werth von u mit U bezeichnet, ſo hat man:

$$(9) \quad U = \pm \int_{x_0}^{X} y dx.$$

Da die Function u nach der Vorausſetzung mit der Abſciſſe x zugleich wächſt, ſo muß man in dem zweiten Theile der vorhergehenden Gleichungen das doppelte Zeichen $\pm$ auf das Zeichen $+$ reduciren, wenn die Ordinate $y = f(x)$ poſitiv iſt, und im entgegengeſetzten Falle auf das Zeichen $-$.

Im erſten Falle geben die Gleichungen (8) und (9):

$$(10) \quad u = \int_{x_0}^{x} y dx,$$

$$(11) \quad U = \int_{x_0}^{X} y dx,$$

Wir wollen nun die Formel (10) auf einige Beiſpiele anwenden.

Beiſpiel 1. Wenn die gegebene Curve der mit dem Halbmeſſer R beſchriebene und durch die Gleichung:

$$(12) \quad x^2 + y^2 = R^2$$

ausgedrückte Kreis ist, so hat man für den positiven Werth von y:

$$(13) \qquad y = \sqrt{(R^2 - x^2)},$$

und folglich gibt die Gleichung (10):

$$(14) \qquad u = \int_{x_0}^{x} \sqrt{(R^2 - x^2)}\, dx.$$

Um den Werth des vorhergehenden Integrales zu bestimmen, setzt man:

$$\sqrt{(R^2 - x^2)} = tx, \text{ oder } x^2 = \frac{R^2}{1+t^2},$$

so hat man:

$$\int \sqrt{(R^2 - x^2)}\, dx = \int tx\, dx = \tfrac{1}{2} tx^2 - \tfrac{1}{2} \int x^2\, dt$$

$$= \tfrac{1}{2} tx^2 - \tfrac{1}{2} R^2 \int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \tfrac{1}{2} tx^2 - \tfrac{1}{2} R^2 \operatorname{arc\,tang} t + const.$$

$$= \tfrac{1}{2} x \sqrt{(R^2 - x^2)} - \tfrac{1}{2} R^2 \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{\sqrt{(R^2 - x^2)}} + const.$$

Wenn man nun der Einfachheit wegen $x_0 = 0$ setzt, so ergibt sich aus der Formel (14), wenn man der Veränderlichen x einen positiven Werth beilegt:

$$(15) \quad \begin{cases} u = \tfrac{1}{2} x \sqrt{(R^2 - x^2)} + \\ \qquad \tfrac{1}{2} R^2 \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{(R^2 - x^2)}}{x} \right] \\ \qquad = \tfrac{1}{2} x \sqrt{(R^2 - x^2)} + \tfrac{1}{2} R^2 \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{\sqrt{(R^2 - x^2)}}, \end{cases}$$

oder was einerlei ist:

$$(16) \qquad u = \tfrac{1}{2} xy + \tfrac{1}{2} R^2 \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y}.$$

Die Richtigkeit der Gleichung (16) läßt sich leicht direct nachweisen. Denn in dem durch die Gleichung (12) ausgedrückten Kreise hat der Winkel zwischen dem nach dem Sinne der positiven y gerichteten und dem vom Mittelpunkte nach dem Punkte (x, y) gezogenen Halbmesser den Ausdruck $\operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y}$ zum Maße. Folglich ist der diesem Winkel entsprechende Kreisbogen und Kreisausschnitt resp. dem Producte:

$$R\,arc\,tang\,\frac{x}{y}, \text{ und } \tfrac{1}{2}R.R\,arc\,tang\,\frac{x}{y}=\tfrac{1}{2}R^2\,arc\,tang\,\frac{x}{y}$$

gleich. Wenn man nun zu der Fläche des Kreisausschnittes die des rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten die Abscisse x und die Ordinate y sind, oder das Product $\frac{1}{2}xy$ addirt; so ist klar, daß man die zwischen dem Kreisbogen, der Axe der x, der Axe der y und der Ordinate y enthaltene Fläche u zur Summe bekommt.

Wenn man in der Formel (16) $x=R$ setzt, so muß man zu gleicher Zeit $y=0$ setzen, und der alsdann auf:

$$(17) \qquad \frac{\pi}{4}R^2$$

reducirte Werth von u drückt die Fläche des Viertelkreises aus. Folglich wird die Fläche des ganzen Kreises durch das Product:

$$(18) \qquad \pi.R^2$$

ausgedrückt, wie in der Geometrie bewiesen wird.

Beispiel 2. Wir wollen nun die Ellipse betrachten, deren Axen $2a, 2b$ sind und welche durch die Gleichung:

$$(19) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ausgedrückt wird. Der positive Werth von y ist:

$$(20) \qquad y=\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)},$$

und folglich verwandelt sich die Formel (10) in:

$$(21) \qquad u=\frac{b}{a}\int_{x_0}^{x}\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx.$$

Vergleicht man nun diese letzte Gleichung mit der Gleichung (14), so erhellt unmittelbar, daß die zwischen dem Bogen der gegebenen Ellipse der Axe der x und den beiden, den Abscissen x_0, x entsprechenden Ordinaten liegende Fläche dem Producte aus dem Verhältnisse $\frac{b}{a}$ und der Fläche gleich ist, welche man erhielte, wenn man für die Ellipse einen auf der großen Axe $2a$ als Durchmesser beschriebenen Kreis substituirte. Wenn man der Einfachheit wegen $x_0=0$ und die Abscisse x positiv setzt, so ist die zwischen der Axe der x und dem erwähnten Kreisumfange liegende Fläche vermöge der Formel (15) gleich:

$$(22) \qquad \tfrac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)}+\tfrac{1}{2}a^2\,arc\,tang\,\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

Man hat folglich:

$$(23) \qquad u = \tfrac{1}{2}\frac{b}{a}x\sqrt{(a^2-x^2)} + \tfrac{1}{2}ab\,.\,arctang\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}},$$

oder was daſſelbe iſt:

$$(24) \qquad u = \tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{2}ab\,.\,arctang\frac{bx}{ay}.$$

Wenn man von der Fläche u die des rechtwinkligen Dreieckes, deſſen Katheten die Abſciſſe x und die Ordinate y ſind, d. h. das Product $\frac{1}{2}xy$, abzieht, ſo drückt der Reſt:

$$(25) \qquad \begin{cases} \tfrac{1}{2}ab\,.\,arctang\dfrac{bx}{ay} \text{ oder} \\ \tfrac{1}{2}ab\,.\,arctang\dfrac{\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{y}{b}\right)} \end{cases}$$

offenbar die Fläche des elliptiſchen Sectors aus, welcher zwiſchen dem nach dem Sinne der poſitiven y und dem vom Mittelpunkte nach dem Punkte (x, y) gezogenen Radiusvector liegt. Die Fläche des vierten Theiles der Ellipſe iſt ferner der $x = a$, $y = 0$ entſprechende Werth von u oder des Ausdruckes (25), und wird folglich durch das Product:

$$\frac{\pi}{4}ab,$$

alſo die Fläche der ganzen Ellipſe durch:

$$(26) \qquad \pi ab$$

ausgedrückt.

Beiſpiel 3. Betrachten wir jetzt die durch eine der Gleichungen:

$$(27) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$(28) \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

worin a und b zwei poſitive Größen ſind, ausgedrückte Hyperbel. Für den poſitiven Werth von y erhält man:

$$(29) \qquad y = \frac{b}{a}\sqrt{(x^2 \mp a^2)},$$

und folglich gibt die Formel (10):

$$(29) \qquad u = \frac{b}{a}\int_{x_0}^{x}\sqrt{(x^2 \mp a^2)}\,dx.$$

Um den Werth des vorhergehenden Integrales zu bestimmen, setze man:

$$\sqrt{(x^2 \mp a^2)} = tx, \text{ also } x^2 = \pm\frac{a^2}{1-t^2},$$

so folgt:

$$\int\sqrt{(x^2 \mp a^2)}\,dx$$

$$= \int tx\,dx = \tfrac{1}{2}tx^2 - \tfrac{1}{2}\int x^2\,dt - \tfrac{1}{2}tx^2 \mp \tfrac{1}{2}a^2\int\frac{dt}{1-t^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}tx^2 - \tfrac{1}{8}a^2 l\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2 + const.$$

$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{(x^2 \mp a^2)} - \tfrac{1}{8}a^2 l\left[\frac{x+\sqrt{(x^2 \mp a^2)}}{x-\sqrt{(x^2 \mp a^2)}}\right]^2 + const.$$

Betrachtet man insbesondere die Hyperbel (27), deren reelle Axe $2a$ ist, setzt $x_0 = a$ und gibt x einen positiven Werth, so folgt aus der Gleichung (30):

$$(31) \qquad u = \tfrac{1}{2}\frac{b}{a}x\sqrt{(x^2 - a^2)} - \tfrac{1}{4}ab\,l\left[\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{x-\sqrt{(x^2-a^2)}}\right],$$

oder was dasselbe ist:

$$(32) \qquad u = \tfrac{1}{2}xy - \tfrac{1}{4}ab\,l\left(\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}}\right) = \tfrac{1}{2}xy - \tfrac{1}{4}ab\,l\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2.$$

Dieses ist der Werth der Fläche, welche zwischen der Axe der Abscissen, der Ordinate y und dem Hyperbelbogen liegt, dessen beide Endpunkte resp. mit dem $x = a$ entsprechenden Scheitel der Curve und mit dem Punkte (x, y) zusammenfallen. Wenn man diese Fläche von der des rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten die Coordinaten x, y sind, abzieht, so drückt der Rest:

$$(33) \qquad \tfrac{1}{2}ab\,l\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) = \tfrac{1}{2}ab\,l\left(\frac{1}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}\right)$$

den hyperbolischen Sector aus, welcher zwischen dem nach dem Sinne der positiven x gerichteten und dem vom Mittelpunkte nach dem Punkte (x, y) gezogenen Radiusvector liegt. Wenn sich dieser

letzte Punkt unendlich weit vom Anfangspunkte der Coordinaten entfernt, so wird der Ausdruck (33) oder die Fläche des hyperbolischen Sectors auch unendlich groß. Bezeichnet man ferner die Coordinaten der Asymptote der nach der Seite der positiven x und y verlängerten Hyperbel mit ξ, η, so hat man:

$$\frac{\eta}{b} = \frac{\xi}{a}. \tag{34}$$

Setzt man also $\eta = y$, so findet man:

$$\frac{y}{b} = \frac{\xi}{a},$$

und der Ausdruck (33) oder die Fläche des hyperbolischen Sectors reducirt sich auf die Form:

$$\tfrac{1}{2} abl\left(\frac{a}{x-\xi}\right) = -\tfrac{1}{2} abl\left(\frac{x-\xi}{a}\right). \tag{35}$$

Folglich ist diese Fläche, abgesehen vom Zeichen, der Hälfte des Productes aus den Halbaxen a und b und dem hyperbolischen Logarithmus des Verhältnisses gleich, welches man erhält, wenn man die halbe reelle Axe a mit der auf einer Parallele zu dieser Axe zwischen der Curve und ihrer Asymptote liegenden Länge $x - \xi$ vergleicht.

Wenn man eine durch die Gleichung:

$$x^2 - y^2 = R^2 \tag{36}$$

ausgedrückte gleichseitige Hyperbel betrachtete, so reducirte sich die Fläche des hyperbolischen Sectors oder der Ausdruck (33) auf:

$$\tfrac{1}{2} R^2 l\left(\frac{x+y}{R}\right). \tag{37}$$

Wenn diese Hyperbel nicht auf ihre Axen, sondern auf ihre Asymptoten bezogen wäre, so würde ihre Gleichung:

$$xy = \tfrac{1}{2} R^2, \text{ oder } y = \tfrac{1}{2}\frac{R^2}{x}, \tag{38}$$

und aus der Gleichung (10) folgte:

$$u = \tfrac{1}{2} R^2 \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2} R^2 l\left(\frac{x}{x_0}\right). \tag{39}$$

Beispiel 4. Wenn man die durch die Gleichung:

$$y^2 = 2px \tag{40}$$

ausgedrückte Parabel betrachtet, so ist der positive Werthe von y:

(41). $$y = (2p)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}},$$

und aus der Gleichung (10) folgt, wenn man der Kürze wegen $x_0 = 0$ setzt:

(42) $$u = (2p)^{\frac{1}{2}} \int_0^x x^{\frac{1}{2}}\, dx = \tfrac{2}{3}(2p)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}},$$

oder was einerlei ist:

(43) $$u = \tfrac{2}{3} xy.$$

Also ist die Fläche zwischen der Axe der Parabel, einem im Scheitel derselben anfangenden Bogen und einer auf der Axe senkrechten Ordinate $= \frac{2}{3}$ der Fläche des umschriebenen Rechteckes. Hieraus folgt unmittelbar, daß die Fläche zwischen dem Bogen der Parabel, der durch ihren Scheitel gezogenen Tangente und einer zu der Axe parallelen Geraden $\frac{1}{3}$ von der Fläche des erwähnten Rechteckes ist.

Beispiel 5. Wenn man die durch die Gleichung:

(44) $$y = Ax^a$$

ausgedrückte Curve betrachtet, wo A und a zwei reelle Constanten sind, so folgt aus der Gleichung (10), wenn man der Kürze wegen $x_0 = 0$ setzt;

(45) $$u = A \int_0^x x^a dx = \frac{A}{a+1} x^{a+1},$$

oder was dasselbe ist:

(46) $$u = \frac{xy}{a+1}.$$

Wenn die Constante a positiv angenommen wird, so drückt die Gleichung (44) eine Parabel von dem Grade a aus, worin der Scheitel oder Inflexionspunkt genau mit dem Anfangspunkte und die durch den Scheitel gezogene Tangente mit der Axe der x oder mit der Axe der y zusammenfällt, jenachdem $a > 1$ oder $a < 1$ ist. Hiernach ergeben sich aus der Gleichung (46) die beiden folgenden Sätze.

In jeder Parabel von einem höhern Grade als die Einheit verhält sich die Fläche zwischen einem von dem Scheitel oder Inflexionspunkte ausgezählten Bogen, der durch diesen Punkt gezogenen Tangente und einer auf dieser Tangente senkrechten Geraden zu der Fläche des umschriebenen Rechteckes, wie die Einheit zu der Zahl $1 + a$.

In jeder Parabel, deren Grad a kleiner ist als die

Einheit verhält sich die Fläche zwischen einem vom Scheitel oder vom Inflexionspunkte aus gezählten Bogen, der durch diesen Scheitel gezogenen Tangente und einer auf dieser Tangente senkrechten Geraden zu der Fläche des umschriebenen Rechteckes wie die Zahl a zu der Zahl $a+1$.

Wenn man $a=2$ setzte, so würde die Curve (44) eine Parabel des zweiten Grades und die auf:

$$u=\tfrac{1}{3}xy \tag{47}$$

reducirte Formel (46) drückte den am Ende des 4ten Beispieles angeführten Satz aus.

Wenn man $a=1$ setzte, so verwandelte sich die Curve (44) in eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade und die auf:

$$u=\tfrac{1}{2}xy$$

reducirte Gleichung (46) zeigte an, daß die Fläche des rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten die Abscisse x und die Ordinate y sind, die Hälfte des Rechteckes ist, welches dieselbe Grundlinie und Höhe hat.

Beispiel 6. Wenn man die durch die Gleichung:

$$y=al(x) \tag{48}$$

worin a eine positive Constante bezeichnet, ausgedrückte logarithmische Linie betrachtet, so ergibt sich aus der Formel (10), wenn man $x_0=1$ und $x>1$ setzt:

$$u=a\int_1^x l(x)\,dx. \tag{49}$$

Ueberdies findet man durch theilweise Integration:

$$\int l(x)\,dx=xlx-\int dx=xl(x)-x+const.$$

Man hat folglich:

$$u=a\,[xl(x)-x+1]. \tag{50}$$

Dieses ist die Fläche, welche zwischen einem Bogen der logarithmischen Linie, der von dem Punkte aus gezählt wird, wo diese Curve die Axe der Abscissen schneidet, zwischen dieser Axe und der der Abscisse x entsprechenden Ordinate liegt. Wenn sich der Punkt (x, y) unendlich weit vom Anfangspunkte entfernte, so würde die in Rede stehende Fläche selbst unendlich. Wenn man die Fläche zwischen der Halbaxe der negativen y, dem Theile der logarithmischen Linie, welcher diese Halbaxe zur Asymptote hat, und der Axe der x bestimmen wollte, so müßte man die Gleichung (9) anwenden, in derselben das doppelte Zeichen des zweiten Theiles auf

das Zeichen — reduciren und außerdem $x_0 = x$, $X = 1$ setzen. Verfährt man auf diese Weise, und erwägt, daß nach der Formel (12) S. 45 der Differ., wenn man darin $\frac{1}{x}$ für x setzt, das Product $x\,l(x)$ mit der Veränderlichen x verschwindet, so erhält man für den Werth der gesuchten Fläche:

$$U = -a\int_0^1 l(x)\,dx = a. \tag{51}$$

Diese Fläche ist folglich nicht, wie die zwischen einer Hyperbel und ihrer Asymptote liegende Fläche, unendlich, sondern sie ist der Zahl a gleich, d. h. diese Zahl drückt die Grenze aus, gegen welche die zwischen der Axe der x, der nach der Seite der negativen y verlängerten logarithmischen Linie und einer Ordinate dieser Curve liegende Fläche ohne Ende convergirt, während sich diese Ordinate der Axe der y unbestimmt nähert.

Wenn die Gleichung der logarithmischen Linie unter der Form:

$$y = e^{\frac{x}{a}} \tag{52}$$

ausgedrückt würde, so ergäbe sich aus der Formel (10):

$$u = \int_{x_0}^{x} e^{\frac{x}{a}}\,dx = a\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{x_0}{a}}\right). \tag{53}$$

Wenn man in der vorhergehenden Gleichung $x_0 = -\infty$, $x = 0$ für die Grenzen des Integrales nähme, so würde die Function u auf die durch die Formel (51) bestimmte Fläche U reducirt.

Beispiel 7. Wenn man die durch die Gleichung:

$$y = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}, \tag{54}$$

worin a eine positive Constante bezeichnet, ausgedrückte Kettenlinie betrachtet, und der Kürze wegen $x_0 = 0$ setzt, so folgt aus der Formel (10):

$$u = a^2\,\frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2}. \tag{55}$$

Dieses ist die zwischen der Axe der Abscissen, der Kettenlinie und den beiden, den Abscissen 0 und x entsprechenden Ordinaten a, y liegende Fläche. Bezeichnet man ferner den zwischen diesen beiden Ordinaten liegenden Bogen mit s, so hat man (s. Vorl. 23):

$$s = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2}, \tag{56}$$

und folglich gibt die Gleichung (55):

(57) $$u = as.$$

Folglich ist die zwischen der Axe der Abscissen, dem von dem tiefsten Punkte der Kettenlinie aus gezählten Bogen s und den beiden seinen Endpunkten entsprechenden Ordinaten liegende Fläche der Fläche des Rechteckes gleich, welches die Länge des Bogens s zur Grundlinie und die Ordinate a des tiefsten Punktes der Kettenlinie zur Höhe hat.

In mehreren Fällen wird die Berechnung der Flächen u und U leichter, wenn man in den Formeln (8), (9), (10) und (11) für die Veränderliche x eine andere Veränderliche substituirt. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß u die Fläche zwischen der Axe der x und der Cycloide sei, welche durch den Kreis von dem Halbmesser R beschrieben und durch die in der zweiten Vorlesung erhaltenen Gleichungen:

(58) $$x = R(\omega - \sin\omega), \quad y = R(1 - \cos\omega)$$

ausgedrückt wird; so hat man:

$$dx = y\,d\omega,$$

und aus der Gleichung (11) folgt, wenn man den $x = x_0$ entsprechenden Werth von ω mit ω_0 bezeichnet:

(59) $$u = \int_{\omega_0}^{\omega} y^2\,d\omega = R^2 \int_{\omega_0}^{\omega} (1 - \cos\omega)^2\,d\omega$$

Wenn die Fläche u im Anfangspunkte der Coordinaten anfangen soll, so muß man $\omega_0 = 0$ setzen, und alsdann gibt die Formel (59):

(60) $$\begin{cases} u = R^2 \int_{\omega_0}^{\omega} (1 - \cos\omega)^2\,d\omega = \\ \qquad R^2 \int_{0}^{\omega} (1 - 2\cos\omega + \cos^2\omega)\,d\omega. \end{cases}$$

Außerdem hat man:

$$\cos^2\omega = \frac{1 + \cos 2\omega}{2},$$

und folglich:

(61) $$u = R^2 \int_{0}^{\omega} (\tfrac{3}{2} - 2\cos\omega + \tfrac{1}{2}\cos 2\omega)\,d\omega,$$

oder was dasselbe ist:

(62) $$u = R^2 [\tfrac{3}{2}\omega - 2\sin\omega + \tfrac{1}{4}\sin 2\omega).$$

Da ω in den vorhergehenden Gleichungen den Winkel bezeichnet, welchen der Halbmesser des Erzeugungskreises der Cycloide be-

schreibt, so braucht man offenbar nur $\omega = 2\pi$ zu setzen, um aus der Formel (62) die zwischen der Axe der x und dem ersten Zweige der Cycloide liegende Fläche abzuleiten. Bezeichnet man also diese Fläche mit U, so hat man:

$$U = 3\pi R^2, \tag{63}$$

und folglich ist die zwischen der Basis der Cycloide und einem ihrer Zweige liegende Fläche das Dreifache der Fläche des Erzeugungskreises.

Wir wollen nun annehmen, daß u die Fläche bezeichnet, welche zwischen zwei, durch die Gleichungen:

$$y = f(x), \tag{64}$$

$$y = F(x) \tag{65}$$

ausgedrückten Curven und zwischen den den Abscissen x_0, x entsprechenden Ordinaten liegt. Wenn man der Abscisse x ein sehr kleines Increment $\triangle x$ ertheilt, so erhält die Fläche u ein entsprechendes Increment $\triangle u$. Nun seien (p), (q) die beiden Punkte der Curve (64) und (r), (s) die beiden Punkte der Curve (65), welche den Abscissen $x, x+\triangle x$ entsprechen. Außerdem wollen wir annehmen, daß die Differenz:

$$F(x) - f(x) \tag{66}$$

für diese Abscissen und für alle zwischenliegenden positiv bleibt, und endlich wollen wir durch θ und Θ zwei veränderliche, aber zwischen den Grenzen 0 und 1 liegende Zahlen bezeichnen. Die Ordinaten zweier, auf den Bogen pq, rs willkührlich genommenen Punkte können durch:

$$f(x+\theta\triangle x), \quad F(x+\Theta\triangle x) \tag{67}$$

ausgedrückt werden, und wenn man die Fläche des Rechteckes, welches einer Seits von den, durch diese beiden Punkte zu der Axe der x gezogenen Parallelen und anderer Seits von den, den Abscissen $x, x+\triangle x$ entsprechenden Ordinaten eingeschlossen wird, mit s bezeichnet, so hat man:

$$s = \triangle x . [F(x+\Theta\triangle x) - f(x+\theta\triangle x)]. \tag{68}$$

Nun ist aber die Fläche s des Rechteckes offenbar größer als der Flächeninhalt $\triangle u$ der Figur $pqrs$, wenn das Rechteck um diese Figur beschrieben ist, d. h. wenn die den Zahlen θ und Θ beigelegten Werthe den möglichst größten Werth der Ordinate $F(x+\Theta\triangle x)$ und den möglichst kleinsten Werthe der Ordinate $f(x+\theta\triangle x)$ geben. Dagegen wird die Fläche s offenbar kleiner als $\triangle u$, wenn das Rechteck in die Figur $pqrs$ beschrieben ist, d. h. wenn die den Zahlen Θ und θ beigelegten Werthe den möglichst kleinsten Werth der Ordinate $F(x+\Theta\triangle x)$ und den möglichst größten Werth der Ordinate $f(x+\theta\triangle x)$ geben. Während

man also die Zahlen θ und Θ zwischen den Grenzen 0 und 1 variiren läßt, ist die Differenz:

$$(69)\quad \triangle u - s = \triangle u - \triangle x \,.\, [F(x+\Theta\triangle x) - f(x+\theta\triangle x)]$$

bald positiv und bald negativ, und hieraus ergibt sich leicht, daß man, wenn $f(x)$ und $F(x)$ stetige Functionen von x bezeichnen, die Zahlen θ und Θ so wählen kann, daß sie der Gleichung:

$$(70)\quad \triangle u = \triangle x \,.\, [F(x+\Theta\triangle x) - f(x+\theta\triangle x)]$$

genügen. Denn wenn die Differenz (69) für $\theta = \theta_0$, $\Theta = \Theta_0$ einen negativen Werth und für $\theta = \theta_1$, $\Theta = \Theta_1$ einen positiven Werth bekommt, so braucht man nur:

$$(71)\quad \theta = \theta_1 + (\theta_1 - \theta_0)t, \quad \Theta = \Theta_0 + (\Theta_1 - \Theta_0)t$$

zu setzen und dann t zwischen den Grenzen $t = 0$, $t = 1$ variiren zu lassen, wenn diese Differenz von dem ersten Werthe zum zweiten übergehen soll. Nun ist aber klar, daß, da sich der Ausdruck (69) alsdann in eine stetige Function von t verwandelt, derselbe nicht vom Positiven zum Negativen übergehen kann, ohne in dem Intervalle Null zu werden, für einen Werth von t, welcher zwischen den Grenzen 0 und 1 liegt, und welchem ein zwischen denselben Grenzen liegender Werth von θ, Θ entspricht.

Wenn der Gleichung (70) Genüge geschieht, so folgt daraus, indem man beide Theile durch $\triangle x$ dividirt:

$$(72)\quad \frac{\triangle u}{\triangle x} = [F(x+\Theta\triangle x) - f(x+\Theta\triangle x)].$$

Wenn man in dieser letzten Gleichung $\triangle x$ gegen die Grenze Null convergiren läßt, so findet man:

$$(73)\quad \frac{du}{dx} = F(x) - f(x),$$

oder was dasselbe ist:

$$(74)\quad du = [F(x) - f(x)]\,dx.$$

Die Gleichung (74) setzt voraus, daß die Differenz $F(x) - f(x)$ in der Nähe der Abscisse x positiv ist. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt würde, so müßte man statt der Gleichung (74) die folgende setzen:

$$(75)\quad du = [f(x) - F(x)]\,dx.$$

Man hat also allgemein:

$$(76)\quad du = \pm [F(x) - f(x)]\,dx,$$

wo das doppelte Zeichen auf das Zeichen + oder — reducirt werden muß, jenachdem die Differenz $F(x) - f(x)$ positiv oder negativ ist. Wenn man den Zahlenwerth der Differenz (66) der Kürze wegen durch:

$$f(x) = \pm [F(x) - f(x)] \tag{77}$$

bezeichnet, so verwandelt sich die Formel (76) in:

$$du = f(x)\,dx, \tag{78}$$

und hieraus folgt, wenn man von $x = x_0$ an integrirt:

$$u = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx. \tag{79}$$

Wenn man endlich die zwischen den Curven (64) und (65) und zwischen den den Abscissen x_0, X entsprechenden Ordinaten liegende Fläche mit U bezeichnet, so ist U offenbar der $x = X$ entsprechende Werth von u, und man hat folglich:

$$U = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx. \tag{80}$$

Die Gleichungen (79) und (80) sind den Gleichungen (10) und (11) ganz ähnlich, nur drückt in den erstern $f(x)$ nicht mehr die Ordinate einer einzigen Curve, sondern die Länge des geradlinigen Durchschnittes der Fläche u oder U mit einer auf der Axe der x senkrechten und der Abscisse x entsprechenden Ebene aus. Diese Länge könnte man die Ordinate der Fläche u oder U nennen, und sie ist immer dem Zahlenwerthe der Differenz zwischen den Ordinaten der beiden diese Fläche begrenzenden Curven gleich.

Wenn sich die Curven (64) und (65) in zwei verschiedenen Punkten schneiden und wenn man annimmt, daß x_0, X in der Formel (80) die diesen Punkten entsprechenden Abscissen bezeichnen, so drückt U die zwischen diesen beiden Curven liegende Fläche aus. Dasselbe würde noch der Fall sein, wenn sich die beiden Curven in den, den Abscissen x_0 und X entsprechenden Punkten berührten. Endlich könnte es auch geschehen, daß:

$$y = f(x), \quad y = F(x)$$

die aus einer einzigen Gleichung:

$$F(x, y) = 0, \tag{81}$$

welche eine ganz geschlossene Curve ausdrückt, abgeleiteten Werthe von y wären. Um alsdann aus der Formel (80) die von dieser Curve begrenzte Fläche abzuleiten, brauchte man für x_0, X nur die kleinste und größte Abscisse, welche den verschiedenen Punkten der

Curve entsprechen, oder was dasselbe ist, die Abscissen der beiden Punkte der Axe der x, zu setzen, zwischen welchen die Projection der Curve auf diese Axe liegt. Gewöhnlich gehören diese Abscissen den Punkten der Curve an, wo die Tangente zu der Axe der y parallel wird; jedoch könnte auch das Gegentheil stattfinden, wenn die durch die Gleichung (81) ausgedrückte Curve vorspringende oder Rückkehrpunkte hätte.

Um von den eben aufgestellten Sätzen eine Anwendung zu zeigen, wollen wir annehmen, es sollte die von der geschlossenen Curve, welcher die Gleichung:

$$x^{2m} + y^{2m} = 1 \tag{82}$$

angehört, worin m eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, begrenzte Fläche bestimmt werden. Wird diese Gleichung in Beziehung auf die Ordinate y aufgelöst, so gibt sie zwei Werthe für dieselbe, nämlich:

$$y = -(1 - x^{2m})^{\frac{1}{2m}}, \quad y = (1 - x^{2m})^{\frac{1}{2m}}, \tag{83}$$

und die Differenz zwischen diesen beiden Werthen ist:

$$f(x) = 2 . (1 - x^{2m})^{\frac{1}{2m}} \tag{84}$$

Da ferner aus der Gleichung (82) folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x}{y}\right)^{2m-1}, \tag{85}$$

so ist klar, daß die Tangente an der Curve zu der Axe der y parallel wird, wenn man $y = 0$ und folglich $x = -1$ oder $x = +1$ hat. Man kann sich übrigens leicht überzeugen, daß die beiden vorhergehenden Werthe der Abscisse x der größte und kleinste von allen denen sind, welche den verschiedenen Punkten der Curve (82) entsprechen. Hiernach erhält man für die verlangte Fläche:

$$U = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_{-1}^{1} (1 - x^{2m})^{\frac{1}{2m}}\,dx. \tag{86}$$

Der vorhergehende Werth von U kann auch auf folgende Form gebracht werden:

$$U = 4\int_{0}^{1} (1 - x^{2m})^{\frac{1}{2m}}\,dx. \tag{87}$$

Wenn man als besondern Fall $m = 1$ setzt, so reducirt sich die Curve (82) auf einen Kreis von dem Halbmesser $= 1$ und man erhält, wie zu erwarten war $U = \pi$.

Wenn man statt der Curve (82) die durch die Gleichung:

$$x^{\frac{2m}{2n+1}} + y^{\frac{2m}{2n+1}} = 1 \tag{88}$$

ausgedrückte nimmt, und verfährt dann wieder ebenso, so erhält man für die von dieser Curve eingeschlossene Fläche:

$$U = 2\int_{-1}^{1} (1 - x^{\frac{2m}{2n+1}})^{\frac{2n+1}{2m}}\, dx. \tag{89}$$

Aber wenn man die Zahl $m < n$ oder höchstens $= n$ annimmt, so ergibt sich, daß die Abscissen -1 und $+1$ Rückkehrpunkten der Curve entsprechen, worin die Tangente, statt zu der Axe der y, zu der der x parallel ist.

Wenn man z. B. $m = 1$ setzt, so folgt aus der Formel (89):

$$\left\{\begin{array}{l} U = 2\int_{-1}^{1} (1 - x^{\frac{2}{2n+1}})^{\frac{2n+1}{2}}\, dx \\ \quad = 4\int_{0}^{1} (1 - x^{\frac{2}{2n+1}})^{\frac{2n+1}{2}}\, dx, \end{array}\right. \tag{90}$$

und zur Bestimmung des Werthes von U braucht man nur

$$x = \sin^{2n+1}\varphi \tag{91}$$

zu setzen. Denn alsdann hat man:

$$\left\{\begin{array}{l} U = 4(2n+1)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2}\varphi \,.\, \sin^{2n}\varphi\, d\varphi \\ \quad = (8n+4)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2}\varphi \,.\, (1 - \cos^2\varphi)^n\, d\varphi, \end{array}\right. \tag{92}$$

und wenn man die Potenz $(1 - \cos^2\varphi)^n$ entwickelt, so findet man mit Berücksichtigung der Formel (85) in Vorles. 23:

$$\left\{\begin{array}{l} U = (4n+2)\pi\left[\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)} - \frac{n}{1}\frac{1.3.5\ldots(2n+3)}{2.4.6\ldots(2n+4)}\right. \\ \qquad \left. + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1.3.5\ldots(2n+5)}{2.4.6\ldots(2n+6)} - \text{etc.}\ldots\right]. \end{array}\right. \tag{93}$$

Wenn man zugleich $m = 1$ und $n = 1$ setzte, so reducirte sich die Gleichung (88) auf:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1, \tag{94}$$

und aus der Formel (92) folgte:

$$(95)\quad \left\{\begin{array}{l} U=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\varphi-\cos^6\varphi)\,d\varphi \\ \quad=6\pi\left(\frac{1.3}{2.4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)=\frac{1.3}{2.4}\pi=\frac{3}{8}\pi. \end{array}\right.$$

Ferner verdient noch bemerkt zu werden, daß die Formel (80) selbst in dem Falle noch stattfände, wo jede der Functionen $f(x)$, $F(x)$ mit der Abscisse x die Form veränderte, so daß sie nicht die Ordinate einer einzigen Curve, sondern successive die Ordinaten mehrerer Curven oder auch mehrerer in der Ebene der x, y gezogener Geraden ausdrückte. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß, indem die Function $F(x)$ die Ordinate der durch die Gleichung:

$$(96)\qquad y=1-x^2$$

ausgedrückten Parabel ist, die Functionen $f(x)$ für negative Werthe von x die Ordinaten der Geraden:

$$(97)\qquad y=-\tfrac{3}{2}x$$

ausdrückt und für positive Werthe von x die der Geraden:

$$(98)\qquad y=\tfrac{5}{6}x.$$

Alsdann hat man für $x<0$:

$$(99)\qquad f(x)=1-x^2+\tfrac{3}{2}x,$$

und für $x>0$:

$$(100)\qquad f(x)=1-x^2-\tfrac{5}{6}x.$$

Von diesen beiden Werthen von $f(x)$ verschwindet der erste für $x=-\frac{1}{2}$ und der zweite für $x=\frac{2}{3}$. Will man nun die auf der Seite der positiven y zwischen der Parabel (96) und den Geraden (97) und (98) liegende Fläche bestimmen, so braucht man nur in der Formel (80):

$$x_0=-\tfrac{1}{2},\quad X=\tfrac{2}{3}$$

zu setzen und dann die Gleichungen (99) und (100) zu berücksichtigen. Verfährt man auf diese Weise, so findet man:

$$(101)\qquad \begin{aligned} U&=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}f(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}f(x)dx+\int_0^{\frac{2}{3}}f(x)\,dx \\ &=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(1-x^2+\tfrac{3}{2}x)\,dx+\int_0^{\frac{2}{3}}(1-x^2-\tfrac{5}{6}x)\,dx, \end{aligned}$$

und folglich:

$$(102) \qquad U = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{24} - \tfrac{3}{16} + \tfrac{2}{5} - \tfrac{5}{81} - \tfrac{1}{27} = \tfrac{847}{1296}.$$

Mit derselben Leichtigkeit würde man aus der Gleichung (80) die von einem convexen Polygone mit gerad- oder krummlinigen Seiten eingeschlossene Fläche ableiten.

Endlich wollen wir annehmen, daß die Fläche U aus mehreren Theilen besteht, welche eine solche Lage haben, daß sich der geradlinige Durchschnitt dieser Fläche mit einer auf der Axe der x senkrechten und der Abscisse x entsprechenden Ebene in ein System mehrerer einzelner, durch $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ ausgedrückter Längen verwandelt und wovon die erste zwischen zwei gegebenen Linien, die zweite zwischen zwei andern gegebenen Linien, .. liegt. Wenn man wieder annimmt, daß diese Fläche in dem Sinne der negativen und positiven x durch die den Abscissen x_0 und X entsprechenden Ordinaten begrenzt wird, so hat man wieder:

$$(80) \qquad U = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

wenn man:

$$(103) \qquad f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots$$

nimmt.

Dieselbe Bemerkung ist auch auf den Fall anwendbar, wo die Fläche U von einer geschlossenen Curve begrenzt wird, welche zusammengelegt ist, so daß sie von den, gewissen Abscissen entsprechenden Ordinaten in mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann. Alsdann gibt die Gleichung der Curve, wenn sie für die Ordinate y aufgelöst wird, für jeden Werth von x eine gerade Anzahl reeller Werthe dieser Ordinate und nachdem man diese reellen Werthe nach der Folge ihrer Größe geordnet hat, braucht man nur successive den ersten von dem zweiten, den dritten von dem vierten u. s. f. abzuziehen, um die oben mit $f_1(x), f_2(x), \ldots$ bezeichneten Größen, d. h. die Größen, deren Summe genau der geradlinige Durchschnitt $f(x)$ ist, zu erhalten.

Nachdem wir gezeigt haben, wie man in allen Fällen den geradlinigen Durchschnitt einer beliebigen ebenen Fläche mit einer auf der Axe der x senkrechten Ebene erhalten kann, wollen wir noch einige Sätze aufstellen, welche bei der Quadratur ebener Flächen von großem Nutzen sind.

Lehrsatz 1. Wenn die geradlinigen Durchschnitte zwei ebener Flächen mit einem Systeme paralleler Ebenen in einem constanten Verhältnisse zu einander stehen, so stehen die beiden Flächen in demselben Verhältnisse zu einander.

Beweis. Wir wollen die verschiedenen Punkte jeder Fläche auf zwei rechtwinklige Axen der x, y bezogen annehmen, welche in der

Ebene dieser Fläche liegen, und wovon die zweite außerdem in einer der erwähnten schneidenden parallelen Ebenen liegt. Wenn man die geradlinigen Durchschnitte der beiden Flächen mit einer dieser Ebenen, nämlich mit der der Abscisse x entsprechenden durch $f(x)$ und $f'(x)$ bezeichnet, so hat man nach der Voraussetzung:

$$f(x) = af'(x), \tag{104}$$

wo a das constante Verhältniß bezeichnet. Außerdem seien x_0 und X die Grenzen, zwischen welchen x liegen muß, damit die, dieser Abscisse entsprechende und auf der Axe der x senkrechte Ebene die beiden Flächen trifft. Vermöge der Formel (80) wird die Größe der ersten Fläche offenbar durch das Integral:

$$\int_{x_0}^{X} f'(x)\,dx$$

ausgedrückt, während die der zweiten durch das Integral:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

ausgedrückt wird.

Nun folgt aber aus der Gleichung (104):

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = a\int_{x_0}^{X} f'(x)\,dx \tag{105}$$

und es ist einleuchtend, daß in dieser letzten Formel der ausgesprochene Lehrsatz enthalten ist.

Zusatz 1. Gesetzt, es wären in der Ebene der xy zwei geschlossene Curven beschrieben, wovon die erste durch die Gleichung:

$$F(x, y) = 0, \tag{106}$$

und die zweite durch eine Gleichung von der Form:

$$F\left(x, \frac{y}{b}\right) = 0 \tag{107}$$

ausgedrückt wird, wo b eine constante Größe bezeichnet, so ist klar, daß sich für jeden Werth der Abscisse x aus den Gleichungen der beiden Curven correspondirende Werthe von y ergeben, welche in dem Verhältnisse von $1:b$ zu einander stehen. Folglich werden die Grenzen x_0, X, zwischen welchen die Abscisse x liegen muß, damit die Ordinate y reelle Werthe behält, nicht geändert, wenn man die zweite Fläche für die erste substituirt. Ferner, wenn man durch:

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots \tag{108}$$

die verschiedenen reellen Werthe von y bezeichnet, welche die Glei-

chung (106) für eine gegebene Abscisse gibt, so werden die, welche die Gleichung (107) für dieselbe Abscisse gibt, durch:

$$(109) \qquad by_0,\ by_1,\ by_2,\ by_3,\ldots$$

ausgedrückt. Wenn überdies die Größen (108) nach der Folge ihrer Größe geordnet angenommen werden, so sind die vorhin mit $f_1(x), f_2(x), \ldots$ bezeichneten Längen für die Curve (106) offenbar:

$$(110) \qquad f_1(x) = y_1 - y_0,\ f_2(x) = y_3 - y_2,\ \text{etc.}\ldots$$

und folglich wird der innerhalb der Curve liegende geradlinige Durchschnitt $f(x)$ der von dieser Curve eingeschlossenen Fläche offenbar durch die Formel:

$$(111) \qquad f(x) = y_1 - y_0 + y_3 - y_2 + \text{etc.}\ldots$$

bestimmt. Dagegen findet man für den geradlinigen Durchschnitt $\mathfrak{f}(x)$ der von der Curve (107) eingeschlossenen Fläche:

$$(112) \quad \begin{cases} \mathfrak{f}(x) = by_1 - by_0 + by_3 - by_2 + \text{etc.}\ldots \\ \qquad = b(y_1 - y_0 + y_3 - y_2 + \text{etc.}\ldots). \end{cases}$$

Man hat folglich:

$$(113) \qquad \mathfrak{f}(x) = bf(x)$$

Hiernach folgt aus dem Lehrsatze 1, daß sich die von den Curven (106) und (107) eingeschlossenen Flächen wie $1:b$ verhalten.

Zusatz 2. Wenn man wie vorhin schließt, aber die beiden Coordinaten x, y mit einander vertauscht, so beweist man, daß sich die von der Curve (106) und die von der Curve, deren Gleichung

$$(114) \qquad \mathfrak{F}\left(\frac{x}{a}, y\right) = 0$$

ist, eingeschlossenen Flächen wie $1:a$ verhalten. Ferner würde man offenbar dasselbe Verhältniß erhalten, wenn man die von den beiden durch die Gleichungen:

$$(115) \quad \mathfrak{F}\left(x, \frac{y}{b}\right) = 0, \qquad (116) \quad \mathfrak{F}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = 0$$

ausgedrückten Curven eingeschlossenen Flächen vergliche.

Zusatz 3. Wenn man die durch die Curven (106) und (116) eingeschlossenen Flächen direct mit einander vergleicht, so ergibt sich aus Zusatz 1 und 2, daß sie sich wie $1:ab$ verhalten und man kann mithin folgenden Lehrsatz aufstellen:

Lehrsatz 2. Um die von einer überall geschlossenen und durch eine Gleichung von der Form:

$$\mathfrak{F}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = 0 \tag{117}$$

ausgedrückten Curve begrenzte Fläche zu bestimmen, braucht man nur die von der Curve, deren Gleichung:

$$\mathfrak{F}(x, y) = 0, \tag{106}$$

ist, eingeschlossene Fläche zu suchen und dieselbe durch das Product der beiden Constanten a und b zu multipliciren.

Zusatz 1. Wenn sich die Curve (116) auf die Ellipse (19) reducirt, so verwandelt sich die Gleichung (106) in:

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{118}$$

und drückt einen Kreis aus, welcher die Einheit zum Halbmesser hat. Da nun die Fläche dieses Kreises $= \pi$ ist, so folgt aus dem Lehrsatze 2, daß die Fläche der Ellipse durch das Product:

$$\pi a b \tag{26}$$

ausgedrückt wird, was bereits bekannt war.

Zusatz 2. Wenn sich die Gleichung (115) auf:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2m}{2n+1}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2m}{2n+1}} = 1 \tag{119}$$

reducirt, worin a, b zwei positive Größen und m, n zwei ganze Zahlen bezeichnen, so wird die von der durch diese Gleichung ausgedrückten Curve eingeschlossene Fläche durch das Product aus dem Ausdrucke (93) und den beiden Constanten a und b ausgedrückt.

Zusatz 3. Nach dem in der siebenten Vorlesung Gesagten wird die Evolute der Ellipse (19) durch die Gleichung:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \tag{120}$$

ausgedrückt, worin A, B zwei positive Größen bezeichnen, welche durch die Gleichung:

$$Aa = Bb = \pm (a^2 - b^2)$$

bestimmt werden. Nun folgt aber aus dem Lehrsatze 1, daß die von dieser Evolute eingeschlossene Fläche dem Producte aus den Con-

stanten A, B und der von der Curve (91) eingeschlossenen Fläche und folglich der Größe:

$$\frac{4}{3}\pi AB = \frac{4}{3}\pi \frac{(a^2-b^2)^2}{ab} \tag{121}$$

gleich ist.

Zusatz 4. Wenn man in der Gleichung (117) $b=a$ setzt, so reducirt sie sich auf die Form:

$$\mathfrak{F}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)=0, \tag{122}$$

und drückt eine der Curve (106) ähnliche Curve aus, deren Dimensionen sich zu denen der andern Curve wie $a:1$ verhalten. Demnach folgt aus dem Lehrsatze 2 offenbar, daß sich die von zwei ähnlichen Curven eingeschlossenen Flächen wie die Quadrate der Dimensionen dieser beiden Curven verhalten.

Wir schließen diese Vorlesung mit dem Beweise eines Lehrsatzes, welcher sich folgendermaßen ausdrücken läßt.

Lehrsatz 3. Das Verhältniß zwischen zwei ebenen Flächen ist immer eine mittlere Größe zwischen den verschiedenen Werthen, welche das Verhältniß der geradlinigen Durchschnitte dieser beiden Flächen mit einer stets zu einer gegebenen Ebene parallel bleibenden Ebene bekommen kann.

Beweis. Wir wollen die verschiedenen Punkte jeder Fläche auf zwei rechtwinklige Axen der x und y, welche in der Ebene dieser Fläche liegen, und wovon die zweite mit der Geraden zusammenfällt, nach welcher sie durch die gegebene Ebene geschnitten wird, bezogen annehmen und es seien überdies $f(x)$ und $\mathfrak{F}(x)$ die geradlinigen Durchschnitte der beiden Flächen mit der beweglichen und der Abscisse x entsprechenden Ebene. Endlich wollen wir annehmen, daß diese Ebene die eine der beiden Flächen nicht schneiden kann, ohne die andern zu schneiden und es seien x_0, X die Grenzen, zwischen welchen die Abscisse x liegen muß, damit die bewegliche Ebene die beiden in Rede stehenden Flächen wirklich schneidet; so ist das Verhältniß der einen dieser Fläche zur andern:

$$\frac{\int_{x_0}^{X} \mathfrak{f}(x)\,dx}{\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx}. \tag{123}$$

Setzt man überdies der Kürze wegen:

$$\int_{x_0}^{x} \mathfrak{f}(x)\,dx = \mathfrak{F}(x), \quad \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x), \tag{124}$$

so hat man nach einer aus der Integralrechnung bekannten Formel:

$$(127)\qquad \frac{\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx}{\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx} = \frac{f'(x_0+\theta(X-x_0)}{F'(x_0+\theta(X-x_0)} = \frac{f(x_0+\theta(X-x_0)}{f(x_0+\theta(X-x_0)}$$

wo θ eine kleinere Zahl als die Einheit bezeichnet.*) Nun ist aber der Bruch:

---

*) Denn es sei $f(x)$ eine zwischen den Grenzen $x=x_0$, $x=X$ stetige Function von x, so wird, wenn $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$ zwischen diesen Grenzen liegende und unendlich wenig von einander verschiedene Werthe von x bezeichnen und das Intervall $X-x_0$ in unendlich kleine Elemente x_1-x_0, x_2-x_1, x_3-x_2, $\ldots$ $X-x_{n-1}$ getheilt wird, die Summe S der Reihe:

$$S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$$

durch das bestimmte Integral:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

ausgedrückt. Setzt man nun $f(x)=\varphi(x).\chi(x)$; wo $\varphi(x)$, $\chi(x)$ zwei neue Functionen von x sind, welche zwischen den Grenzen $x=x_0$, $x=X$ stetig bleiben und wovon die zweite innerhalb dieser Grenzen immer dasselbe Zeichen behält; so verwandelt sich die obige Reihe in:

$$S=(x_1-x_0)\varphi(x_0)\chi(x_0)+(x_2-x_1)\varphi(x_1)\chi(x_1)+\ldots +(X-x_{n-1})\varphi(x_{n-1})\chi(x_{n-1})$$

und kann durch das Produkt aus der Summe:

$$(x_1-x_0)\chi(x_0)+(x_2-x_1)\chi(x_1)+\ldots+(X-x_{n-1})\chi(x_{n-1})$$

und einer Mittelgröße zwischen den Coefficienten $\varphi(x_0)$, $\varphi(x_1)$, $\ldots$ $\varphi(x_{n-1})$ von der Form $\varphi(\xi)$, wo ξ ein zwischen x_0 und X liegender Werth ist, ausgedrückt werden. Man hat folglich:

$$S=[(x_1-x_0)\chi(x_0)+(x_2-x_1)\chi(x_1)+\ldots +(X-x_{n-1})\chi(x_{n-1})]\varphi(\xi),$$

und also auch:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx=\int_{x_0}^{X}\chi(x).\varphi(x)\,dx=\varphi(\xi)\int_{x_0}^{X}\chi(x)\,dx,\ldots(A)$$

wo ξ wieder ein zwischen x_0 und X liegender Werth von x ist. Setzt man nun in dieser Gleichung für $f(x)$, $\chi(x)$ und $\varphi(x)$ resp. $f(x)$, $f(x)$ und $\frac{f(x)}{F(x)}$ so ergibt sich daraus:

$$\frac{\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx}{\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx}=\frac{f(x)}{f(\xi)}=\frac{f(x_0+\theta(X-x_0)]}{f(x_0+\theta(X-x_0)]}$$

weil ξ ein zwischen x_0 und X liegender Werth von der $x_0+\theta(X-x_0$ ist.

$$\frac{f[x_0+\theta(X-x_0)]}{f[x_0+\theta(X-x_0)]}$$

offenbar einer von den Werthen, welche das Verhältniß:

$$\frac{f(x)}{f(x)}$$

der geradlinigen Durchschnitte der beiden Flächen annehmen kann, wenn die Abscisse x zwischen den Grenzen x_0, X variirt und folglich eine zwischen dem kleinsten und größten dieser Werthe liegende Größe. Die Gleichung (127) führt also auf den Lehrsatz 3.

Wenn die auf der Axe der x senkrechte bewegliche Ebene für gewisse Werthe der Abscisse die eine der gegebenen Flächen nicht mehr träfe, so ließe sich der Beweis des Lehrsatzes 3 noch auf die eben gezeigte Weise führen, nur müßten alsdann x_0 und X die Grenzen bezeichnen, zwischen welchen die Abscisse x bleiben müßte, damit die bewegliche Ebene wenigstens eine der beiden Flächen schnitte und man müßte annehmen, daß der Werth jedes der geradlinigen Durchschnitte $f(x), f(x)$ allemal Null wird, wenn die entsprechende Fläche nicht mehr von der in Rede stehenden Ebene geschnitten würde.

Zusatz 1. Zwei ebene Flächen sind gleich groß, wenn die geradlinigen Durchschnitte derselben mit einer stets zu einer gegebenen Ebene parallelen Ebene einander immer gleich bleiben.

Zusatz 2. Wenn man in der Gleichung (128) $f(x)=1$ setzt, so erhält man:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} dx = X-x_0,$$

und folglich:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (X-x_0)f(\xi). \tag{129}$$

Nun drückt aber die Länge $X-x_0$ offenbar die geradlinige Projection der Fläche (80) auf die Axe der x aus, während $f(\xi)$ eine mittlere Größe zwischen den geradlinigen Durchschnitten dieser Fläche mit einer auf derselben Axe senkrechten Ebene ausdrückt. Da man nun zur Axe der x eine beliebige in der Ebene der betrachteten Fläche willkührlich gezogene Gerade nehmen kann, so ist einleuchtend, daß die Gleichung (128) auf folgenden Lehrsatz führt.

Lehrsatz 4. Das Verhältniß zwischen einer ebenen Fläche und ihrer Projection auf eine in ihrer Ebene gezogene Axe ist immer ein Mittel zwischen den verschiedenen Längen, welche die geradlinigen Durchschnitte dieser Fläche mit einer auf der erwähnten Axe senkrechten Ebene ausdrücken.

Fünf und zwanzigste Vorlesung.

Quadratur krummer Flächen.

In der sechszehnten Vorlesung haben wir bemerkt, daß es zweckmäßig scheine, zum Maße der Länge eines sehr kleinen, durch einen gegebenen Punkt gehenden Curvenbogens die Gerade zu nehmen, welche sich demselben in der Nähe dieses Punktes am meisten nähert, und wir haben daher angenommen, daß ein sehr kleiner Curvenbogen fast mit seiner Projection auf die durch einen seiner Punkte gezogenen Tangente zusammenfällt, d. h. daß sich das Verhältniß des kleinen Curvenbogens zu seiner Projection fast auf die Einheit reducirt. Bei der Quadratur krummer Flächen wollen wir uns auf einen ähnlichen Grundsatz stützen und zum Maße eines kleinen Theiles der durch einen gegebenen Punkt gehenden krummen Fläche die Ebene nehmen, welche sich in der Nähe dieses Punktes der krummen Fläche am meisten nähert, indem wir annehmen, daß ein Element der krummen Fläche, dessen beide Dimensionen sehr klein sind, fast mit seiner Projection auf die durch einen seiner Punkte gelegte Berührungsebene zusammenfällt, d. h. daß das Verhältniß dieses kleinen Elementes zu seiner Projection sich fast auf die Einheit reducirt.

Diesen Grundsatz als stattfindend angenommen, wollen wir wieder eine krumme Fläche betrachten, deren Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten unter der Form:

$$(1) \qquad z = f(x, y)$$

erscheint. Es sei (p) der Punkt der krummen Fläche, dessen Coordinaten x, y sind und τ sei die Neigung der krummen Fläche in diesem Punkte, d. h. der spitze Winkel zwischen der durch den Punkt (p) gelegten Berührungsebene und der Ebene der xy. Endlich wollen wir annehmen, daß ein durch ω bezeichnetes Element der krummen Fläche, dessen beide Dimensionen sehr klein sind, und welches den Punkt (p) enthält, auf diese beiden Ebenen projicirt sei. Wenn man durch einen beliebigen Punkt des Elementes ω eine dritte, auf den beiden ersten senkrechte Ebene legt, so schneidet dieselbe das Element ω nach einem kleinen Curvenbogen, und die

beiden Projectionen desselben nach zwei geraden Linien, welche die Projectionen des erwähnten Bogens oder der zwischen seinen Endpunkten liegenden Sehne sind. Diese Sehne bildet mit den durch einen Endpunkt des Bogens und durch einen demselben sehr nahe liegenden Punkt, z. B. durch den Punkt (p), gelegten Berührungsebenen der krummen Fläche sehr kleine Winkel. Wenn man ferner den letzten dieser Winkel mit δ bezeichnet, so ist der Winkel, welchen dieselbe Sehne mit der Ebene der xy bildet, $= \tau \pm \delta$, und folglich verhalten sich die beiden Projectionen der Sehne oder die geradlinigen Durchschnitte der beiden Projectionen des Elementes ω wie $\cos\delta : \cos(\tau \pm \delta)$. Folglich wird die Projection des Elementes ω auf die Ebene der xy nach Lehrsatz 3 in Vorles. 24 durch das Product einer Mittelgröße zwischen den verschiedenen Werthen des Verhältnisses:

$$\frac{\cos(\tau \pm \delta)}{\cos\delta}$$

und der Projection desselben Elementes auf die Ebene, welche die gegebene krumme Fläche im Punkte (p) berührt, ausgedrückt, und da nach dem angenommenen Grundsatze diese letzte Projection durch:

$$\omega(1+i),$$

wo i eine sehr kleine Größe bezeichnet, ausgedrückt werden kann, so sind wir zu dem Schlusse berechtigt, daß die Projection des Elementes ω auf die Ebene der xy einem Producte von der Form:

$$\omega\frac{\cos(\tau \pm \delta)}{\cos\delta}(1+i)$$

gleich ist: Da anderer Seits die beiden Größen $\pm\delta$ und i sehr klein sind, so erhält man, wenn I eine dritte sehr wenig von Null verschiedene Größe bezeichnet:

$$\frac{\cos(\tau \pm \delta)}{\cos\delta}(1+i) = \cos\tau + I,$$

und da man die Ebene der xy mit einer beliebigen Ebene zusammenfallen lassen kann, so wird man unmittelbar auf folgenden Lehrsatz geführt.

Lehrsatz 1. Es sei ω ein Element der krummen Fläche, dessen beide Dimensionen sehr klein sind und τ sei der spitze Winkel zwischen der durch den Punkt (p) gelegten Berührungsebene und einer andern willkührlich gelegten Ebene, so ist die Projection des Elementes ω von der Form:

$$\omega(\cos\tau + I), \tag{2}$$

wo I eine sehr kleine Größe bezeichnet.

Es seien nun (P), (p) zwei Punkte der krummen Fläche (1), wovon der erste fest ist und den Coordinaten x_0, y_0 entspricht, während der zweite beweglich ist und den veränderlichen Coordinaten x, y entspricht. Wenn man durch jeden der Punkte (P), (p) zwei Ebenen legt, welche resp. auf den Axen der x und der y senkrecht sind, so schneiden diese vier Ebenen die krumme Fläche (1) nach vier Curven und die zwischen diesen vier Curven liegende Fläche ist mit der Lage des Punktes (p) veränderlich. Diese Fläche ist folglich eine Function der Coordinaten x, y und ihre Projection auf die Ebene der xy ist ein Rechteck, dessen Seiten resp. den Zahlenwerthen der Differenzen $x - x_0$, $y - y_0$ gleich sind. Wir wollen die in Rede stehende Fläche mit $\varphi(x, y)$ und ihre Projection auf die Ebene der xy mit u bezeichnen, so ist, wenn $x > x_0$ und $y > y_0$ angenommen wird:

$$(3) \qquad u = (x - x_0)(y - y_0).$$

Ferner seien $\triangle x, \triangle y$ sehr kleine, den Veränderlichen x, y ertheilte Incremente und (q) der Punkt der krummen Fläche (1), welcher den Coordinaten $x + \triangle x$, $y + \triangle y$ entspricht. Endlich sollen die unten an das Zeichen $\triangle$ gesetzten Buchstaben x, y das Increment andeuten, welches eine Function von x und y bekommt, wenn man x um $\triangle x$ oder y um $\triangle y$ wachsen läßt. Demnach bezeichnen die beiden Ausdrücke:

$$(4) \qquad \triangle_x \varphi(x, y), \qquad (5) \qquad \triangle_x u = (y - y_0) \triangle x$$

die dem Incremente $\triangle x$ der Veränderlichen x entsprechenden Incremente der Flächen $\varphi(x, y)$ und u. Ferner drücken die Incremente der Ausdrücke (4) und (5), wenn man y um $\triangle y$ wachsen läßt, oder die beiden Größen:

$$(6) \qquad \triangle_y \triangle_x \varphi(x, y), \qquad (7) \qquad \triangle_y \triangle_x u = \triangle x \triangle y$$

offenbar resp. die Fläche aus, welche auf der krummen Fläche (1) zwischen vier, durch die Punkte (p), (q) senkrecht auf die Axen der x und y gelegten Ebenen liegt und das kleine Rechteck, auf welches sich die Projection dieser Fläche auf die Ebene der xy reducirt. Bezeichnet man nun wieder die Neigung der krummen Fläche (1) im Punkte (p) mit τ, die Fläche $\triangle_y \triangle_x \varphi(x, y)$, deren beide Dimensionen sehr klein sind, mit ω und durch I eine wenig von Null verschiedene Größe, so hat man nach dem Lehrsatze 1:

$$\triangle_y \triangle_x u = \omega(\cos\tau + I) = (\cos\tau + I) \triangle_y \triangle_x \varphi(x, y)$$

und hieraus folgt, wenn man für $\triangle_y \triangle_x u$ seinen aus der Gleichung (7) abgeleiteten Werth setzt:

$$(8) \qquad \frac{\triangle_y \triangle_x \varphi(x, y)}{\triangle y \cdot \triangle x} = \frac{1}{\cos\tau + I}.$$

Wenn man in der Gleichung (8) den Zahlenwerth von $\triangle y$ ohne Ende abnehmen läßt, so erhält man, indem man zu den Grenzen übergeht, die Gleichung:

$$\frac{d_y \triangle_x \varphi(x,y)}{dy \cdot \triangle x} = \frac{1}{\cos\tau + I}, \tag{9}$$

welche man auch einfacher folgendermaßen schreiben kann:

$$\frac{d \triangle_x \varphi(x,y)}{dy} = \frac{\triangle x}{\cos\tau + I}, \tag{10}$$

und worin die Größe I einen sehr kleinen Werth behält. Wenn man endlich in der Gleichung (9) den Werth von $\triangle x$ unendlich abnehmen läßt, so folgt aus derselben, indem man zu den Grenzen übergeht:

$$\frac{d_y d_x \varphi(x,y)}{dy \cdot dx} = \frac{1}{\cos\tau}, \tag{11}$$

oder was dasselbe ist:

$$\frac{d^2 \varphi(x,y)}{dx\,dy} = \sec\tau. \tag{12}$$

Aus der Gleichung (12) läßt sich leicht der Werth der Fläche $\varphi(x,y)$ ableiten. Denn da diese Fläche mit ihrer Projection auf der Ebene der xy zugleich verschwindet, nicht blos für $y = y_0$, was auch x sein mag, sondern auch für $x = x_0$, welchen Werth y auch haben mag; so ist folglich allgemein:

$$\varphi(x, y_0) = 0, \tag{13}$$

$$\varphi(x_0, y) = 0, \tag{14}$$

und folglich:

$$\frac{d\varphi(x, y_0)}{dx} = 0, \tag{15}$$

$$\frac{d\varphi(x_0, y)}{dy} = 0. \tag{16}$$

Integrirt man nun die Gleichung (12) 1) in Beziehung auf y von $y = y_0$ aus und 2) in Beziehung auf x von $x = x_0$ aus, so findet man successive mit Berücksichtigung der Gleichungen (15) und (14):

$$\frac{d\varphi(x,y)}{dx} = \int_{y_0}^{y} \sec\tau \cdot dy \tag{17}$$

und:

$$\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \sec\tau \cdot dy\,dx. \tag{18}$$

Wenn man in dieser letzten Gleichung für die Coordinaten x, y des beweglichen Punktes (p) die Coordinaten X, Y eines auf der gegebenen krummen Fläche liegenden festen Punktes (Q) setzt, so gibt diese Gleichung den Werth der Fläche $\varphi(X, Y)$, welche zwischen vier, durch die Punkte (P), (Q) senkrecht auf die Axen der x und der y gelegten Ebenen liegt, und wenn man diese Fläche der Kürze wegen mit A bezeichnet, so hat man:

$$(19) \qquad A = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} \sec\tau \, . \, dy \, dx.$$

Was den Werth von $\sec\tau$ anlangt, so kann er unmittelbar durch die Formel (24) in Vorles. 14 bestimmt werden. Wenn also das Differenzial der Gleichung (1) unter der Form:

$$(20) \qquad dz = p\,dx + q\,dy$$

ausgedrückt wird, so hat man:

$$(21) \qquad \sec\tau = \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}.$$

Es ist wohl zu bemerken, daß in den Gleichungen (18) und (19) die Ordnung der Integrationen in Beziehung auf die beiden Veränderlichen x und y ohne Nachtheil umgekehrt werden kann. Integrirt man ferner die Gleichung (10) in Beziehung auf die Veränderliche y und zwischen den Grenzen $y = y_0$, $y = Y$, so ergibt sich daraus:

$$(22) \qquad \Delta_x \varphi(x, Y) = \Delta x \int_{y_0}^{Y} \frac{1}{\cos\tau + 1} \, dy.$$

Diese letzte Formel drückt den Werth der Fläche $\Delta_x \varphi(x, y)$ aus, deren Projection auf die Ebene der xy ein Rechteck ist, welches zwischen zwei um die Länge $Y - y_0$ von einander entfernten und zu der Axe der x parallelen Geraden und zwischen zwei zu der Axe der y parallelen und um die sehr kleine Größe Δx von einander entfernten Geraden liegt.

Denken wir uns nun, daß die krumme Fläche (1) geschnitten werde 1) durch zwei auf der Axe der x senkrechte Ebenen, wovon die eine, der Abscisse x_0 entsprechende fest und die andere, der Abscisse x entsprechende beweglich ist, und 2) durch zwei cylindrische Flächen, deren Erzeugungslinien zu der Axe der z parallel sind, und deren Gleichungen die Form:

$$(23) \qquad y = f(x), \qquad (24) \qquad y = F(x)$$

haben. Man erhält vier Durchschnittscurven und die zwischen diesen vier Curven liegende Fläche ändert sich offenbar mit der Lage der beweglichen Ebene. Diese Fläche ist folglich eine Function der Abscisse x. Wenn man sie durch $\psi(x)$ und ein der Veränder-

lichen x ertheilten, sehr kleines Increment mit $\triangle x$ bezeichnet, so drückt $\triangle \psi(x)$ eine kleine Fläche aus, deren Projection auf die Ebene der xy einer Seits zwischen den beiden kleinen Bogen pq, rs der durch die Gleichungen (23) und (24) ausgedrückten Curven und anderer Seits zwischen den beiden auf der Axe der x senkrechten und den Abscissen $x, x+\triangle x$ entsprechenden Ebenen liegt. Nun seien θ, Θ zwei Zahlen, welche zwischen den Grenzen 0 und 1 beliebig variiren, so ergibt sich durch eine ähnliche Betrachtung, wie in der vier und zwanzigsten Vorlesung, daß der kleinste und größte der Zahlenwerthe des Productes:

$$(25) \qquad \triangle x\,[F(x+\Theta\triangle x) - f(x+\theta\triangle x)],$$

welche den verschiedenen Werthen der Zahlen θ, Θ entsprechen, resp. die Flächeninhalte der in und um die Projection der Fläche $\triangle \psi(x)$ beschriebenen Rechtecke ausdrücken und folglich die Projectionen der beiden neuen, auf der krummen Fläche (1) liegenden Flächen, wovon die eine kleiner und die andere größer ist als $\triangle \psi(x)$. Da alsdann ferner jede dieser neuen Flächen zwischen vier Ebenen liegt, welche auf der Axe der x oder der y senkrecht sind und den Abscissen $x, x+\triangle x$ oder den Ordinaten von der Form:

$$f(x+\theta\triangle x), \quad F(x+\Theta\triangle x)$$

entsprechen, so wird sie durch ein ähnliches Product wie das im zweiten Theile der Gleichung (22) von der Form:

$$(26) \qquad \triangle x \int_{f(x+\theta\Delta x)}^{F(x+\Theta\Delta x)} \frac{1}{\cos\tau + I}\,dy$$

ausgedrückt, wenn die Differenz $F(x) - f(x)$ der Bequemlichkeit wegen als positiv angenommen wird. Folglich ist das Verhältniß:

$$(27) \qquad \frac{\triangle \psi(x)}{\triangle x}$$

ein Mittel zwischen zwei Integralen von der Form:

$$(28) \qquad \int_{f(x+\theta\Delta x)}^{F(x+\Theta\Delta x)} \frac{1}{\cos\tau + I}\,dy.$$

Läßt man ferner den Zahlenwerth von $\triangle x$ unendlich abnehmen, so nähert sich die Größe I der Grenze Null unendlich und die verschiedenen Werthe des Integrales (28) convergiren gegen dieselbe Grenze:

$$(29) \qquad \int_{f(x)}^{F(x)} \sec\tau \,.\, dy.$$

Folglich ist die Grenze des Verhältnisses (27), oder die abge-

leitete Function $\frac{d\psi(x)}{dx}$ dem Ausdrucke (29) gleich, und man findet:

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \int_{f(x)}^{F(x)} sec\tau \,.\, dy. \tag{30}$$

Da endlich offenbar:

$$\psi(x_0) = 0 \tag{31}$$

ist, so folgt aus der Gleichung (30), wenn sie von $x = x_0$ aus integrirt wird:

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} \int_{f(x)}^{F(x)} sec\tau \,.\, dy\, dx. \tag{32}$$

Wenn man in der Gleichung (32) für die veränderliche Abscisse x eine bestimmte X setzt, so folgt daraus:

$$\psi(X) = \int_{x_0}^{X} \int_{f(x)}^{F(x)} sec\tau \,.\, dy\, dx. \tag{33}$$

Wenn man ferner die Fläche $\psi(X)$ mit A und die beiden Functionen $f(x)$, $F(x)$ mit y_0 und Y bezeichnet, so hat man blos:

$$A = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} sec\tau \,.\, dy\, dx. \tag{34}$$

Diese letzte Formel setzt voraus, daß die Differenz:

$$Y - y_0 = F(x) - f(x) \tag{35}$$

zwischen den Grenzen x_0 und X der Veränderlichen x stets positiv bleibt und den Werth der Fläche ausdrückt, welche auf der krummen Fläche (1) zwischen zwei auf der Axe der x senkrechten, durch die Gleichungen:

$$x = x_0, \tag{36}$$ $$x = X \tag{37}$$

ausgedrückten Ebenen und zwischen zwei cylindrischen Flächen, deren Erzeugungslinien zu der Axe der z parallel und deren Gleichungen resp.:

$$y = y_0, \tag{38}$$ $$y = Y \tag{39}$$

sind liegt. Ferner wollen wir bemerken, daß, da die Integrationsgrenzen in Beziehung auf y in den Formeln (32), (33) und (34) Functionen von x sind, die Ordnung der Integrationen nicht wie bei den Formeln (18) und (19) umgekehrt werden darf.

In dem besondern Falle, wo die krumme Fläche (1) mit der Ebene der xy zusammenfällt, hat man:

$$\tau = 0, \quad sec\,\tau = 1,$$

$$\int_{f(x)}^{F(x)} sec\,\tau\, dy = \int_{f(x)}^{F(x)} dy = F(x) - f(x).$$

Zu gleicher Zeit reduciren sich die Flächen $\psi(x)$ und $A = \psi(X)$ auf die in der vier und zwanzigsten Vorlesung (S. 360) mit u und U bezeichneten ebenen Flächen und aus den Formeln (33) und (34) ergibt sich folglich:

$$(40) \qquad u = \int_{x_0}^{x} [F(x) - f(x)]\, dx,$$

$$(41) \qquad U = \int_{x_0}^{X} [F(x) - f(x)]\, dx.$$

Die Formel (41) kann auch folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$(42) \qquad U = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} dy\, dx = \int_{x_0}^{X} (Y - y_0)\, dx,$$

und die drei vorhergehenden Gleichungen sind von den Gleichungen (79) und (80) der Vorles. 24 nicht verschieden.

Wenn die krumme Fläche (1) mit der Ebene der xy zusammenfällt, so sind alsdann die durch die Gleichungen (40) und (41) oder (42) bestimmten Flächen u und U offenbar die Projectionen der Flächen $\psi(x)$ und $A = \psi(X)$ auf die Ebene der xy.

Hinsichtlich der Formel (34) sind ähnliche Bemerkungen zu machen, wie die in der Vorles. 24 über die Formel (80) gemachten. Wenn sich z. B. die durch die Gleichungen (38) und (39) ausgedrückten und in der Ebene der xy liegenden Curven in zwei verschiedenen Punkten schneiden und man nimmt an, daß x_0, X die Abscissen dieser Punkte in der Formel (34) bezeichnen, so ist die Fläche A die, deren Projection U auf die Ebene der xy sich auf die zwischen den beiden Curven liegende Fläche reducirt, und folglich liegt sie zwischen zwei cylindrischen Flächen, deren Basen die beiden erwähnten Curven sind. Dasselbe würde noch der Fall sein, wenn sich die beiden Curven in den Punkten berührten, deren Abscissen x_0, X sind. Denn es könnte geschehen, daß

$$y = y_0, \quad y = Y$$

zwei aus ein und derselben Gleichung:

$$(43) \qquad F(x, y) = 0,$$

welche eine ganz geschlossene Curve ausdrückt, abgeleitete Werthe

von y wären. Alsdann brauchte man nur für x_0 und X die größte und kleinste der Abscissen zu setzen, welche den verschiedenen Punkten der Curve entsprechen, damit die durch die Formel (34) bestimmte Fläche A genau die auf der krummen Fläche (1) innerhalb der Curve, nach welcher diese krumme Fläche von der durch die Gleichung (43) ausgedrückten cylindrischen Fläche geschnitten wird, liegende Fläche ist.

Wenn man für die krumme Fläche (1) eine geschlossene krumme Fläche substituirte, welche von einer beliebigen, zu der Axe der z parallelen Secante nur in zwei Punkten geschnitten werden kann, so brauchte man, um aus der Formel (34) den Gesammtflächeninhalt dieser neuen geschlossenen krummen Fläche abzuleiten, nur die Gleichung (43) mit der zusammenfallen zu lassen, welche die um die geschlossene krumme Fläche beschriebene und durch eine zur Axe der z parallele Gerade erzeugte cylindrische Fläche ausdrückt und dann die gesuchte Fläche in zwei andere zu zertheilen, welche von der Curve begrenzt werden, die der geometrische Ort der der cylindrischen Fläche und der geschlossenen krummen Fläche gemeinschaftlichen Punkte ist. Gewöhnlich sind die erwähnten Punkte nicht von denen verschieden, für welche die Berührungsebene der geschlossenen krummen Fläche zu der Axe der z parallel wird, und folglich wird die vorhin erwähnte cylindrische Fläche durch die Gleichung:

$$\cos\tau = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} = 0 \tag{44}$$

ausgedrückt. Dessen ungeachtet könnte das Gegentheil stattfinden, wenn die Durchschnittslinien der geschlossenen krummen Fläche mit Ebenen, welche zur Axe der z parallel sind, vorspringende oder Rückkehrpunkte darböten. Ferner ist zu bemerken, daß in der gemachten Voraussetzung die Gleichung der geschlossenen krummen Fläche für jeden Werth von x zwei positive Werthe von $\sec\tau$ gibt, welche man nach einander in die Formel (34) substituiren muß, um die beiden Flächen zu erhalten, deren Summe der gesuchten Fläche gleich ist.

Ferner verdient bemerkt zu werden, daß die Formeln (34) und (42) selbst in dem Falle stattfinden, wo jede der Functionen:

$$y_0 = f(x), \quad Y = F(x)$$

mit der Abscisse x die Form verändert, so daß sie successive die Ordinaten mehrerer Curven oder mehrerer in der Ebene der xy nach einander gezogenen Geraden ausdrücken. So könnte man z. B. aus der Formel (34) die auf der krummen Fläche (1) innerhalb eines Prismas, welches ein auf der Ebene der xy beschriebenes convexes Vieleck zur Grundfläche hat, liegende Fläche ableiten.

Endlich wollen wir annehmen, daß die Projection der Fläche A auf die Ebene der xy, d. h. die Fläche U aus mehrern so lie-

genden Theilen bestehe, daß der geradlinige Durchschnitt dieser Fläche mit einer auf der Axe der x senkrechten und der Abscisse x entsprechenden Ebene sich in ein System mehrerer einzelner Längen verwandelt, wovon die erste zwischen zwei gegebenen Linien, die zweite, zwischen zwei andern gegebenen Linien, u. s. w. liegt. Um alsdann die Fläche A zu bestimmen, braucht man sie nur in mehrere Theile zu theilen, wovon jeder vermittelst der Formel (80) berechnet werden kann. Um die Begriffe zu fixiren wollen wir annehmen, daß die nach der Größenfolge geordneten Größen:

$$(45) \qquad y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots$$

Functionen von x sind, welche innerhalb der Grenzen $x = x_0$, $x = X$ die Ordinaten der verschiedenen Linien ausdrücken können, welche die verschiedenen Theile der Fläche U zwischen sich schließen. Man theile die Fläche A in eben so viele entsprechende Theile, welche vermöge der Formel (31) durch die doppelten Integrale:

$$(46) \qquad \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{y_1} \sec\tau \cdot dy\,dx, \int_{x_0}^{X}\int_{y_2}^{y_3} \sec\tau \cdot dy\,dx, \text{ etc...}$$

ausgedrückt werden und addire alle diese Integrale, so erhält man den Werth von A. Man hat folglich:

$$(47) \qquad A = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{y_1} \sec\tau\, dy\,dx + \int_{x_0}^{X}\int_{y_2}^{y_3} \sec\tau \cdot dy\,dx + \text{etc...}$$

oder was dasselbe ist:

$$(48) \qquad A = \int_{x_0}^{X} \left\{ \int_{y_0}^{y_1} \sec\tau \cdot dy + \int_{y_2}^{y_3} \sec\tau\, dy + \text{etc...} \right\} dx.$$

In derselben Voraussetzung wird die Projection der Fläche A oder die Fläche U offenbar durch die Gleichung:

$$(49) \qquad U = \int_{x_0}^{X} \left\{ \int_{y_0}^{y_1} dy + \int_{y_2}^{y_3} dy + \text{etc...} \right\} dx$$

ausgedrückt, welche man auf:

$$(50) \qquad U = \int_{x_0}^{X} \left\{ y_1 - y_0 + y_3 - y_2 + \text{etc...} \right\} dx$$

reduciren kann, und welche mit der Gleichung (80) der Vorlesung 24 übereinstimmt, wenn man den aus der Gleichung (103) abgeleiteten Werth von $f(x)$ in dieselbe substituirt.

Die Formeln (34) und (48) würden unrichtig, wenn man eine Fläche berechnen wollte, welche auf einer krummen Fläche, die von den zu der Axe der z parallelen Geraden in mehrere Punkten ge-

schnitten wird, zwischen einer beliebigen Curve liegt; allein alsdann könnte man durch ein ähnliches Verfahren, wie das weiter oben (S. 335) die gesuchten Fläche in mehrere andere zertheilen, wovon jede leicht vermittelst der Formel (34) oder (48) bestimmt werden könnte. Es ist nun noch übrig, einige Amoerdungen von diesen Formeln zu machen.

Zunächst wollen wir bemerken, daß man vermöge der Formel (*A*) auf Seite 369, wenn man darin $\chi(x)=1$ setzt

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = f(\xi)\int_{x_0}^{X} dx = (X-x_0)\,f(\xi),$$

folglich:

$$\int_{y_0}^{Y} sec\,\tau\,.\,dy = (Y-y_0)\,sec\,t$$

hat, wo t eine Mittelgröße zwischen den verschiedenen Werthen bezeichnet, welchen der Winkel τ annimmt, während y zwischen den Grenzen y_0, Y variirt. Demnach kann man für die Gleichung (34) folgende setzen:

$$A=\int_{x_0}^{X}(Y-y_0)\,sec\,t\,.\,dx$$

und nach der Gleichung (*A*) auf Seite 369 hat man endlich:

$$A=sec\,T\int_{x_0}^{X}(Y-y_0)\,dx,$$

oder was dasselbe ist:

$$A=U\,sec\,T, \tag{51}$$

wo T ein Mittel zwischen den verschiedenen Werthen von t, welche den verschiedenen Werth von x entsprechen, und folglich ein Mittel zwischen den verschiedenen Neigungen der Fläche A gegen die Ebene der xy bezeichnet. Da man aber eine beliebige Ebene zur Ebene der xy nehmen kann, so führt die Formel (51) offenbar zu folgendem Lehrsatze:

Lehrsatz 2. Das Verhältniß zwischen einer krummen Fläche und ihrer Projection auf eine beliebige Ebene ist ein Mittel zwischen den Secanten der verschiedenen Neigungen der krummen Fläche gegen diese Ebene.

Dieser Lehrsatz könnte auch leicht aus dem ersten Lehrsatze abgeleitet werden. Denn wenn man die gegebene krumme Fläche und ihre Projection in correspondirende Elemente von sehr kleinen Dimensionen zerlegt, so folgt aus einer bekannten Formel und dem Lehrsatz 1, daß das Verhältniß zwischen der krummen Fläche und ihrer Projection ein Mittel zwischen den Verhältnissen ist, welche man erhält, wenn man die verschiedenen Elemente der krummen Fläche durch ihre resp. Projectionen dividirt, und daß folglich dieses Verhältniß von der Form:

$$\frac{1}{\cos T + I}$$

ist, wo T ein Mittel zwischen den verschiedenen, für die verschiedenen Elemente berechneten Werthen von τ und I eine sehr kleine Größe ist. Da nun dieser Schluß stattfinden muß, wenn sich die Dimensionen der Elemente der krummen Fläche und die Größe I der Grenze Null beliebig nähern; so ist klar, daß sich das Verhältniß der krummen Fläche zu ihrer Projection auf eine Größe von der Form $\frac{1}{\cos T} = \sec T$ reduciren muß.

Wenn die Neigung τ constant wird, so kann man in der Formel (34) oder (48) den Factor $\sec\tau$ aus den beiden sich auf die Veränderlichen y und x beziehenden Integrationszeichen heraustreten lassen und alsdann folgt aus dieser Formel in Vergleich mit der Gleichung (42) oder (50):

$$U = A\sec\tau. \tag{52}$$

Man kann also folgenden Lehrsatz aufstellen.

Lehrsatz 3. Wenn eine Fläche in allen ihren Punkten dieselbe Neigung gegen die Ebene der xy hat, so wird eine auf derselben genommene Flächenausdehnung durch das Product aus ihrer Projection auf die Ebenene der xy und der Secante der Neigung ausgedrückt.

Dieser Lehrsatz, welchen man direct und ohne alle Rechnung aus dem zweiten Lehrsatze ableiten kann, ist von dem bereits (S. 302) angeführten Satze nicht verschieden, wenn die gegebene Fläche eine Ebene ist. Er ist übrigens auf die Quadratur mehrerer krummer Flächen, z. B. auf die Bestimmung einer auf der Oberfläche eines geraden Kegels, welcher einen in der Ebene der xy liegenden Kreis zur Basis und eine zur Axe der z parallele Gerade zur Axe hat, betrachteten Flächenausdehnung anwendbar. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß die in Rede stehende Flächenausdehnung die Oberfläche eines abgestumpften Kegels sei, welcher die mit den Halbmessern r_0 und R beschriebenen Kreise als Grundflächen hat. Die Fläche U ist der Unterschied zwischen den Flächen dieser beiden Kreise. Man hat also:

$$U = \pi R^2 - \pi r_0^2 = \pi(R^2 - r_0^2) \tag{53}$$

und folglich:

$$A = U\sec\tau = \pi(R^2 - r_0^2)\sec\tau,$$

oder was dasselbe ist:

$$A = \frac{2\pi R + 2\pi r_0}{2}(R - r_0)\sec\tau. \tag{54}$$

Da nun die Seitenlinie des abgestumpften Kegels die Differenz $R - r_0$ zwischen den Halbmessern seiner Grundflächen zur Projection auf der Ebene der xy hat, und mit der Horizontalebene den Winkel τ bildet; so wird sie offenbar durch das Produkt $(R - r_0) \sec\tau$ ausgedrückt, während die Umfänge der beiden Grundflächen des abgestumpften Kegels durch $2\pi R$ und $2\pi r_0$ ausgedrückt werden. Also führt uns die Formel (54) auf folgenden bereits bekannten Lehrsatz.

Lehrsatz 4. Wenn man einen geraden Kegel mit kreisförmiger Basis mit zwei auf seiner Axe senkrechten Ebenen durchschneidet, so ist die Seitenoberfläche des zwischen diesen beiden Ebenen liegenden abgestumpften Kegels dem Producte aus seiner Seitenlinie und der halben Summe der Umfänge seiner Grundflächen gleich.

Zusatz. Wenn die Ebene der kleinen Grundfläche durch die Spitze des Kegels geht, so verschwindet diese Grundfläche und die durch den vorhergehenden Lehrsatz bestimmte Fläche ist genau die krumme Seitenfläche des Kegels, welche der Hälfte des Productes aus der Seitenlinie desselben und dem Umfange seiner Grundfläche gleich ist.

Wenn sich die Gleichung (1) auf die Form:

$$z = f(x) \tag{55}$$

reducirt, oder wenn die krumme Fläche (1) eine cylindrische Fläche wird, deren Erzeugungslinie zur Axe der y parallel ist, so hat man:

$$\sec\tau = \sqrt{\{1 + [f'(x)]^2\}}. \tag{56}$$

Da alsdann $\sec\tau$ eine Function der Veränderlichen x allein ist, so kann man in der Formel (34) die Integration in Beziehung auf y verrichten und man findet auf diese Weise:

$$\int_{y_0}^{Y} \sec\tau \, . \, dy = (Y - y_0) \sec\tau, \tag{57}$$

$$A = \int_{x_0}^{X} (Y - y_0) \sec\tau \, . \, dx. \tag{58}$$

In derselben Voraussetzung ergäbe sich aus der Formel (48):

$$A = \int_{x_0}^{X} \{ y_1 - y_0 + y_3 - y_2 + \text{etc...} \} \sec\tau dx. \tag{59}$$

Vermittelst dieser letzten Formeln kann man leicht die Größe einer auf der Oberfläche eines geraden Cylinders genommene Flächenausdehnung A bestimmen. Wenn man z. B. die zwischen zwei Erzeugungslinien und zwischen zwei ebenen Curven, welche in parallelen Ebenen zu der der xz liegen, befindliche Fläche sucht, so muß man annehmen, daß y_0 und Y in der Formel (58) sich auf constante Größen reduciren und alsdann folgt aus dieser Formel:

$$(60) \qquad A = \int_{x_0}^{X} \sec\tau \, . \, dx.$$

Uebrigens drückt $Y - y_0$ die gegenseitige Entfernung der beiden Ebenen aus und da die Neigung τ der cylindrischen Fläche gegen die Ebene der xy nichts anders als die Neigung der in der Ebene der xz liegenden Curve, welche die Basis des Cylinders bildet, gegen die Axe der x ist, so drückt das Integral:

$$\int_{x_0}^{X} \sec\tau \, dx$$

offenbar den auf dieser Curve oder auf einer in einer, zu der Ebene der xz parallelen Ebene liegenden Curve zwischen den gegebenen Erzeugungslinien liegenden Bogen S aus. Man kann also folgenden Lehrsatz aufstellen.

Lehrsatz 5. Die auf der Oberfläche eines geraden Cylinders zwischen zwei Erzeugungslinien und zwei in parallelen Ebenen zur Grundfläche liegenden Curven enthaltene Flächenausdehnung ist dem Producte aus der gegenseitigen Entfernung dieser beiden Ebenen und aus dem zwischen den beiden Erzeugungslinien liegenden Bogen einer der Curven gleich.

Der für den Lehrsatz 5 gegebene Beweis ist zwar unmittelbar nur auf die cylindrischen Flächen anwendbar, deren Gleichungen der Gleichung (55) ähnlich sind, d. h. auf cylindrische Flächen, welche von jeder zur Axe der z parallelen Geraden nur in einem einzigen Punkte geschnitten werden. Um aber denselben Lehrsatz auf Flachen auszudehnen, welche auf geraden Cylinderflächen von beliebiger Form liegen, braucht man diese nur in mehrere Theile zu zerlegen, wovon jeder zwischen zwei schicklich gewählten Erzeugungslinien liegt. Man kann also folgenden Lehrsatz aufstellen.

Lehrsatz 6. Die auf einer cylindrischen Fläche, deren Basis eine geschlossene Curve ist, zwischen zwei auf den Erzeugungslinien senkrechten Ebenen liegende Flächenausdehnung ist dem Producte aus der gegenseitigen Entfernung dieser beiden Ebenen und dem Umfange der Basis gleich.

Betrachten wir nun die durch die Gleichung:

$$(61) \qquad x^2 - Rx + z^2 = 0$$

ausgedrückte gerade Cylinderfläche und suchen den Theil derselben, welcher innerhalb der Kugel liegt, welche aus dem Anfangspunkte als Mittelpunkt und mit dem Halbmesser R beschrieben ist. Diese Kugel, wovon ein Halbmesser mit einem Durchmesser der Basis des Cylinders in der Ebene der xz, deren Gleichung:

$$(62) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

ist, zusammenfällt, schneidet die Cylinderfläche nach einer Curve, deren Projection auf die Ebene der xy die Parabel:

$$y^2 = R(R-x) \tag{63}$$

ist. Da nun die beiden Werthe von y, welche die Gleichung (63) gibt, resp.:

$$y = -\sqrt{[R(R-x)]}, \tag{64}$$

$$y = \sqrt{[R(R-x)]} \tag{65}$$

sind, so folgt offenbar aus der Formel (58), daß der Flächeninhalt der auf der Seite der positiven z auf der cylindrischen Fläche genommenen und von der Durchschnittslinie des Cylinders mit der Kugel begrenzten Flächenausdehnung dem Integrale:

$$\int_0^R 2\sqrt{[R(R-x)]}\,\sec\tau\,.\,dx \tag{66}$$

gleich ist, wo τ die Neigung der cylindrischen Fläche in dem Punkte, dessen Abscisse x ist, gegen die Ebene der xy bezeichnet. Ueberdies wird die Secante dieser Neigung durch die Formel (56) gegeben, wenn man für $f'(x)$ den aus der Gleichung (61) gezogenen positiven Werth von z, nämlich:

$$z = \sqrt{(Rx - x^2)} \tag{67}$$

nimmt. Man hat folglich:

$$\sec\tau = \sqrt{\left[1 + \frac{(\frac{1}{2}R-x)^2}{Rx-x^2}\right]} = \frac{\frac{1}{2}R}{\sqrt{(Rx-x^2)}}, \tag{68}$$

und das Integral (66) wird also:

$$R^{\frac{1}{2}}\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}R^2. \tag{69}$$

Nimmt man diese letzte Größe doppelt, so erhält man den Inhalt A der auf der cylindrischen Fläche innerhalb der Kugel, sowohl auf der Seite der positiven, als auch auf der der negativen z liegenden Flächenausdehnung, und man hat folglich:

$$A = 4R^2. \tag{70}$$

Wenn man den Theil der Kugeloberfläche suchte, welcher auf der Seite der positiven y und auf der Seite der negativen z innerhalb der Cylinderfläche liegt, so müßte man die Formel (34) anwenden und in derselben:

$$x_0 = 0,\ X = R,\ y_0 = \sqrt{[R(R-x)]},$$
$$Y = \sqrt{(R^2 - x^2)}$$

setzen. Ferner wollen wir bemerken, daß man, wenn man die Gleichung der Kugel 1) in Beziehung auf x, indem man z als Function von x betrachtet, und 2) in Beziehung auf y, indem man z als Function von y betrachtet, differenzirt

$$x + z\frac{dz}{dx} = 0,\quad y + z\frac{dz}{dy} = 0,$$

$$p = \frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z},\quad q = \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}$$

erhält, und daß folglich der durch die Formel (21) bestimmte Werth von $sec\,\tau$ auf:

$$(71)\quad \left\{\begin{array}{l} sec\,\tau = \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}\right)} \\ \qquad = \frac{R}{z} = \frac{R}{\sqrt{(R^2 - x^2 - y^2)}} \end{array}\right.$$

reducirt werden muß. Demnach erhält man für die gesuchte Fläche:

$$(72)\quad R\int_0^R \int_{\sqrt{(R^2-Rx)}}^{\sqrt{(R^2-x^2)}} \frac{1}{\sqrt{(R^2 - x^2 - y^2)}}\, dy\, dx.$$

Ueberdies hat man allgemein:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(R^2 - x^2 - y^2)}} = arc\,sin\,\frac{y}{\sqrt{(R^2 - x^2)}} + C,$$

wo C eine von y unabhängige Größe bezeichnet, und folglich ist:

$$\int_{\sqrt{(R^2-Rx)}}^{\sqrt{(R^2-x^2)}} \frac{dy}{\sqrt{(R^2 - x^2 - y^2)}} = \frac{\pi}{2} - arc\,sin\left(\frac{R}{R+x}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= arc\,cos\left(\frac{R}{R+x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die gesuchte Fläche wird also durch das einfache Integral:

$$(73)\quad R\int_0^R arc\,cos\left(\frac{R}{R+x}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

ausgedrückt, und um dasselbe zu bestimmen, braucht man nur

$$(74)\quad s = arc\,cos\left(\frac{R}{R+x}\right)^{\frac{1}{2}},$$

oder was daſſelbe iſt:

$$x = R\,tang^2 s \tag{75}$$

zu ſetzen. Denn alsdann findet man:

$$\int arc\,cos\left(\frac{R}{R+x}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int s\,dx = sx - \int x\,ds$$

$$= sx\,R\int\left(\frac{1}{cos^2 s} - 1\right) ds$$

$$= (x+R)s - R\,tang\,s + const.,$$

und folglich:

$$R\int_0^R arc\,cos\left(\frac{R}{R+x}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) R^2. \tag{76}$$

Nimmt man dieſe letzte Größe doppelt, ſo erhält man den Theil der Kugelfläche, welcher auf der Seite der poſitiven y innerhalb des Cylinders liegt und ſowohl den poſitiven, als negativen Werthen der Ordinate z entſpricht. Wenn man alſo den in Rede ſtehenden Theil der Kugelfläche mit A bezeichnet, ſo hat man:

$$A = (\pi - 2)\,R^2 = (1{,}1415\ldots)\,R^2. \tag{77}$$

Ferner wollen wir annehmen, daß in der Ebene der xy eine Curve beſchrieben ſei, welche durch die Gleichung:

$$y = f(x) \tag{78}$$

ausgedrückt wird und daß ſie ſich um die Axe der x drehe, ſo erzeugt ſie eine Rotationsfläche, deren Gleichung:

$$y^2 + z^2 = [f(x)]^2 \tag{79}$$

iſt (ſ. S. 284—285) und der auf der Seite der poſitiven z zwiſchen zwei auf der Axe der x ſenkrechten Ebenen liegende Theil dieſer Fläche wird vermöge der Formel (34) durch den Zahlenwerth des doppelten Integrales:

$$\int_{x_0}^{X}\int_{-f(x)}^{f(x)} sec\,\tau\,dy\,dx \tag{80}$$

ausgedrückt, wofern x_0, X die den beiden gegebenen Ebenen entſprechenden Abſciſſen bezeichnen und die Function $f(x)$ innerhalb der Grenzen $x = x_0$, $x = X$ das Zeichen nicht verändert. Was den Werth von $sec\,\tau$ anlangt, ſo ergibt er ſich aus den Gleichungen (21) und (79), und da die letzte dieſer Gleichungen, wenn ſie ſucceſſive in Beziehung auf x und y differenzirt wird

$$z\frac{dz}{dx}=f(x).f'(x),\quad y+z\frac{dz}{dy}=0,$$

$$p=\frac{dz}{dx}=\frac{f(x).f'(x)}{z},\quad q=\frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z}$$

gibt, so hat man offenbar:

$$(81)\quad \begin{cases} sec\tau=\sqrt{\left[1+\left(\frac{f(x).f'(x)}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2\right]} \\ \quad=\pm\frac{f(x)\sqrt{|1+[f'(x)]^2|}}{\sqrt{|[f(x)]^2-y^2|}}. \end{cases}$$

Außerdem sieht man leicht ein: 1) daß sich der Zahlenwerth des Integrales:

$$\int_{-f(x)}^{f(x)}\frac{dy}{\sqrt{|[f(x)]^2-y^2|}}$$

immer auf die Zahl π reducirt, und 2) daß der Zahlenwerth des Productes:

$$f(x)\sqrt{|1+[f'(x)]^2|}$$

genau der Normale N der Curve (78) gleich ist. Folglich kann das Integral (80) auf:

$$\pi\int_{x_0}^{X}N\,dx$$

reducirt werden, und wenn man dieses letztere doppelt nimmt, so erhält man die ganze Fläche, welche auf der Rotationsfläche zwischen den beiden, den Abscissen x_0, X entsprechenden Ebenen liegt. Bezeichnet man also diese Fläche mit A, so hat man:

$$(82)\qquad A=2\pi\int_{x_0}^{X}N\,dx.$$

Da die Formel (82) also für den Fall bewiesen ist, wo die Function $f(x)$ zwischen den Grenzen x_0, X stets dasselbe Zeichen behält, so braucht man, um sie auf den entgegengesetzten Fall auszudehnen, die Fläche A nur in mehrere Theile zu theilen, welche den auf beiden Seiten der Axe der x liegenden verschiedenen Theilen der Curve (78) entsprechen und alsdann ist jeder dieser Theile wieder das Product aus der Zahl 2π und einem ähnlichen Integrale, wie das in der Gleichung (82) vorkommende; aber zwischen andern Grenzen genommen, und wenn man alle diese Integrale zusammenaddirt, so findet man zur Summe:

$$\int_{x_0}^{X}N\,dx.$$

Uebrigens kann man direct mit Hülfe folgender Betrachtungen eine Formel ableiten, welche die Formel (82) unter sich begreift.

Es sei $\psi(x)$ die auf der Rotationsfläche (79) zwischen zwei festen Ebenen, welche durch die Axe der x gehen und einen Winkel φ mit einander bilden, und zwischen zwei auf dieser Axe senkrechten Ebenen, wovon die erste der constanten Abscisse x_0 und die zweite der veränderlichen Abscisse x entspricht, liegende Fläche. Ferner wollen wir annehmen, daß τ nicht mehr die Neigung der krummen Fläche (79) in dem Punkte (x, y, z) gegen die Ebene der xy, sondern die Neigung der Curve (78) in dem Punkte, dessen Abscisse x ist, gegen die Axe der x bezeichnet. Wenn man der Veränderlichen x ein sehr kleines Increment $\triangle x$ ertheilt, so ist das entsprechende Increment der Fläche $\psi(x)$, nämlich $\triangle\psi(x)$ ein kleiner Theil der krummen Fläche, für welchen die Neigung gegen die Ebene der yz in allen Punkten fast dieselbe beibt und nur sehr wenig von $\frac{\pi}{2}-\tau$ verschieden ist. Wenn man also diesen Theil der krummen Fläche durch seine Projection auf die Ebene der yz dividirt, so ist das dadurch erhaltene Verhältniß nach Lehrsatz 2 sehr wenig von $sec\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)=\frac{1}{\sin\tau}$ verschieden. Nun ist aber die erwähnte Projection offenbar die Differenz zwischen den Flächen der beiden Kreisausschnitte, welche zwei, den Ordinaten $y, y+\triangle y$ der Erzeugungscurve gleiche Halbmesser beschreiben würden, indem sie sich um den Winkel φ um den Anfangspunkt drehen. Diese Projection wird also ausgedrückt durch:

$$(83)\qquad \frac{\varphi}{2}(y+\triangle y)^2-\frac{\varphi}{2}y^2=y\varphi\cdot\triangle y\left(1+\frac{\triangle y}{2y}\right),$$

und da fast:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{dy}{dx}=\pm tang\,\tau,$$

ist, so kann man den Ausdruck (83) auf:

$$(84)\qquad \pm y\varphi\cdot tang\,\tau\cdot\triangle x(1+i)$$

reduciren, wo i eine sehr kleine Größe bezeichnet. Um nun die Fläche $\triangle\psi(x)$ zu erhalten, braucht man den Ausdruck (84) nur durch einen sehr wenig von $\frac{1}{\sin\tau}$ verschiedenen Factor zu multipliciren. Man hat also:

$$\triangle\psi(x)=\pm y\varphi\frac{tang\,\tau}{\sin\tau+I}(1+i)\triangle x,$$

oder was dasselbe ist:

$$(85)\qquad \frac{\triangle\psi(x)}{\triangle x}=\pm y\varphi\cdot sec\,\tau\frac{\sin\tau}{\sin\tau+I}(1+i),$$

wo I wieder eine sehr kleine Größe bezeichnet, und hieraus folgt, wenn man $\triangle x$ gegen die Grenze Null convergiren läßt:

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \pm y\varphi . sec\tau. \tag{86}$$

Wenn man in dieser letzten Formel für das Product $\pm y sec\tau$ die Länge, welche dasselbe ausdrückt, d. h. die Normale N der Erzeugungscurve setzt, so hat man blos:

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = N\varphi, \tag{87}$$

und wenn man dann die Gleichung (87) von $x = x_0$ an integrirt, so erhält man:

$$\psi(x) = \varphi \int_{x_0}^{x} N dx. \tag{88}$$

Wenn man die durch die vollständige Umdrehung des auf der Curve (78) zwischen den Punkten, deren Abscissen x_0 und X sind, liegenden Bogens erzeugte Fläche haben will, so muß man in der Formel (88) $\varphi = 2\pi$ setzen. Alsdann erhält man die Gleichung:

$$\psi(x) = 2\pi \int_{x_0}^{x} N dx, \tag{89}$$

für welche man, wenn y positiv bleibt, eine der folgenden:

$$\psi(x) = 2\pi \int_{x_0}^{x} y sec\tau dx, \tag{90}$$

$$\psi(x) = 2\pi \int_{x_0}^{x} y\sqrt{(1+y'^2)}\, dx. \tag{91}$$

substituiren kann. Noch ist zu bemerken, daß die Gleichung (89) für die Fläche $A = \psi(X)$ denselben Werth gibt, als die Gleichung (82), wenn man darin $\varphi = 2\pi$ setzt.

Auch verdient bemerkt zu werden, daß die durch die Formel (85) bestimmte Fläche $\triangle\psi(x)$ sehr wenig von der Oberfläche des abgestumpften Kegels, der durch die, auf der die Curve (78) im Punkte (x, y) berührenden Geraden genommenen kleinen Länge $sec\tau . \triangle x$ beschrieben wird, nämlich von $\pm y\varphi sec\tau . \triangle x$ verschieden ist, d. h. das Verhältniß zwischen der Fläche $\triangle\psi(x)$ und der Oberfläche des abgestumpften Kegels ist sehr wenig von der Einheit verschieden.

Wir wollen nun die Formeln (82), (89), ꝛc. auf einige Beispiele anwenden.

Beispiel 1. Wenn sich die Curve (78) in eine gerade Linie verwandelt, welche in der Entfernung R von der Axe der x parallel zu dieser Axe gezogen ist, so drückt A die Seitenoberfläche eines Cylinders aus, welcher durch die Umdrehung dieser Geraden

um die Axe der x erzeugt wird und dessen Höhe genau $= X - x_0$ ist. Da außerdem $N = R$ ist, so folgt aus der Gleichung (82):

$$A = 2\pi R(X - x_0). \tag{92}$$

Aus dieser letzten Formel folgt, daß die Seitenoberfläche eines geraden Cylinders mit kreisförmiger Grundfläche dem Producte aus seiner Höhe und dem Umfange seiner Grundfläche gleich ist. Dieser allgemein bekannte Satz ist übrigens in dem Lehrsatze 6 als ein besonderer Fall enthalten.

Beispiel 2. Wenn die Curve (78) ein Kreis ist, dessen Halbmesser $= R$ ist und dessen Mittelpunkt auf der Axe der x liegt, so drückt der durch die Formel (82) bestimmte Werth von A die Fläche einer Kugelzone aus, deren Höhe $= X - x_0$ ist. Ferner findet man $N = R$, und folglich reducirt sich die Gleichung (82), wie im vorhergehenden Beispiele, auf die Gleichung (92). Nun folgt aber aus dieser letzten Gleichung, daß man, um die Fläche einer Kugelzone zu erhalten, nur ihre Höhe mit dem Umfange eines größten Kreises zu multipliciren braucht, wie in der Elementargeometrie bewiesen wird. Wenn die Höhe der Zone dem Durchmesser der Kugel gleich wird, worauf sie liegt, so wird durch den eben erwähnten Satz die Oberfläche der Kugel bestimmt, und es ergibt sich also, daß die Oberfläche der Kugel der vierfachen Fläche eines größten Kreises gleich ist.

Beispiel 3. Wir wollen nun annehmen, daß die Curve (78) eine Ellipse ist, deren Axen $2a, 2b$ sind, und welche durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{93}$$

ausgedrückt wird; so drückt die auf

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1 \tag{94}$$

reducirte Gleichung (79) ein Rotationsellipsoid aus, und man findet:

$$N = \frac{b}{a}\sqrt{\left[a^2 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2\right]}.$$

Wenn man ferner $a > b$ setzt und die Excentricität der Ellipse mit ε bezeichnet, so hat man:

$$a\varepsilon = \sqrt{(a^2 - b^2)} \tag{95}$$

und folglich verwandelt sich der Werth von N in:

$$N = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - \varepsilon^2 x^2)}. \tag{96}$$

Aus der Gleichung (82) ergibt sich folglich alsdann:

$$(97) \qquad A = 2\pi \frac{b\varepsilon}{a} \int_{x_0}^{x} \sqrt{\left(\frac{a^2}{\varepsilon^2} - x^2\right)}\, dx.$$

Nun drückt aber vermöge der Formel (21) in Vorlesung 24 das Product:

$$(98) \qquad 2\frac{b\varepsilon}{a} \int_{x_0}^{x} \sqrt{\left(\frac{a^2}{\varepsilon^2} - x^2\right)}\, dx$$

die Fläche aus, welche in der Ellipse, deren Gleichung:

$$(99) \qquad \frac{\varepsilon^2 x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist und deren Axen $2\frac{a}{\varepsilon}$, $2b$ auf denselben Geraden, als die der gegebenen Ellipse liegen, zwischen den den Abscissen x_0, x entsprechenden Ordinaten liegt. Demnach führt die Formel (97) offenbar auf folgenden Lehrsatz:

Lehrsatz 7. Wenn man eine Ellipse sich um ihre große Axe drehen läßt, so wird die Fläche der durch die Umdrehung eines Bogens derselben erzeugten Zone durch das Product aus der Zahl π und durch die Fläche, welche zwischen den Ebenen der Grundflächen der Zone in einer zweiten Ellipse liegt, welche aus der ersten abgeleitet wird, wenn man die große Axe im umgekehrten Verhältnisse der Excentricität wachsen läßt, ausgedrückt.

Wenn die Höhe der Zone der großen Axe der gegebenen Ellipse gleich ist, so wird durch den vorhergehenden Lehrsatz die ganze Oberfläche des Rotationsellipsoides bestimmt und für den Werth derselben findet man, wenn man die Formeln auf Seite 350 berücksichtigt:

$$(100) \qquad A = 2\pi b^2 + 2\pi \frac{ab}{\varepsilon} \operatorname{arc\,tang} \frac{a\varepsilon}{b},$$

Wenn man $a < b$ setzte und die Excentricität der Ellipse (99) wieder durch ε bezeichnete, so hätte man:

$$(101) \qquad b\varepsilon = \sqrt{(b^2 - a^2)},$$

und folglich:

$$(102) \qquad N = \frac{b^2\varepsilon}{a^2} \sqrt{\left(\frac{a^4}{b^2\varepsilon} + x^2\right)}.$$

Mithin ergibt sich alsdann aus der Gleichung (82):

$$(103) \qquad A = 2\pi \frac{b^2\varepsilon}{a^2} \int_{x_0}^{x} \sqrt{\left(\frac{a^4}{b^2\varepsilon^2} + x^2\right)}\, dx.$$

Nun drückt aber das Product:

$$2\frac{b^2\varepsilon}{a^2}\int_{x_0}^{X}\sqrt{\left(\frac{a^4}{b^2\varepsilon^2}+x^2\right)}\,dx \tag{104}$$

vermöge der Formel (30) in Vorles. 24 offenbar die Fläche aus, welche in der Hyperbel, deren Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{b^2\varepsilon^2x^2}{a^4}=1 \tag{105}$$

ist, deren Axen $2\frac{a^2}{b\varepsilon}, 2b$ sind und auf denselben geraden Linien als die der gegebenen Ellipse liegen, zwischen den den Abscissen x_0, X entsprechenden Ordinaten liegt, und man kann also folgenden Lehrsatz aufstellen.

Lehrsatz 8. Wenn man eine Ellipse sich um ihre kleine Axe drehen läßt, so wird die Fläche, welche durch die Umdrehung eines Bogens derselben beschrieben wird, durch das Product aus der Zahl π und der Fläche ausgedrückt, welche in einer Hyperbel, deren reelle Axe mit der kleinen Axe der Ellipse zusammenfällt und deren zweite Axe dem Quotienten aus dem Quadrate der großen Axe der Ellipse und dem Producte der kleinen Axe und der Excentricität gleich ist, zwischen den Ebenen der beiden Grundflächen der Zone liegt.

Wenn die Höhe der Zone der kleinen Axe $2a$ der gegebenen Ellipse gleich ist, so ergibt sich aus dem vorhergehenden Lehrsatze oder aus der Gleichung (103) die ganze Oberfläche des Rotationsellipsoides und als den Werth dieser Fläche findet man mit Berücksichtigung der dritten Formel auf Seite 352:

$$A=2\pi b^2+\frac{\pi a^2}{\varepsilon}l\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right). \tag{106}$$

Beispiel. 4. Wir wollen jetzt annehmen, die Curve (78) sei eine Hyperbel, welche durch eine der Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{107}$$

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \tag{108}$$

ausgedrückt wird, so drückt die, auf eine der beiden folgenden:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1, \tag{109}$$

$$\frac{y^2+z^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \tag{110}$$

reducirte Gleichung (79) ein Rotationshyperboloid mit zwei getrennten Fächern, oder mit einem Fache aus, und man findet:

$$N=\frac{b}{a}\sqrt{\left[\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)x^2\mp a^2\right]}. \tag{111}$$

Setzt man ferner der Kürze wegen:

$$a\varepsilon = \sqrt{(a^2 + b^2)}, \tag{112}$$

so verwandelt sich der Werth von N in:

$$N = \frac{b}{a}\sqrt{(\varepsilon^2 x^2 \mp a^2)}, \tag{113}$$

und folglich gibt die Gleichung (82):

$$A = 2\pi \frac{b\varepsilon}{a} \int_{x_0}^{x} \sqrt{\left(x^2 \mp \frac{a^2}{\varepsilon^2}\right)}\, dx. \tag{114}$$

Nun drückt aber vermöge der Formel (80) in Vorlesung 24 das Product:

$$2\,\frac{b\varepsilon}{a} \int_{x_0}^{x} \sqrt{\left(x^2 \mp \frac{a^2}{\varepsilon^2}\right)}\, dx \tag{115}$$

die Fläche aus, welche in den durch die Gleichungen:

$$\frac{\varepsilon^2 x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{116}$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{\varepsilon^2 x^2}{a^2} = 1 \tag{117}$$

ausgedrückten Hyperbeln zwischen den, den Abscissen x_0, X entsprechenden Ordinaten liegt. Da nun die Constante ε offenbar die Excentricität der Hyperbel (107) bezeichnet, so führt die Formel (114) auf folgenden Lehrsatz:

Lehrsatz 9. Wenn man eine Hyperbel sich um ihre reelle Axe drehen läßt, so wird der Flächeninhalt der durch die Umdrehung eines Bogens derselben erzeugten Zone durch das Product aus der Zahl π und der Fläche ausgedrückt, welche in einer zweiten Hyperbel, die aus der ersten abgeleitet wird, wenn man die reelle Axe im umgekehrten Verhältnisse der Excentricität abnehmen läßt, zwischen den Ebenen der Grundflächen der Zone liegt.

Beispiel 5. Ferner wollen wir annehmen, daß die Curve (78) eine Parabel:

$$y^2 = 2px, \tag{118}$$

wo p eine positive Größe ist, sei, so drückt die auf:

$$y^2 + z^2 = 2px \tag{119}$$

reducirte Gleichung (79) ein Rotationsparaboloid aus, und man findet:

$$N = \sqrt{(2px + p^2)}. \tag{120}$$

Man hat folglich:

$$x = \frac{N^2 - p^2}{2p}, \quad dx = \frac{1}{p} N dN,$$

und die Formel (89) gibt:

$$(121) \qquad \psi(x) = \frac{2\pi}{p} \int_{N_0}^{N} N^2 dN = \frac{2\pi}{3p} (N^3 - N_0^3),$$

wo N_0 den $x = x_0$ entsprechenden Werth von N bezeichnet. Folglich wird die durch die vollständige Umdrehung eines parabolischen Bogens um die Axe dieser Curve beschriebene Fläche durch zwei Drittel des Productes ausgedrückt, welches man erhält, wenn man das Verhältniß zwischen der Zahl π und dem Parameter durch den Unterschied der Würfel der den beiden Endpunkten des Bogens entsprechenden Normalen multiplicirt. Setzt man als besondern Fall $x_0 = 0$, so findet man $N_0 = p$, und die Gleichung (121) gibt:

$$(122) \qquad \psi(x) = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{N^3}{p} - p^2 \right).$$

Beispiel 6. Die Curve (78) sei die durch die Gleichung:

$$(123) \qquad xy = \tfrac{1}{2} R^2$$

ausgedrückte Hyperbel, so drückt die auf:

$$(124) \qquad x^2 (y^2 + z^2) = \tfrac{1}{4} R^4$$

reducirte Gleichung (79) eine Fläche des vierten Grades aus, und aus der Gleichung (90) folgt:

$$(125) \qquad \psi(x) = \pi R^2 \int_{x_0}^{x} \sec\tau \frac{dx}{x}.$$

Ferner folgt aus der Gleichung (123):

$$y' = -\tang\tau = -\tfrac{1}{2} \frac{R^2}{x^2},$$

und folglich:

$$x^2 = \frac{R^2}{2\tang\tau}, \quad l(x) = l(R) - \tfrac{1}{2} l(2) - \tfrac{1}{2} l\tang\tau,$$

$$\frac{dx}{x} = -\tfrac{1}{2} \frac{d\tau}{\sin\tau \cos\tau}.$$

Wenn man also den $x = x_0$ entsprechenden Werth von τ mit τ_0 bezeichnet, so gibt die Gleichung (125):

$$\psi(x) = -\tfrac{1}{2}\pi R^2 \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\sin\tau\cos^2\tau}. \tag{126}$$

Aus dieser letzten Gleichung ergibt sich, wenn man sie mit der Formel (11) in Vorles. 23 vergleicht, unmittelbar folgender Satz:

Die durch die vollständige Umdrehung eines Bogens der Hyperbel (123) um die Axe der x erzeugte Fläche ist das Product aus der Fläche des mit dem Halbmesser R beschriebenen Halbkreises und einem auf der logarithmischen Linie:

$$y = e^x \tag{127}$$

so genommenen Bogen, daß die Neigung derselben in jedem Endpunkte dieses Bogens der Neigung der Hyperbel in einem Endpunkte des auf ihr betrachteten Bogens gleich ist.

Dieser Satz ist zur Bestimmung der durch den Hyperbelbogen erzeugten Fläche hinreichend, und überdies folgt aus der Gleichung (126) in Verbindung mit den Gleichungen auf Seite 331:

$$\psi(x) = \tfrac{1}{2}\pi R^2 \left[\frac{1}{\cos\tau_0} - \frac{1}{\cos\tau} + ltang\frac{\tau_0}{2} - ltang\frac{\tau}{2}\right]. \tag{128}$$

Beispiel 7. Wenn sich die Curve (78) auf die durch die Gleichung:

$$y = e^{\frac{x}{a}} \tag{129}$$

ausgedrückte logarithmische Linie reducirt, so gibt die Gleichung (91):

$$\psi(x) = 2\pi \int_{x_0}^{x} e^{\frac{x}{a}} \sqrt{(1+y'^2)}\, dx. \tag{130}$$

Ferner folgt aus der Gleichung (129):

$$y' = \frac{1}{a} e^{\frac{x}{a}},$$

und folglich:

$$dy' = \frac{1}{a^2} e^{\frac{x}{a}} dx, \quad e^{\frac{x}{a}} dx = a^2 dy'.$$

Demnach kann der Werth von $\psi(x)$ auf:

$$\psi(x) = 2\pi a^2 \int_{y'_0}^{y'} \sqrt{(1+y'^2)}\, dy' \tag{131}$$

reducirt werden, wo y'_0 den $x = x_0$ entsprechenden Werth von y'

bezeichnet. Wenn man nun die dritte Formel auf Seite 352 berücksichtigt, so findet man:

$$\int\sqrt{(1+y'^2)}\,dy' = \tfrac{1}{2}y'\sqrt{(1+y'^2)} + \tfrac{1}{2}l\left[\frac{\sqrt{(1+y'^2)}+y'}{\sqrt{(1+y'^2)}-y'}\right] + const.$$
$$= \tfrac{1}{2}\frac{\sin\tau}{\cos^2\tau} + \tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+\sin\tau}{1-\sin\tau}\right) + const,$$

und die Formel (131) gibt:

(132) $$\psi(x) =$$
$$\pi a^2\left[\frac{\sin\tau}{\cos^2\tau} + l\,tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right) - \frac{\sin\tau_0}{\cos^2\tau_0} - l\,tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau_0}{2}\right)\right]$$

Beispiel 8. Wenn sich die Curve (78) auf die Kettenlinie reducirt, welche durch die Gleichung:

(133) $$y = a\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2},$$

ausgedrückt wird, so findet man:

(134) $$N = \frac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2;$$

und aus der Formel (89) folgt, wenn man der Kürze wegen $x_0 = 0$ setzt:

(135) $$\psi(x) = \pi a\int_0^x\left(1+\frac{e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}}{2}\right)dx,$$

oder was dasselbe ist:

(136) $$\psi(x) = \pi a\left[x+\frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}}+e^{-\frac{2x}{a}}\right)\right].$$

Beispiel 9. Wenn die Curve (78) die durch das System der Gleichungen:

(137) $$x = R(\omega-\sin\omega),\quad y = R(1-\cos\omega)$$

ausgedrückte Cycloide ist (s. Vorles. 2) so hat man:

$$\sqrt{(1+y'^2)}\,dx = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$$
$$= 2^{\frac{1}{2}}R(1-\cos\omega)^{\frac{1}{2}}\,d\omega$$

und aus der Gleichung (91) folgt, wenn der Winkel ω innerhalb der Grenzen 0 und 2π angenommen wird:

$$(138)\quad \begin{cases} \psi(x) = 2^{\frac{5}{2}}\pi R^2 \int_{\omega_0}^{\omega} (1-\cos\omega)^{\frac{3}{2}}\, d\omega \\ \qquad = 8\pi R^2 \int_{\omega_0}^{\omega} \sin^3\frac{\omega}{2}\, d\omega. \end{cases}$$

Außerdem findet man;

$$8\sin^3\frac{\omega}{2} = \left(\frac{e^{\frac{\omega}{2}\sqrt{-1}} - e^{-\frac{\omega}{2}\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}\right)^3 = 6\sin\frac{\omega}{2} - \sin\frac{3\omega}{2}.$$

Setzt man nun der Kürze wegen $\omega_0 = 0$, so verwandelt sich der Werth von $\psi(x)$ in:

$$(139)\quad \psi(x) = 4\pi R^2\left(\frac{8}{3} - 3\cos\frac{\omega}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3\omega}{2}\right).$$

Will man z. B. die Fläche A haben, welche ein Zweig der Cycloide beschreibt, so muß man in der Formel (139) $\omega = 2\pi$ setzen, und man findet:

$$(140)\quad A = \frac{64}{3}\pi R^2 = \frac{\pi}{3}(8R)^2.$$

Zum Schlusse dieser Vorlesung wollen wir noch zwei Lehrsätze beweisen, welche bei der Bestimmung der auf Rotationsflächen betrachteten Flächenausdehnungen von Nutzen sein können. Wenn man nicht mehr die Curve (78), sondern die durch die Gleichung:

$$(141)\quad y = b + f(x),$$

worin b eine positive Constante bezeichnet, ausgedrückte Curve sich um die Axe der x drehen läßt, so ist die Normale dieser Curve nicht mehr dem Producte:

$$f(x)\sqrt{\{1 + [f'(x)]^2\}},$$

sondern dem Producte:

$$[b + f(x)]\sqrt{\{1 + [f'(x)]^2\}}$$

gleich. Man braucht also nur dieses letzte Product für den Buchstaben N in den zweiten Theil der Gleichung (82) zu setzen, um die Fläche zu erhalten, welche durch die vollständige Umdrehung des auf der Curve (141) zwischen den, den Abscissen x_0, X entsprechenden Punkten liegenden Bogens erzeugt wird, und wenn man diese Fläche mit Ψ bezeichnet, so findet man:

$$(142) \qquad B = 2\pi \int_{x_0}^{X} f(x) \sqrt{|1 + [f'(x)]^2|}\, dx$$

$$+ 2\pi b \int_{x_0}^{X} \sqrt{|1 + [f'(x)]^2|}\, dx$$

$$= A + 2\pi b \int_{x_0}^{X} \sqrt{|1 + [f'(x)]^2|}\, dx$$

Wenn man ferner den auf der Curve (78) zwischen den, den Abscissen x_0, X entsprechenden Punkten liegenden Bogen mit S bezeichnet, so hat man vermöge der Formel (9) in Vorl. 23:

$$S = \int_{x_0}^{X} \sqrt{|1 + [f'(x)]^2|}\, dx.$$

Demnach gibt die Gleichung (142):

$$(143) \qquad B = A + 2\pi b S,$$

und in dieser letzten Formel ist folgender Lehrsatz enthalten:

Lehrsatz 10. Wenn man einen Curvenbogen successive um eine willkührlich gewählte Axe und um eine zweite, zu der ersten parallele und um die Länge b von ihr entfernte Axe sich drehen läßt, so ist der Unterschied der in beiden Fällen erzeugten Rotationsflächen dem Producte aus dem erzeugenden Bogen und dem Kreise gleich, welchen ein Punkt der zweiten Axe um die erste beschreibt, wofern jedoch die beiden Axen den erzeugenden Bogen nicht schneiden und in Beziehung auf diesen Bogen auf derselben Seite liegen.

Wenn man in den Gleichungen (141), (142) und (143) für die positive Constante b die negative Constante $-b$ setzt, und außerdem annimmt, daß die Bedingung:

$$(144) \qquad f(x) < b$$

für alle zwischen den Grenzen x_0, X liegende Werthe von x erfüllt wird; so verwandelt sich der zweite Theil der Gleichung (143) in:

$$A - 2\pi b S$$

und drückt alsdann nicht mehr die Fläche B, sondern die Fläche $-B$ aus. Man hat folglich alsdann:

$$(145) \qquad A + B = 2\pi b S$$

und kann folgenden Lehrsatz aufstellen:

Lehrsatz 11. Wenn alles, wie in Lehrsatz 10 bleibt und die beiden Rotationsaxen in Beziehung auf den er-

zeugenden Bogen auf entgegengesetzten Seiten liegen, so ist die Summe der erzeugten Rotationsflächen das Product aus den erzeugenden Bogen und dem Kreisumfange, welchen ein Punkt der zweiten Axe um die erste beschreibt.

Vermittelst der Lehrsätze 10 und 11, welche sich auch auf den Fall ausdehnen lassen, wo der gegebene Curvenbogen von den auf der Rotationsaxe senkrechten Ebenen in mehrern Punkten geschnitten wird, kann man leicht die Fläche B der Zone bestimmen, welche von einem sich um eine Axe drehenden Kreisbogen S erzeugt wird. Denn es sei R der Halbmesser des Kreises, b die Entfernung seines Mittelpunktes von der Axe und H die Höhe der Zone, und außerdem wollen wir, um die Begriffe zu fixiren, uns eine zweite Axe denken, welche durch den Mittelpunkt des Kreises parallel zu der gegebenen Axe gezogen ist und den Bogen S nicht trifft. Wenn man den durch die Umdrehung des Kreisbogens um die zweite Axe erzeugten Theil der Kugelfläche mit A bezeichnet, so hat man vermöge der Formel (92):

$$A = 2\pi RH,$$

und folglich gibt die Gleichung (143) oder (145):

(146) $$B = 2\pi(bS + RH),$$

oder:

(147) $$B = 2\pi(bS - RH).$$

Wenn der Kreisbogen dem Halbkreise gleich wird, so findet man:

$$H = 2R, \quad S = \pi R$$

und die auf:

(148) $$B = 2\pi R(\pi b + 2R),$$

(149) $$B = 2\pi R(\pi b - 2R)$$

reducirten Gleichungen (146) und (147) geben zwei Werthe für B, deren Summe $4\pi^2 bR$ den ganzen Flächeninhalt der sogenannten ringförmigen Fläche ausdrückt. Ebenso wird bewiesen, daß jede Curve, welche einen Mittelpunkt hat, bei ihrer Umdrehung um eine sie nicht schneidende Axe eine Fläche erzeugt, deren Inhalt durch das Product aus ihrem Umfange und dem von ihrem Mittelpunkte um diese Axe beschriebenen Kreisumfange ausgedrückt wird.

Sechs und zwanzigste Vorlesung.

Kubatur der Körper.

Das Problem der Kubatur der Körper besteht darin, das Volumen zu bestimmen, welches von einer gegebenen Oberfläche eingeschlossen wird. Um leichter zu der allgemeinen Auflösung dieses Problems zu gelangen, wollen wir zuvörderst den Fall betrachten, wo es darauf ankömmt, das Volumen eines geraden Cylinders mit beliebiger Grundfläche zu bestimmen. In diesem besondern Falle kann die Aufgabe unmittelbar vermittelst des folgenden Lehrsatzes gelöst werden.

Lehrsatz 1. Das Volumen V eines geraden Cylinders, dessen Grundfläche $= U$ und dessen Höhe $= H$ ist, wird durch das Product aus dieser Grundfläche und Höhe ausgedrückt, so daß man hat $V = HU \ldots (1)$.

Beweis. Wir wollen alle Punkte des Raumes auf die drei rechtwinkligen Axen der x, y, z bezogen und den Cylinder in einer solchen Lage annehmen, daß seine Erzeugungslinie zur Axe der z parallel ist, und daß die Ebene seiner Grundfläche mit der Ebene der xy zusammenfällt. Außerdem wollen wir annehmen, daß das Volumen V mit einer auf der Axe der x senkrechten und der Abscisse x entsprechenden Ebene geschnitten werde. Endlich seien $f(x)$ der geradlinige Durchschnitt der Grundfläche U mit der schneidenden Ebene, v der Theil des Volumens V, welcher in Beziehung auf diese Ebene auf der Seite der negativen x liegt und u der entsprechende Theil der Grundfläche U. Wenn man der Abscisse x ein unendlich kleines Increment Δx ertheilt, so bekommt das Volumen v ein ähnliches Increment Δv. Nun ist aber leicht einzusehen: 1) daß die Grundfläche Δu des Volumens Δv zwischen zwei Rechtecken liegt, wovon das eine in und das andere um dieselbe beschrieben ist und deren Flächeninhalte durch Producte von der Form:

$$(2) \qquad [f(x)+I]\Delta x, \qquad (3) \qquad [f(x)+J]\Delta x$$

ausgedrückt werden, wo I, J unendlich kleine Größen sind, und 2) daß das Volumen Δv zwischen zwei Parallelepipeden liegt, welche H zur Höhe und die beiden erwähnten Rechtecke als Grundflächen

haben. Folglich ist der Werth des Volumens $\triangle v$ eine Mittelgröße zwischen den beiden Ausdrücken:

(4) $H[f(x)+I]\triangle x$, (5) $H[f(x)+J]\triangle x$,

oder mit andern Worten, man hat:

(6) $$\triangle v = H[f(x)+i]\triangle x,$$

wo i eine neue zwischen I und J liegende unendlich kleine Größe bezeichnet. Dividirt man nun die beiden Theile der Gleichung (6) durch $\triangle x$, so folgt daraus:

(7) $$\frac{\triangle v}{\triangle x} = H[f(x)+i];$$

und wenn man $\triangle x$ gegen die Grenze Null convergiren läßt, so findet man:

(8) $$\frac{dv}{dx} = Hf(x),$$

oder was dasselbe ist:

(9) $$dv = Hf(x)\,dx.$$

Nun seien x_0, X der größte und kleinste der Werthe von x, welche den verschiedenen Punkten des Volumens v oder seiner Grundfläche u entsprechen. Die Functionen u, v verschwinden für $x = x_0$ und wenn man die beiden Theile der Gleichung (9) von $x = x_0$ an integrirt, so findet man:

(10) $$v = H\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

und wenn man dann $x = X$ setzt, so erhält man:

(11) $$V = H\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

Ferner sind die in den Formeln (10) und (11) vorkommenden Integrale vermöge der Gleichungen (79) und (80) der Vorlesung 24 genau die Werthe der Flächen u und U. Folglich kann die erste dieser Formeln auf:

(12) $$v = Hu$$

reducirt werden und die zweite fällt mit der Gleichung (1) zusammen.

Der vorhergehende Beweis bedürfte einer Modification, wenn der geradlinige Durchschnitt $f(x)$ der Fläche U mit einer auf der

Axe der x senkrechten Ebene sich in ein System mehrerer einzelner, durch $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ ausgedrückter Längen verwandelte, wovon die erste zwischen zwei gegebenen Linien, die zweite zwischen zwei andern gegebenen Linien, u. s. w. läge. Aber alsdann könnte man das Volumen V leicht in mehrere Theile V_1, $V_2, V_3, \ldots$ und die Grundfläche U in entsprechende Theile U_1, $U_2, U_3, \ldots$ so zerlegen, daß die obigen Schlüsse zur Aufstellung der Gleichungen:

$$V_1 = HU_1, \quad V_2 = HU_2, \quad V_3 = HU_3, \text{ etc.} \ldots$$

genügten, und wenn man diese letzten Gleichungen addirte, so fände man die Formel (1) wieder.

Wir wollen nun das von einer beliebigen Oberfläche begrenzte Volumen V zu bestimmen suchen. Es sei $F(x)$ der Flächeninhalt des Durchschnittes des Volumens V mit einer auf der Axe der x senkrechten und der Abscisse x entsprechenden Ebene, und wir wollen mit v wieder den Theil des Volumens V bezeichnen, welcher in Beziehung auf die schneidende Ebene auf der Seite der negativen x liegt. Ertheilt man der Abscisse x ein unendlich kleines Increment $\triangle x$, so bekommt das Volumen v ein ähnliches Increment $\triangle v$, welches zwischen zwei Durchschnitten liegt, wovon der erste durch $F(x)$ und der zweite durch $F(x) + \triangle F(x)$ ausgedrückt wird, und es ist einleuchtend, daß, wenn man auf die Ebene des ersten Durchschnittes nicht die ganze, das Volumen V begrenzende Oberfläche, sondern blos die dem Volumen $\triangle v$ entsprechende Zone projicirt, die so projicirte Zone zwischen zwei einander sehr nahe liegenden Curven liegt, wovon die erste der Umfang der Grundfläche des in das Volumen $\triangle v$ beschriebenen geraden Cylinders und die zweite der Umfang der Grundfläche des um dieses Volumen beschriebenen geraden Cylinders ist. Außerdem folgt aus dem dritten Lehrsatze der 24sten Vorlesung, daß die von den beiden erwähnten Curven eingeschlossenen Flächen sehr wenig von der Fläche $F(x)$ verschieden sind; denn werden diese drei Flächen durch eine beliebige, zu der Axe der x parallele Ebene geschnitten, so sind die Unterschiede der drei geraden Durchschnittslinien unendlich klein. Demnach werden die Rauminhalte der in und um das Volumen $\triangle v$ beschriebenen Cylinder durch Producte von der Form:

$$(13) \qquad [F(x) + I] \triangle x, \qquad (14) \qquad [F(x) + J] \triangle x,$$

wo I und J unendlich kleine Größen bezeichnen, ausgedrückt, und man hat folglich:

$$(15) \qquad \triangle v = [F(x) + i] \triangle x,$$

wo i ebenfalls eine unendlich kleine Größe bezeichnet, welche zwischen I und J liegt. Wenn man, nachdem die beiden Theile der Gleichung (15) durch $\triangle x$ dividirt sind, $\triangle x$ gegen die Grenze Null convergiren läßt, so ergibt sich daraus:

(16) $$\frac{dv}{dx} = F(x),$$

oder was daſſelbe iſt:

(17) $$dv = F(x)\,dx.$$

Wenn man endlich den größten und kleinſten der Werthe von x, welche den verſchiedenen Punkten des Volumens V entſprechen, d. h. die Grenzen, innerhalb welcher die Abſciſſe x bleiben muß, damit eine auf der Axe der x ſenkrechte und dieſer Abſciſſe entſprechende Ebene das Volumen V trifft, mit x_0 und X bezeichnet; ſo folgt aus der von $x = x_0$ an integrirten Gleichung (17):

(18) $$v = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx;$$

und ſetzt man dann $x = X$, ſo erhält man die Formel:

(19) $$V = \int_{x_0}^{X} F(x)\,dx.$$

Die Formel (19) findet offenbar auch in dem Falle ſtatt, wo die Fläche $F(x)$ des Durchſchnittes des Volumens V mit einer auf der Axe der x ſenkrechten Ebene ſich in eine Summe mehrerer Flächen $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, ..., welche von verſchiedenen Umfängen begrenzt werden, verwandelt. Alsdann iſt das Volumen V die Summe mehrerer durch die Integrale:

$$\int_{x_0}^{X} F_1(x)\,dx, \quad \int_{x_0}^{X} F_2(x)\,dx, \quad \int_{x_0}^{X} F_3(x)\,dx, \text{ etc...},$$

wo in jedem die Function unter dem Integrationszeichen ſtets einen poſitiven Werth, oder einen Werth $= 0$ hat, während die Abſciſſe x zwiſchen den Grenzen x_0, X variirt, ausgedrückter Volumina. Demnach iſt in dem gegenwärtigen Falle:

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x) + \text{etc...},$$

$$V = \int_{x_0}^{X} F_1(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} F_2(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} F_3(x)\,dx + \text{etc...}$$

und folglich auch:

$$V = \int_{x_0}^{X} F(x)\,dx.$$

Da $F(x)$ in der Formel (19) den Inhalt einer ebenen Fläche ausdrückt, welche in einer, zu einer der Coordinatenebenen parallelen Ebene liegt, ſo iſt klar, daß der Werth von $F(x)$ immer leicht

vermittelst der in der 24sten Vorlesung aufgestellten Sätze bestimmt werden kann.

Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß man, indem x_0, X zwei constante Größen, y_0, Y zwei Functionen der Veränderlichen x und z_0, Z zwei Functionen der Veränderlichen x, y bezeichnen, das Volumen bestimmen soll, welches einer Seits von den beiden, durch die Gleichungen:

$$(20) \qquad z = z_0, \qquad (21) \qquad z = Z$$

ausgedrückten krummen Flächen, anderer Seits von den beiden durch die Gleichungen:

$$(22) \qquad y = y_0, \qquad (23) \qquad y = Y$$

ausgedrückten cylindrischen Flächen und endlich von den beiden Ebenen:

$$(24) \qquad x = x_0, \qquad (25) \qquad x = X$$

begrenzt wird. Der Durchschnitt $F(x)$ dieses Volumens mit einer zu der Ebene der yz parallelen und einem besondern Werthe der Abscisse x entsprechenden Ebene liegt zwischen vier Linien, nämlich zwischen zwei Curven und zwischen zwei zu der Axe der z parallelen Geraden, und um die Gleichungen dieser vier Linien zu erhalten, braucht man in den Formeln (20), (21), (22) und (23) nur die Abscisse x als constant zu betrachten. Bezeichnet man nun den geradlinigen Durchschnitt der Fläche $F(x)$ mit einer auf der Axe der y senkrechten und einem besondern Werthe von y entsprechenden Ebene durch:

$$f(x, y),$$

so hat man offenbar:

$$(26) \qquad f(x, y) = Z - z_0,$$

und die Formel (80) in Vorlesung 24, so wie die Formel (42) in Vorlesung 25 gibt:

$$(27) \qquad F(x) = \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy,$$

oder was dasselbe ist:

$$(28) \qquad F(x) = \int_{y_0}^{Y} (Z - z_0)\, dy = \int_{y_0}^{Y} \int_{z_0}^{Z} dz.$$

Folglich kann die Gleichung (19) auf eine der Formen:

$$(29) \qquad V = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy\, dx,$$

$$(30) \qquad V = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} \int_{z_0}^{Z} dz\, dy\, dx = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} (Z - z_0)\, dy dx$$

gebracht werden. Es verdient bemerkt zu werden, daß die in der Formel (29) unter dem Integrationszeichen vorkommende Function $f(x, y)$ genau der geradlinige Durchschnitt des Volumens V mit zwei auf den Axen der x und der y senkrechten Ebenen ist. Ferner sieht man leicht ein, daß sich die Formel (29) auch auf den Fall erstreckt, wo dieser geradlinige Durchschnitt nicht mehr von den Flächen (20) und (21) begrenzt wird, und sich in eine Summe mehrerer resp. durch:

$$f_1(x, y),\quad f_2(x, y),\quad f_3(x, y),\ \text{etc...}$$

ausgedrückter einzelner Längen verwandelt, wovon die erste zwischen zwei gegebenen Flächen, die zweite zwischen zwei andern gegebenen Flächen, u. s. w. liegt.

Die Formel (29) ließe sich auch durch ähnliche, wie die in der 25sten Vorlesung angewandten Betrachtungen erhalten. Denn wir wollen zuvörderst annehmen, daß sich die Größen y_0, Y auf constante d. h. von der Veränderlichen x unabhängige Größen reduciren. Alsdann liegt das mit V bezeichnete Volumen einer Seits zwischen den krummen Flächen (20) und (21) und anderer Seits zwischen den vier auf den Axen der x und y senkrechten Ebenen, welche durch zwei zu der Axe der z parallele Gerade gelegt sind, wovon die erste den Coordinaten x_0, y_0 und die zweite den Coordinaten X, Y entspricht. Wenn man nun aber statt der zweiten Parallele eine dritte nimmt, welche beliebigen Coordinaten x, y entspricht, so wird das Volumen V veränderlich und ist eine Function von x und y. Wir wollen diese Function mit $\varphi(x, y)$ bezeichnen und es seien $\triangle x$, $\triangle y$ unendlich kleine, den Coordinaten x, y ertheilte Incremente, so ist das sehr kleine Volumen:

$$\triangle_y \triangle_x \varphi(x, y)$$

offenbar eine Mittelgröße zwischen den beiden in und um dasselbe beschriebenen rechtwinkligen Parallelepipeden, und folglich zwischen zwei Producten von der Form:

$$[f(x, y) + I]\triangle x \triangle y,\quad [f(x, y) + J]\triangle x \triangle y,$$

wo I und J zwei unendlich kleine Größen sind. Man hat folglich:

$$(31)\qquad \triangle_y \triangle_x \varphi(x, y) = [f(x, y) + i]\triangle x \triangle y,$$

wo i ebenfalls eine unendlich kleine Größe bezeichnet, welche zwischen I und J liegt. Wenn man in der Gleichung (31) zuerst $\triangle y$ und dann $\triangle x$ gegen die Grenze Null convergiren läßt, so erhält man zwei andere Gleichungen von der Form:

$$(32)\qquad \frac{d\triangle_x \varphi(x, y)}{dy} = [f(x, y) + i]\triangle x,$$

$$(33)\qquad \frac{d^2 \varphi(x, y)}{dx\,dy} = f(x, y).$$

Integrirt man alsdann die Formel (33) in Beziehung auf y von $y=y_0$ an und in Beziehung auf x von $x=x_0$ an und bemerkt, daß die Function $\varphi(x, y)$ nicht blos für $x=x_0$ bei jedem Werthe von y, sondern auch für $y=y_0$ bei jedem Werthe von x verschwinden muß; so findet man:

$$(34) \qquad \varphi(x, y)=\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Wenn man endlich in der Gleichung (34) $x=X, y=Y$ setzt, so erhält man die Gleichung (29) welche also für den besondern Fall, wo y_0, Y constante Größen sind, bewiesen ist.

Gesetzt nun, man wollte von diesem besondern Falle zu dem allgemeinen übergehen, so integrire man die Formel (32) in Beziehung auf y zwischen den Grenzen y_0, Y. Auf diese Weise erhält man die Gleichung:

$$(35) \qquad \triangle_x \varphi(x, Y)=\triangle x\int_{y_0}^{Y}[f(x, y)+i]\, dy,$$

welche das Volumen $\triangle_x \varphi(x, Y)$ bestimmt, welches einer Seits zwischen den krummen Flächen (20) und (21) und anderer Seits zwischen vier Ebenen liegt, die paarweise einander parallel sind, nämlich zwei auf der Axe der y senkrecht und um die Länge $Y-y_0$ von einander entfernt und die beiden andern auf der Axe der x senkrecht und um die sehr kleine Entfernung $\triangle x$ von einander entfernt. Nimmt man nun an, daß y_0, Y in den Gleichungen (22) und (23) nicht mehr constante Größen bezeichnen, sondern Functionen von x werden und bezeichnet alsdann den Theil des Volumens V, welcher durch eine auf der Axe der x senkrechte, der Abscisse x entsprechende Ebene abgeschnitten wird, und in Beziehung auf diese Ebene auf der Seite der negativen x liegt, mit $v=\psi(x)$; so läßt sich leicht beweisen, daß das Volumen $\triangle \psi(x)$ eine Mittelgröße zwischen zwei andern, dem durch die Gleichung (35) bestimmten, ähnlichen und durch Producte von der Form:

$$(36) \qquad \triangle x\int_{y_0+I}^{Y+J}[f(x, y)+i]\, dy,$$

wo I oder J eine Mittelgröße zwischen den verschiedenen Incrementen bezeichnet, welche y_0 oder Y erhält, während man der Abscisse x verschiedene unendlich kleine und zwischen den Grenzen $0, \triangle x$ liegende Incremente ertheilt, ausgedrückten Volumen ist. Folglich liegt das Verhältniß:

$$(37) \qquad \frac{\triangle \psi(x)}{\triangle x}$$

zwischen zwei Integralen von der Form:

$$(38) \qquad \int_{y_0+i}^{Y+J} [f(x, y)+i]\, dy,$$

wo in jedem i, I, J unendlich kleine Größen sind. Wenn man ferner den Zahlenwerth von Δx unendlich abnehmen läßt, so convergiren die beiden erwähnten Integrale gegen dieselbe Grenze:

$$(39) \qquad \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy$$

Folglich ist die Grenze des Verhältnisses (37) oder die abgeleitete Function: $\frac{d\psi(x)}{dx}$ dem Ausdrucke (39) gleich, und man hat:

$$(40) \qquad \frac{d\psi(x)}{dx} = \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy.$$

Integrirt man diese letzte Gleichung von $x = x_0$ aus und bemerkt, daß $\psi(x)$ mit der Differenz $x - x_0$ verschwinden muß, so ergibt sich:

$$(41) \qquad \psi(x) = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy\, dx$$

Setzt man alsdann in der Formel (41) $x = X$, so erhält man die Gleichung (29) wieder, welche also auch für den Fall bewiesen ist, wo die zweiten Theile der Gleichungen (22) und (23) Functionen der Veränderlichen x werden.

Die Formel (29) gibt zu ähnlichen Bemerkungen Veranlassung, wie die in Vorlesung 24 über die Formel (30) und in Vorlesung 25 über die Formel (34) gemachten. Wenn sich z. B. die durch die Gleichungen (22) und (23) ausgedrückten cylindrischen Flächen nach zwei Erzeugungslinien schneiden, und wenn man annimmt, daß x_0, X in der Formel (29) genau die Abscissen der auf diesen Erzeugungslinien liegenden Punkte bezeichnen, so wird das Volumen V entweder von den krummen Flächen (20) und (21) oder von den cylindrischen Flächen (22) und (23) in allen Richtungen begrenzt. Dasselbe würde noch der Fall sein, wenn sich die beiden cylindrischen Flächen nach den den Abscissen x_0, X entsprechenden Erzeugungslinien berührten. Diese beiden cylindrischen Flächen würden sich auf eine einzige reduciren, wenn die beiden Functionen y_0, Y zwei aus derselben Gleichung zwischen y und x abgeleitete Werthe von y bezeichneten. Endlich könnte es in dieser letzten Voraussetzung geschehen, 1) daß sich die krummen Flächen (20) und (21), indem sie von einander verschieden sind, nach einer auf der cylindrischen Fläche beschriebenen Curve schnitten und 2) daß z_0 und Z die beiden, aus derselben Gleichung:

$$(42) \qquad F(x, y, z) = 0,$$

welche eine convexe und überall geschlossene krumme Fläche ausdrükken kann, um die die cylindrische Fläche beschrieben wäre, abgeleiteten Werthe von z wären. Im ersten Falle würde das Volumen V in allen Richtungen von den krummen Flächen (20) und (21) begrenzt und im zweiten Falle würde V das von der krummen Fläche (42) begrenzte Volumen bezeichnen. Wenn man in der Gleichung (20) $z_0 = 0$ setzte, so wäre alsdann das durch die Formel (29) bestimmte Volumen V dasjenige, welches in dem Sinne der x von den beiden Ebenen (24) und (25), in dem Sinne der y von den cylindrischen Flächen (21) und (22) und endlich in dem Sinne der z von der Ebene der xy und von der Fläche:

$$z = f(x, y) \tag{43}$$

begrenzt wird.

Wir haben nun noch einige Anwendungen der vorhin entwickelten Formeln zu geben.

Zuerst wollen wir annehmen, daß in einer der Ebenen (24) und (25) eine beliebige Linie beschrieben sei, welche eine Fläche $= B$ einschließt, und daß sich längs dieser Linie eine stets zu sich selbst parallel bleibende Gerade, die aber nicht zu der Ebene der yz parallel ist, fortrückt, so beschreibt diese Gerade eine cylindrische Fläche und wenn man das innerhalb dieser Fläche zwischen den Ebenen (24) und (25) liegende Volumen mit einer andern, auf der Axe der x senkrechten Ebene durchschneidet; so ist der erhaltene Durchschnitt eine neue ebene Fläche, welche man als der Fläche B gleich annehmen kann. Man hat also in dieser Voraussetzung allgemein:

$$F(x) = B, \tag{44}$$

und die Formel (19) gibt:

$$V = B \int_{x_0}^{X} dx = B(X - x_0). \tag{45}$$

Wenn man der Kürze wegen die gegenseitige Entfernung der beiden Ebenen (24) und (25) mit H bezeichnet, so hat man blos:

$$V = BH, \tag{46}$$

und in dieser letzten Gleichung ist folgender Lehrsatz enthalten:

Lehrsatz 2. Das Volumen V eines schiefen Cylinders von der Grundfläche B und der Höhe H ist dem Producte aus dieser Grundfläche und Höhe gleich.

Betrachten wir nun eine Kegelfläche, deren Spitze mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfällt, deren Basis eine ebene Curve ist, welche in einer auf der Axe der x senkrechten und die Halbaxe der positiven x in der Entfernung 1 vom Anfangspunkte schneidenden Ebene liegt. Endlich seien η, ζ die veränderlichen Coordinaten der in Rede stehenden Curve und

(47) $$f(\eta, \xi) = 0$$

ihre Gleichung, so wird die durch den Punkt (η, ξ) dieser Curve gehende Erzeugungslinie offenbar durch die beiden Gleichungen:

(48) $$\frac{y}{x} = \eta, \quad \frac{z}{x} = \xi$$

ausgedrückt. Eliminirt man nun η und ξ zwischen diesen letzten Gleichungen und der Gleichung (47), so ist klar, daß die resultirende Gleichung:

(49) $$f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$$

für alle Punkte aller Erzeugungslinien erfüllt wird, und sie drückt folglich die Kegelfläche aus. Nun sei A die von der Curve (47) eingeschlossene Fläche. Da der Durchschnitt der Kegelfläche mit einer auf der Axe der x senkrechten Ebene die durch die Gleichung (49) ausgedrückte ebene Curve ist, wenn man der Abscisse x einen constanten Werth beilegt, und folglich eine der Basis der Kegelfläche ähnliche Curve, so ergibt sich aus dem zweiten Lehrsatze der Vorlesung 24 (Zusatz 4), daß die von dieser Curve eingeschlossene Fläche dem Producte Ax^2 gleich ist. Man hat also in dem gegenwärtigen Falle:

(50) $$F(x) = Ax^2$$

und das Volumen V des zwischen den beiden Ebenen $x = x_0$, $x = X$ liegenden, abgestumpften Kegels wird durch die Gleichung:

(51) $$V = A\int_{x_0}^{X} x^2 dx = \frac{A(X^3 - x_0^3)}{3}$$

ausgedrückt. Wenn man insbesondere das Volumen des von der Fläche (49) und von der Ebene $x = X$ begrenzten Kegels haben will, so muß man in der Gleichung (51) $x_0 = 0$ setzen, und man erhält für das gesuchte Volumen:

(52) $$V = \tfrac{1}{3} AX^3.$$

Wenn man ferner die Höhe des Kegels mit H, und die in der ihn begrenzenden Ebene liegende Grundfläche mit B bezeichnet, so hat man offenbar:

$$H = X, \quad B = F(X) = AX^2.$$

Folglich verwandelt sich die Gleichung (52) in:

(53) $$V = \tfrac{1}{3} BH,$$

und in dieser letzten Gleichung ist folgender Lehrsatz enthalten.

Lehrsatz 3. Das Volumen eines Kegels von beliebiger Basis ist dem dritten Theile des Productes aus seiner Grundfläche und Höhe gleich.

Kommen wir nun wieder zu dem abgestumpften Kegel zurück, dessen Volumen durch die Formel (51) bestimmt wird. Wenn man die diesen Kegel begrenzenden Grundflächen mit b und B und seine Höhe mit H bezeichnet, so hat man offenbar:

$$H = X - x_0, \quad b = Ax_0^2, \quad B = AX^2.$$

Folglich gibt die Gleichung (51):

$$V = \tfrac{1}{3} H[B + b + \sqrt{(Bb)}], \tag{54}$$

und man kann mithin folgenden neuen Lehrsatz aufstellen:

Lehrsatz 4. Das Volumen V eines zwischen zwei parallelen Ebenen liegenden abgestumpften Kegels ist dem dritten Theile des Productes gleich, welches man erhält, wenn man die Höhe durch die Summe dreier Flächen multiplicirt, welche resp. den beiden Grundflächen des abgestumpften Kegels und einer mittlern Proportionale zwischen ihnen gleich sind.

Es ist einleuchtend, daß die Lehrsätze 1 und 2 sich auch auf den Fall erstrecken, wo sich die Curve (47) in ein System mehrerer gerader oder krummer Linien verwandelt und folglich der betrachtete Kegel eine Pyramide mit beliebiger Grundfläche wird.

Man kommt also auf die in der Elementargeometrie bewiesenen Sätze zurück.

Stellen wir uns jetzt vor, daß in der Ebene der xy eine durch die Gleichung:

$$y = f(x) \tag{55}$$

ausgedrückte Curve beschrieben sei, und daß sich diese Curve um die Axe der x dreht, so erzeugt sie eine Rotationsoberfläche, deren Durchschnitt mit einer auf der Axe der x senkrechten Ebene genau dem Kreise gleich ist, welcher die entsprechende Ordinate der Erzeugungscurve zum Halbmesser hat. Wenn man also diese Ordinate mit y bezeichnet, so wird die Fläche des Durchschnittskreises oder der Werth von $F(x)$ durch die Formel:

$$F(x) = \pi y^2$$

bestimmt. Demnach ist das Volumen V, welches zwischen der Rotationsfläche und der Ebenen (24) und (25) liegt (vermöge der Gleichung (19)):

$$V = \pi \int_{x_0}^{X} y^2 dx. \tag{56}$$

Wenn man statt der auf der Axe der x senkrechten und der Abscisse X entsprechenden Ebene eine, der veränderlichen Abscisse x entsprechende parallele Ebene setzt, so erhält man statt des Volumens V das Volumen v, welches durch die Formel (18) bestimmt wird, aus der in dem gegenwärtigen Falle:

$$v = \pi \int_{x_0}^{x} y^2 \, dx \tag{57}$$

folgt. Wir wollen diese letzte Formel nun noch auf einige Beispiele anwenden.

Beispiel 1. Wenn die Curve (55) der durch die Gleichung:

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{58}$$

ausgedrückte Kreis ist, so folgt aus der Gleichung (57), wenn man der Bequemlichkeit wegen $x_0 = 0$ setzt:

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \pi \int_0^x (R^2 - x^2) \, dx = \pi x (R^2 - \frac{1}{3} x^2) \\ \quad = \frac{2}{3} \pi R^2 x + \frac{1}{3} \pi y^2 x. \end{array} \right. \tag{59}$$

Aus der Formel (59) folgt, daß das Volumen eines zwischen zwei parallelen Ebenen, wovon die eine durch den Mittelpunkt der Kugel geht, liegenden Kugelabschnittes das Volumen eines Kegels, welcher die Höhe des Kugelabschnittes zur Höhe und seine kleine Grundfläche zur Grundfläche hat, genau um eine Größe übertrifft, welche dem Producte aus der Oberfläche der den Kugelabschnitt umgebenden Zone und dem dritten Theile des Halbmessers der Kugel gleich ist.

Wenn die Höhe x dieses Kugelabschnittes dem Halbmesser R der Kugel gleich wird, so reducirt sich das Volumen V auf das Product $\frac{2}{3} \pi R^3$ und das Doppelte dieses Productes, oder die Größe:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \tag{60}$$

drückt das Volumen der ganzen Kugel aus, wie in der Elementargeometrie bewiesen wird.

Beispiel 2. Wenn die Curve (55) die durch die Gleichung:

$$y^2 = 2px \tag{61}$$

ausgedrückte Parabel ist, so ergibt sich aus der Formel (57), wenn man $x_0 = 0$ setzt:

$$v = \pi p \int_0^x 2x \, dx = \pi p x^2 = \frac{1}{2} \pi y^2 x. \tag{62}$$

Aus der Formel (62) folgt, daß das durch die Umdrehung der bis zu dem Punkte, dessen Abscisse x ist, verlängerten Parabel (61) erzeugte Volumen die Hälfte des Productes aus seiner Höhe x und der Fläche πy^2 des Grundflächenkreises, oder mit andern Worten, die Hälfte des Volumens des umschriebenen Cylinders ist.

Beispiel 3. Wenn die Curve (55) die durch die Gleichung:

$$y = Ax^a \tag{63}$$

ausgedrückte Curve ist, wo A und a zwei reelle Constanten sind, so folgt aus der Formel (57), wenn man der Bequemlichkeit wegen $x_0 = 0$ setzt:

$$v = \pi A^2 \int_0^x x^{2a} dx = \pi A^2 \frac{x^{2a+1}}{2a+1} = \frac{1}{2a+1} \pi y^2 x. \tag{64}$$

Wenn die Constante a positiv ist, so drückt die Gleichung (63) eine Parabel des $a$ten Grades aus, und aus der Formel (64) folgt, daß das durch die Umdrehung dieser vom Anfangspunkte bis zu dem der Abscisse x entsprechenden Punkte verlängerten Parabel erzeugte Volumen sich zu dem Volumen des umschriebenen Cylinders, wie die Einheit zu der Zahl $2a+1$ verhält. In dem besondern Falle, wo man $a = \frac{1}{2}$ setzt, kommt man wieder auf das 2te Beispiel.

Beispiel 4. Wenn die Curve (55) die durch die Gleichung:

$$y = al(x) \tag{65}$$

ausgedrückte logarithmische Linie ist, so folgt aus der Formel (57), wenn man $x_0 = 0$ setzt:

$$v = \pi a^2 \int_0^x [l(x)]^2 dx = \pi a^2 x [(lx)^2 - 2lx + 2]. \tag{66}$$

Wenn die Gleichung der logarithmischen Linie unter der Form:

$$y = e^{\frac{x}{a}} \tag{67}$$

ausgedrückt wäre, so fände man, wenn man wieder $x_0 = 0$ setzt:

$$v = \pi \int_0^x e^{\frac{2x}{a}} dx = \frac{\pi a}{2}\left(e^{\frac{2x}{a}} - 1\right) = \frac{\pi a}{2}(y^2 - 1). \tag{68}$$

Beispiel 5. Wenn die Curve (55) die durch die Gleichung:

$$y = a\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} \tag{69}$$

ausgedrückte Kettenlinie ist, so folgt aus der Gleichung (57), wenn man $x_0 = 0$ setzt:

$$(70)\quad \begin{cases} v = \frac{\pi a^2}{4}\int_0^x \left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right) dx \\ = \frac{\pi a^2}{2}\left[x + \frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right)\right]. \end{cases}$$

Zuweilen wird die Bestimmung der Volumina v und V erleichtert, wenn man in den Formeln (56) und (57) statt der Veränderlichen x eine andere Veränderliche anwendet. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß sich die Curve (55) auf die durch die Gleichungen (58) in Vorlesung 24 ausgedrückte Cycloide reducire. Alsdann findet man:

$$dx = y\,d\omega, \quad y^2\,dx = y^3\,d\omega = R^3(1-\cos\omega)^3\,d\omega,$$

und wenn man den $x = x_0$ entsprechenden Werth von ω mit ω_0 bezeichnet, so folgt aus der Gleichung (57):

$$(71)\qquad v = \pi R^3 \int_{\omega_0}^{\omega} (1-\cos\omega)^3\,d\omega.$$

Setzt man insbesondere $x_0 = 0$, so hat man nothwendig $\omega_0 = 0$ und folglich:

$$(72)\qquad v = \pi R^3 \int_0^{\omega} (1-\cos\omega)^3\,d\omega.$$

Außerdem hat man:

$$(1-\cos\omega)^3 = 2^3 \sin^6\frac{\omega}{2} = \frac{1}{(-2)^3}\left[e^{\frac{\omega}{2}\sqrt{-1}} - e^{-\frac{\omega}{2}\sqrt{-1}}\right]^6$$

$$= \tfrac{1}{4}(10 - 15\cos\omega + 6\cos 2\omega - \cos 3\omega).$$

Folglich gibt die Formel (72):

$$(73)\qquad v = \frac{\pi R^3}{4}[10\omega - 15\sin\omega + 3\sin 2\omega - \tfrac{1}{3}\sin 3\omega].$$

Da in den vorhergehenden Gleichungen ω den Winkel bezeichnet, welchen der sich drehende Halbmesser des Erzeugungskreises der Cycloide beschreibt, so ist klar, daß man blos $\omega = 2\pi$ zu setzen braucht, um aus der Formel (73) das durch die Umdrehung des ersten Zweiges der Cycloide beschriebene Volumen abzuleiten. Bezeichnet man also dieses Volumen mit V, so hat man:

$$(74)\qquad V = 5\pi^2 R^3.$$

Wenn man um die Axe der x nicht mehr eine durch die Gleichung (55) ausgedrückte Curve, sondern zwei, durch zwei Gleichungen von der Form:

(75) $y = y_0$, (76) $y = Y$

ausgedrückte Curven, wo y_0 und Y zwei Functionen der Veränderlichen x sind, deren Werthe zwischen den Grenzen $x = x_0$, $x = X$ stets positiv bleiben, sich drehen läßt; so wird das Volumen, welches zwischen den durch die Umdrehung dieser Curven erzeugten Flächen und zwischen den Ebenen (24) und (25) liegt, nicht mehr durch den zweiten Theil der Gleichung (56), sondern durch die Differenz der Integrale:

$$\pi \int_{x_0}^{X} Y^2 dx, \quad \pi \int_{x_0}^{X} y_0^2 dx$$

ausgedrückt, so daß man, wenn man dieses Volumen mit V bezeichnet,

$$(77) \qquad V = \pi \int_{x_0}^{X} (Y^2 - y_0^2)\, dx = 2\pi \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} y\, dy\, dx$$

findet. Um die Gleichung (77) direct aus der Gleichung (19) abzuleiten, braucht man nur zu bemerken, daß das jetzt in Rede stehende Volumen, wenn es mit einer auf der Axe der x senkrechten Ebene geschnitten wird, eine Zone zum Durchschnitte gibt, welche zwischen zwei Kreisumfängen liegt, deren Halbmesser den Ordinaten y_0, Y gleich sind. Man hat also in dem gegenwärtigen Falle:

$$(78) \qquad F(x) = \pi Y^2 - \pi y_0^2 = \pi (Y^2 - y_0^2).$$

Substituirt man nun den vorhergehenden Werth von $F(x)$ in die Formel (19), so erhält man die Gleichung (77) wieder. Es verdient bemerkt zu werden, daß das durch die Gleichung (77) bestimmte Volumen V genau dem gleich ist, welches die in der Ebene der xy liegende, von den Curven (75) und (76) und den beiden, den Abscissen x_0 und X entsprechenden Ordinaten begrenzte ebene Fläche U bei ihrer Umdrehung um die Axe der x beschreibt. Denken wir uns nun, daß sich alle Punkte der Fläche U so von der Axe der x entfernen, daß die Entfernung jedes derselben von dieser Axe um die Größe b zunimmt, oder was dasselbe ist, nehmen wir an, daß sich die Fläche U um eine zu der Axe der x parallele und von ihr um die Größe b entfernte Axe dreht; so ist klar, daß das Volumen des neuen, durch die Umdrehung der Fläche U erzeugten Körpers der Differenz:

$$\pi \int_{x_0}^{X} [(Y+b)^2 - (y_0+b)^2]\, dx =$$

$$\pi \int_{x_0}^{X} (Y - y_0)\, dx + 2\pi b \int_{x_0}^{X} (Y - y_0)\, dx,$$

und folglich der Summe

$$V + 2\pi b U \tag{79}$$

gleich ist. Man sieht leicht ein, daß man noch zu demselben Schlusse gelangen würde, wenn die Fläche U nach allen Richtungen von den Curven (75) und (76), oder von einer einzigen Curve, oder endlich durch ein System mehrerer Linien begrenzt würde. Uebrigens drückt das Product $2\pi b$ offenbar den Kreisumfang aus, welcher die Entfernung b zum Halbmesser hat, und die Axe der x kann mit einer beliebigen, in der Ebene der Fläche U willkührlich gezogenen, aber außerhalb dieser Fläche liegenden Geraden zusammenfallen. Man kann also folgenden Lehrsatz aufstellen:

Lehrsatz 5. Wenn man eine ebene Fläche 1) um eine in der Ebene dieser Fläche liegende Axe, welche aber diese Fläche nicht durchschneidet, und 2) um eine zweite zu der ersten parallele, weiter von dieser Fläche und von der ersten Axe um die Länge b entfernte Axe sich drehen läßt; so wird der Unterschied der Volumina der durch die Umdrehung der Fläche um die zweite und um die erste Axe beschriebenen Körper durch das Product aus dieser Fläche und dem Umfange des Kreises, dessen Halbmesser der gegenseitigen Entfernung der beiden Axen gleich ist, ausgedrückt.

Wir wollen nun annehmen, daß sich die ebene Fläche U durch eine zu der Axe der x in der Entfernung b von dieser Axe gezogene parallele Gerade in zwei symmetrische Theile theilen lasse. In diesem Falle erscheinen die Gleichungen (75) und (76) unter den Formen:

$$y = b - f(x), \qquad (80)$$

$$y = b + f(x), \qquad (81)$$

und die Formel (77) gibt:

$$V = \pi \int_{x_0}^{X} \{[b + f(x)]^2 - [b - f(x)]^2\}\, dx,$$

oder was dasselbe ist:

$$V = 4\pi b \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx, \tag{82}$$

und da man außerdem:

$$U = \int_{x_0}^{X} \{[b + f(x)] - [b - f(x)]\}\, dx = 2\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx,$$

hat, so ist auch:

$$V = 2\pi b U. \tag{83}$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß die Gleichung (83) ihre Gültigkeit behält, wenn die Fläche U von einer einzigen, nach allen Seiten geschlossenen Curve oder von einem beliebigen Umfange begrenzt wird, wofern sich diese Curve oder dieser Umfang durch die Gerade $y=b$ nur in zwei symmetrische Theile theilen läßt. Man kann also folgenden Lehrsatz aufstellen.

Lehrsatz 6. Wenn eine ebene Fläche sich durch eine Axe in zwei symmetrische Theile theilen läßt, so ist das Volumen des durch die Umdrehung dieser Fläche um eine zweite, zu der ersten parallele Axe, welche in der Ebene dieser Fläche so liegt, daß sie letztere nicht durchschneidet, dem Producte aus der in Rede stehenden ebenen Fläche und dem Umfange des Kreises, welcher die gegenseitige Entfernung der beiden Axen zum Halbmesser hat, gleich.

So ist z. B. das Volumen des durch die Umdrehung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{84}$$

um die durch einen der Endpunkte der Axe $2b$ gezogene Tangente erzeugten Körpers dem Producte gleich, welches man erhält, wenn man die Fläche πab der Ellipse mit dem Umfange $2\pi b$ des Kreises multiplicirt, welchen der Mittelpunkt dieser Curve beschreibt. Das Volumen V dieses Körpers wird also durch die Gleichung:

$$V=2\pi^2 ab^2 \tag{85}$$

bestimmt.

Aus der Gleichung (19) könnte man auch folgenden bemerkenswerthen Lehrsatz ableiten.

Lehrsatz 7. Wenn zwei zu einer Axe parallele Ebenen gegeben sind, wo sich in der einen ein geschlossener Umfang befindet, und man läßt eine Gerade sich so bewegen, daß sie durch die verschiedenen Punkte dieses Umfanges geht und mit der betrachteten Axe beständig einen rechten Winkel bildet; so ist das Volumen V des von der durch die bewegliche Gerade erzeugten Fläche und den beiden gegebenen Ebenen begrenzten Körpers das Product aus seiner Höhe und der halben Summe der ebenen Flächen, welche seine Grundflächen bilden.

Beweis. Wir wollen die gegebene Axe zur Axe der x nehmen, und es sei b die gegenseitige Entfernung der beiden, zu dieser Axe parallelen Ebenen. Wenn man das Volumen V mit einer auf dieser Axe senkrechten und der Abscisse x entsprechenden Ebene durchschneidet, so ist die Durchschnittsfläche $F(x)$ offenbar ein Trapez, dessen parallele Seiten die geradlinigen Durchschnitte der schneidenden Ebene mit den beiden Grundflächen des Volumens V sind. Bezeichnet man also diese beiden geradlinigen Durchschnitte mit $f(x)$ und $f(x)$, so hat man:

$$F(x) = \frac{b}{2}[f(x) + \mathfrak{f}(x)],$$

und die Formel (19) gibt:

$$V = b\frac{\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{x} \mathfrak{f}(x)\,dx}{2} \tag{86}$$

Der Lehrsatz 7 ist also in der Gleichung (86) enthalten.

Um eine Anwendung von der Formel (29) zu geben, wollen wir annehmen, daß das Volumen v bestimmt werden sollte, welches zwischen der Ebene der xy, einer cylindrischen Fläche, deren Erzeugungslinie zu der Axe der z parallel ist und der Oberfläche des hyperbolischen Paraboloides, welches durch die Gleichung (86) in Vorlesung 14, nämlich:

$$xy = cz \tag{87}$$

ausgedrückt wird, liegt; so findet man in diesem Falle:

$$f(x, y) = \frac{1}{c}xy,$$

und folglich gibt die Gleichung (29):

$$V = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} xy\,dy\,dx = \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{X}(Y^2 - {y_0}^2)x\,dx. \tag{88}$$

Wenn die Basis der cylindrischen Fläche sich auf einen Kreis reducirt, welcher durch die Gleichung:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \tag{89}$$

ausgedrückt wird, wo a und b positive und größere Größen als der Halbmesser R bezeichnen, so hat man:

$$y_0 = b - \sqrt{[R^2 - (x-a)^2]},$$
$$Y = b + \sqrt{[R^2 - (x-a)^2]}$$
$$Y^2 - {y_0}^2 = 4b\sqrt{[R^2 - (x-a)^2]},$$
$$x = a - R,\quad X = a + R,$$

und folglich:

$$V = 2\frac{b}{c}\int_{a-R}^{a+R}\sqrt{[R^2 - (x-a)^2]}\,.\,x\,dx, \tag{90}$$

woraus folgt, wenn man $x - a = Rt$ setzt:

$$(91) \qquad V = 2\frac{b}{c}R^2\int_{-1}^{+1}(a+Rt)\sqrt{(1-t^2)}.dt.$$

Außerdem hat man offenbar:

$$\int_{-1}^{+1} t\sqrt{(1-t^2)}\,dt = 0,$$

während das Integral:

$$\int_{-1}^{+1}\sqrt{(1-t^2)}\,dt$$

die Hälfte der Fläche des Kreises ausdrückt, welcher die Einheit zum Halbmesser hat und $=\frac{\pi}{2}$ ist. Hiernach folgt offenbar aus der Gleichung (91):

$$(92) \qquad V = \pi R^2\frac{bc}{a}.$$

Folglich ist das Volumen V das Product aus seiner Grundfläche πR^2 und einer vierten Proportionale zu den drei Längen a, b und c.

Wenn man für die cylindrische Fläche, welche den Kreis (89) zur Basis hat, ein System von vier, auf der Axe der x und der y senkrechten Ebenen substituirte, so müßte man die Größen y_0, Y in der Gleichung (88) als constant betrachten, und alsdann fände man:

$$(93) \qquad V = \frac{1}{4c}(X^2-x_0^2)(Y^2-y_0^2),$$

oder was dasselbe ist:

$$(94) \qquad V = (X-x_0)(Y-y_0)\frac{x_0y_0+x_0Y+Xy_0+XY}{4c}.$$

Außerdem drückt das Product $(X-x_0)(Y-y_0)$ in dem gegenwärtigen Falle offenbar die Fläche des Rechteckes aus, welches die Basis des Volumens V bildet. Setzt man ferner:

$$(95) \qquad z_1 = \frac{x_0y_0}{c},\quad z_2 = \frac{x_0Y}{c},\quad z_3 = \frac{Xy_0}{c},\quad z_4 = \frac{XY}{c},$$

so bezeichnen z_1, z_2, z_3, z_4 offenbar die vier Ordinaten des hyperbolischen Paraboloides, welche den vier Winkelspitzen des Rechteckes entsprechen, und die Gleichung (94) gibt:

$$(96) \qquad V = (X-x_0)(Y-y_0)\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}.$$

Um ferner das hyperbolische Paraboloid zu construiren, braucht man nur das windschiefe Viereck zu construiren, dessen Winkelspitzen

mit den Endpunkten der Ordinaten z_1, z_2, z_3, z_4 zusammenfallen, und auf zwei entgegengesetzten Seiten dieses Vierecks eine Gerade sich fortbewegen lassen, welche stets in einer zu den beiden andern Seiten parallelen Ebene bleibt (siehe Vorlesung 14). Hiernach ergibt sich aus der Formel (96) folgender Lehrsatz:

Lehrsatz 8. Wenn man auf den vier Seitenflächen eines geraden Prismas mit rechteckiger Basis ein windschiefes Viereck beschrieben hat, und man läßt auf zwei entgegengesetzten Seiten dieses Viereckes eine Gerade sich so bewegen, daß sie stets zu den Ebenen der Seitenflächen des Prismas parallel bleibt, worin die beiden andern Seiten liegen, so wird das Volumen zwischen der durch diese Gerade erzeugten Fläche und dem Rechtecke, welches die Grundfläche des Prismas bildet, durch das Product aus diesem Rechtecke und dem vierten Theile der Summe der vier, auf den Kanten des Prismas zwischen den Winkelspitzen des Rechteckes und denen des windschiefen Viereckes liegenden Längen ausgedrückt.

Uebrigens ist der Lehrsatz 8 offenbar als besonderer Fall in dem Lehrsatze 7 enthalten.

Mit den verschiedenen, vorhin aufgestellten Sätzen lassen sich noch mehrere andere verbinden, welche bei der Bestimmung der Volumina von großem Nutzen sind und welche wir nun anführen wollen.

Zunächst wollen wir bemerken, daß die Formel (19) durch folgenden Lehrsatz ersetzt werden kann.

Lehrsatz 9. Um das von einer gegebenen Oberfläche eingeschlossene Volumen V zu bestimmen, braucht man nur eine beliebige Axe zu ziehen und in einer durch diese Axe gehenden festen Ebene eine Hülfscurve von solcher Beschaffenheit zu beschreiben, daß der Durchschnitt des Volumens V mit einer auf der Axe der x senkrechten beweglichen Ebene stets dem Rechtecke gleich ist, welches aus einer gegebenen Linie b und dem geradlinigen Durchschnitte der zwischen der Axe und der Curve liegenden Fläche mit der beweglichen Ebene construirt ist. Wenn man diese ebene Fläche in dem Sinne der Axe von den beiden Geraden begrenzt annimmt, nach welchen die bewegliche Ebene in ihren beiden äußersten Lagen die feste Ebene schneidet und sie durch die Länge b multiplicirt, so ist das Product genau das Maß des gegebenen Volumens.

Beweis. Denn wenn die betrachtete Axe zur Axe der x genommen wird, und wenn man den Durchschnitt des Volumens mit einer auf dieser Axe senkrechten, der Abscisse x entsprechenden beweglichen Ebene durch $F(x)$ bezeichnet, so ist $\frac{F(x)}{b}$ die Ordinate der Hülfscurve, oder mit andern Worten, der geradlinige Durchschnitt der zwischen der Axe und der Curve liegenden Fläche mit derselben

beweglichen Ebene, und diese Fläche wird vermöge der Formel (11) in Vorlesung 24 durch das Integral:

$$(97) \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{F(x)}{b}\,dx = \frac{1}{b}\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$$

ausgedrückt. Multiplicirt man nun aber das Integral (97) mit der Länge b, so erhält man offenbar den durch die Formel (19) bestimmten Werth von V zum Producte.

Zusatz 1. Wenn das Volumen V in einem Kegel oder einer Pyramide mit beliebiger Grundfläche enthalten ist, und man nimmt eine auf dieser Grundfläche senkrechte Gerade zur Axe der x, so ist die Function $F(x)$ dem Quadrate von x proportional und die Hülfscurve ist eine Parabel, welche die Ordinatenaxe zur Axe hat. Nun ist aber nach dem in Vorlesung 24 Gesagten die zwischen der Axe der x, der Parabel und einer Ordinate dieser Curve liegende Fläche $\frac{1}{3}$ des umschriebenen Rechteckes, und mithin folgt aus dem Lehrsatze 9 unmittelbar, daß das Volumen eines Kegels oder einer Pyramide mit beliebiger Grundfläche $\frac{1}{3}$ des Volumens des umschriebenen Cylinders oder Prismas, d. h. eines Cylinders oder Prismas von derselben Grundfläche und Höhe ist. Man kommt also unmittelbar auf den Lehrsatz 3 zurück.

Zusatz 2. Wenn sich der Durchschnitt $F(x)$ auf ein Trapez reducirt, dessen parallele Seiten die geradlinigen Durchschnitte der beiden ebenen, zu der gegebenen Axe parallelen Flächen sind, und wenn man annimmt, daß die Länge b genau die gegenseitige Entfernung dieser beiden ebenen Flächen bezeichnet; so ist die Ordinate der Hülfscurve genau die halbe Summe der beiden eben erwähnten geradlinigen Durchschnitte, woraus sich leicht ergibt, daß die zwischen der Axe der x und der Hülfscurve liegende Fläche die halbe Summe der beiden erwähnten ebenen Flächen ist. Hiernach ergibt sich aus dem Lehrsatze 9 unmittelbar der vorhin bewiesene Lehrsatz 7.

Mit derselben Leichtigkeit könnte man vermittelst des Lehrsatzes 9 das Volumen bestimmen, welches in einer Kugel, einem Hyperboloide, Ellipsoide ꝛc. zwischen zwei parallelen Ebenen liegt. Ferner, lassen sich vermittelst dieses Lehrsatzes oder der Gleichungen (19) und (29) noch folgende Lehrsätze aufstellen.

Lehrsatz 10. Wenn die Durchschnitte zweier Volumina mit einem Systeme paralleler Ebenen in einem constanten Verhältnisse zu einander stehen, so stehen die Volumina selbst in diesem Verhältnisse.

Beweis. Wir wollen die verschiedenen Punkte des Raumes auf drei rechtwinklige Axen der x, y, z bezogen, und die Axe der x auf den erwähnten parallelen Ebenen senkrecht annehmen. Wenn man die Durchschnittsflächen der beiden Volumina mit einer dieser Ebenen, nämlich mit der, welche der Abscisse x entspricht, durch $F(x)$ und $\mathfrak{F}(x)$ bezeichnet, so hat man nach der Voraussetzung:

$$(98) \qquad \mathfrak{F}(x) = c\,F(x),$$

wo c das constante Verhältniß bezeichnet. Ueberdies seien x_0 und X die Grenzen, zwischen welchen die Abscisse x bleiben muß, damit die dieser Abscisse entsprechende und auf der Axe der x senkrechte Ebene die beiden Volumina schneidet. Vermöge der Formel (19) wird das erste Volumen offenbar durch das Integral:

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx.$$

ausgedrückt, während das zweite Volumen durch das Integral:

$$\int_{x_0}^{X} \mathfrak{F}(x)\,dx$$

ausgedrückt wird. Nun folgt aber aus der Gleichung (98):

$$\int_{x_0}^{X} \mathfrak{F}(x)\,dx = c\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx, \tag{99}$$

und es ist einleuchtend, daß in dieser letzten Formel der ausgesprochene Lehrsatz enthalten ist.

Zusatz 1. Zwei Volumina sind gleich groß, wenn die Durchschnitte derselben mit einer, zu der gegebenen Ebene stets parallelen Ebene immer einander gleich sind.

Zusatz 2. Es seien a, b, c drei positive Constanten, und wir wollen die 1) in einer durch die Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2; \tag{100}$$

ausgedrückten Kugel und 2) in einem durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{101}$$

ausgedrückten Ellipsoide zwischen zwei auf der Axe der x senkrechten Ebenen liegenden Volumina vergleichen. Man sieht leicht ein, daß sich der Durchschnitt der Kugel mit einer der Abscisse x entsprechenden und auf der Axe der x senkrechten Ebene auf einen Kreis von dem Halbmesser:

$$(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

und von der Fläche:

$$\pi(a^2 - x^2), \tag{102}$$

und der des Ellipsoides auf eine Ellipse von den beiden Halbaxen:

$$\frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{c}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}},$$

und von der Fläche:

$$\frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2) \tag{103}$$

reducirt. Da sich nun die Ausdrücke (103) und (102) wie $\frac{bc}{a^2}$ zu der Einheit verhalten, so folgt aus dem Lehrsatze 10, daß die in dem Ellipsoide und der Kugel zwischen zwei beliebigen, auf der Axe der x senkrechten Ebenen liegenden Volumina in demselben Verhältnisse zu einander stehen. Wenn man also das Volumen des in dem Ellipsoide zwischen der Ebene der yz und einer der Abscisse x entsprechenden parallelen Ebene liegenden Abschnittes mit v bezeichnet, so findet man mit Berücksichtigung der Formel (59):

$$v = \frac{\pi bc}{a^2} x(a^2 - \tfrac{1}{3}x^2). \tag{104}$$

Wenn die Höhe x des Abschnittes der Halbaxe a gleich wird, so reducirt sich das Volumen v auf das Product $\frac{2}{3}\pi abc$ und das Doppelte dieses Productes, oder die Größe:

$$\tfrac{4}{3}\pi abc, \tag{105}$$

drückt das ganze Volumen des Ellipsoides aus.

Lehrsatz 11. Wenn zwei Volumina gegeben sind, welche von zwei Oberflächen begrenzt werden, und die innerhalb dieser Oberflächen auf einer stets zu einer gewissen Axe parallel bleibenden beweglichen Geraden liegenden Längen stehen in einem constanten Verhältnisse zu einander, so stehen die beiden Volumina in demselben Verhältnisse zu einander.

Beweis. Wir wollen die verschiedenen Punkte des Raumes wieder auf drei rechtwinklige Axen der x, y, z beziehen und annehmen, daß die bewegliche Gerade zu der letzten parallel bleiben muß, so entspricht jeder Lage dieser Geraden ein bestimmtes System von Werthen der Coordinaten x, y. Nun seien $f(x, y)$, $f(x, y)$ die auf der beweglichen Geraden innerhalb der Oberflächen der beiden Volumina liegenden Längen, so hat man nach der Voraussetzung:

$$\mathfrak{f}(x, y) = cf(x, y), \tag{106}$$

wo c das constante Verhältniß bezeichnet. Außerdem seien x_0, X constante Größen und y_0, Y Functionen von x, welche so gewählt sind, daß die Gleichungen:

(22)	$y = y_0$,	(23)	$y = Y$,
(24)	$x = x_0$,	(25)	$x = X$

die cylindrischen Flächen und die Ebenen ausdrücken, zwischen welchen die bewegliche Gerade bleiben muß, um die beiden Volumina zu schneiden. Vermöge der Gleichung (29) wird aber das erste Volumen offenbar durch das doppelte Integral:

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy\,dx,$$

ausgedrückt, während das zweite durch das doppelte Integral:

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \mathfrak{f}(x,y)\,dy\,dx$$

ausgedrückt wird. Nun folgt aber aus der Gleichung (106):

$$(107)\qquad \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \mathfrak{f}(x,y)\,dy\,dx = c\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy\,dx;$$

und es ist einleuchtend, daß in dieser letzten Formel der ausgesprochene Lehrsatz enthalten ist.

Der vorhergehende Beweis wäre unzulässig, wenn die Oberfläche jedes der gegebenen Volumina in mehr als zwei Punkten von einer zu der Axe der x oder der y parallelen Geraden geschnitten werden könnte. Aber alsdann ließen sich die beiden Volumina in correspondirende Theile zerlegen, deren, vermittelst der vorhergehenden Betrachtungen bestimmtes Verhältniß $= c$ wäre, und da man die verschiedenen Theile einer Summe nur in einem Verhältnisse von $1:c$ zu- oder abnehmen zu lassen braucht, damit diese Summe selbst in demselben Verhältnisse zu- oder abnimmt, so ist die Richtigkeit des Lehrsatzes 11 wieder einleuchtend.

Anmerkung. Es verdient bemerkt zu werden, daß der Lehrsatz 11 selbst in dem Falle noch stattfinden würde, wo sich die Längen $f(x,y)$, $\mathfrak{f}(x,y)$ in ein System von mehrern Längen verwandelten, wovon die erste zwischen zwei gegebenen Flächen, die zweite zwischen zwei andern gegebenen Flächen u. s. w. läge.

Zusatz 1. Wir wollen annehmen, daß in der Ebene der xy zwei geschlossene Curven beschrieben sind, wovon die erste durch die Gleichung:

$$(108)\qquad \mathfrak{F}(x,y,z) = 0,$$

und die zweite durch eine andere Gleichung von der Form:

$$(109)\qquad \mathfrak{F}\left(x,y,\frac{z}{c}\right) = 0.$$

ausgedrückt wird; so ist klar, daß für jedes System der den Coordinaten x, y beigelegten Werthe sich die aus den Gleichungen (108) und (109) abgeleiteten, correspondirenden Werthe von z wie $1:c$

verhalten. Folglich ändern sich die Grenzen nicht, zwischen welchen x und y bleiben müssen, damit z reelle Werthe behält, wenn man von der ersten Curve zur zweiten übergeht. Wenn man ferner die verschiedenen reellen Werthe von z, welche die Gleichung (108) für eine gegebene Abscisse gibt, mit:

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ldots \tag{110}$$

bezeichnet, so sind die, welche die Gleichung (109) für dieselbe Abscisse gibt, offenbar:

$$cz_0,\ cz_1,\ cz_2,\ cz_3,\ldots \tag{111}$$

Wenn man überdies die Größen (110) nach der Folge ihrer Größe geordnet annimmt, so wird die innerhalb der Fläche (108) auf einer zu der Axe der z parallelen Ordinate liegende Totallänge $f(x,y)$ offenbar durch:

$$f(x,y)=z_1-z_0+z_3-z_2+\ldots \tag{112}$$

ausgedrückt. Dagegen ergibt sich die Summe $f(x,y)$ der auf derselben Ordinate innerhalb der Fläche (109) liegenden Längen aus der Formel:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= cz_1-cz_0+cz_3-cz_2+\text{etc.}\ldots \\ &= c(z_1-z_0+z_3-z_2+\text{etc.}). \end{aligned} \tag{113}$$

Man hat also:

$$f(x,y)=cf(x,y); \tag{106}$$

und aus dem Lehrsatze 11 folgt, daß die von den krummen Flächen (106) und (107) begrenzten Volumina in dem Verhältnisse von $1:c$ zu einander stehen.

Zusatz 2. Wenn man wie vorhin schließt, aber die Coordinaten x, y, z mit einander vertauscht, so ergibt sich, daß die von der Fläche (108) und von der, welche:

$$F\left(\frac{x}{a}, y, z\right)=0, \text{ oder} \tag{114}$$

$$F\left(x, \frac{y}{b}, z\right)=0 \tag{115}$$

zur Gleichung hat, wo a, b zwei positive Constanten bezeichnen, eingeschlossenen Volumina in dem Verhältnisse von $1:a$ oder von $1:b$ zu einander stehen.

Zusatz 3. Wenn man successive die Volumina mit einander vergleicht, welche von den durch die Gleichungen:

(108) $\mathfrak{F}(x, y, z) = 0$, (114) $\mathfrak{F}\left(\frac{x}{a}, y, z\right) = 0$,

(116) $\mathfrak{F}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, z\right) = 0$, (117) $\mathfrak{F}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) = 0$,

ausgedrückten vier Flächen begrenzt werden, so ergibt sich aus dem vorhergehenden Zusatze, daß die Verhältnisse des zweiten Volumens zum ersten, des dritten zum zweiten, und des vierten zum dritten resp. durch die Zahlen a, b, c ausgedrückt werden. Folglich wird das Verhältniß des vierten Volumens zum ersten durch das Product abc ausgedrückt, und man kann daher folgenden Lehrsatz aufstellen:

Lehrsatz 12. Um das Volumen zu bestimmen, welches von einer überall geschlossenen und durch eine Gleichung von der Form:

(117) $$\mathfrak{F}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) = 0,$$

worin a, b, c drei positive Constanten bezeichnen, ausgedrückten krummen Fläche begrenzt wird, braucht man nur das von der krummen Fläche, deren Gleichung:

(106) $$\mathfrak{F}(x, y, z) = 0$$

ist, eingeschlossene Volumen zu bestimmen und dasselbe durch das Product der drei Constanten a, b, c zu multipliciren.

Zusatz 1. Wenn sich die krumme Fläche (117) auf die des Ellipsoides (101) reducirt, so verwandelt sich die Gleichung (108) in:

(118) $$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

und drückt eine Kugel aus, welche die Einheit zum Halbmesser hat. Da nun das Volumen dieser Kugel $= \frac{4}{3}\pi$ ist, so folgt aus dem Lehrsatze 12, daß das Volumen des Ellipsoides durch das Product:

(105) $$\frac{4}{3}\pi abc,$$

ausgedrückt wird, was bereits bekannt war.

Zusatz 2. Wenn man in der Gleichung (117) $c = b = a$ setzt, so reducirt sie sich auf die Form:

(119) $$\mathfrak{F}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right) = 0,$$

und drückt eine krumme Fläche aus, welche einen, dem von der krummen Fläche (108) begrenzten Körper ähnlichen Körper umschließt, und die Dimensionen des zweiten Körpers stehen zu denen

des ersten in dem Verhältnisse von $a:1$. Hiernach folgt offenbar aus dem Lehrsatze 12, daß sich die Volumina zweier ähnlicher Körper wie die Würfel ihrer resp. Dimensionen verhalten.

Lehrsatz 13. Das Verhältniß zweier Volumina ist immer eine mittlere Größe zwischen den verschiedenen Werthen, welche das Verhältniß der Durchschnitte dieser beiden Volumina mit einer stets zu einer gegebenen Ebene parallel bleibenden beweglichen Ebene annehmen kann.

Beweis. Wir wollen die verschiedenen Punkte des Raumes auf die drei rechtwinkligen Axen der x, y, z, wovon die beiden letzten in der gegebenen Ebene liegen, bezogen annehmen und die Durchschnitte der beiden Volumina mit der beweglichen, der Abscisse x entsprechenden Ebene mit $F(x)$ und $\mathfrak{F}(x)$ bezeichnen. Endlich seien x_0, X die Grenzen, zwischen welchen die Abscisse x liegen muß, damit die bewegliche Ebene die beiden Volumina, oder wenigstens eins derselben trifft. Wenn die bewegliche Ebene für jeden, zwischen x_0, X liegenden Werth von x die beiden Volumina immer schneidet, so werden diese durch die Integrale:

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx, \qquad \int_{x_0}^{X} \mathfrak{F}(x)\,dx$$

ausgedrückt. Ferner ist nach einem bekannten Lehrsatze der Integralrechnung (siehe Seite 369):

$$\frac{\int_{x_0}^{X} \mathfrak{F}(x)\,dx}{\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx} = \frac{\mathfrak{F}(\xi)}{F(\xi)}, \tag{120}$$

wo ξ einen zwischen den Grenzen x_0, X liegenden Werth von x bezeichnet. Nun ist aber der Bruch:

$$\frac{\mathfrak{F}(\xi)}{F(\xi)}$$

offenbar einer von den Werthen, welche das Verhältniß:

$$\frac{\mathfrak{F}(x)}{F(x)}$$

der Durchschnitte der beiden Volumina annehmen kann, während x von x_0 bis $x = X$ variirt, und folglich eine zwischen dem kleinsten und größten dieser Werthe liegende Größe. Aus der Formel (120) ergibt sich also in der gemachten Voraussetzung der Lehrsatz 13.

Wenn die bewegliche Ebene für gewisse Werthe der Abscisse x nur noch eins der beiden gegebenen Volumina durchschnitte, so ließe

sich der Beweis noch wie in Lehrsatz 13 führen, nur müßte man alsdann den Werth jedes der Durchschnitte $F(x)$, $\mathfrak{F}(x)$ jedesmal als $=0$ betrachten, wenn die entsprechende krumme Fläche nicht mehr durch die bewegliche Ebene geschnitten würde.

Wenn man mit dem eben bewiesenen Lehrsatze den Lehrsatz 3 in Vorlesung 24 verbindet, so ergibt sich unmittelbar folgender neuer Lehrsatz.

Lehrsatz 14. Das Verhältniß, welches zwischen den von zwei besondern krummen Flächen eingeschlossenen Voluminibus stattfindet, ist eine mittlere Größe zwischen den verschiedenen Werthen, welche das Verhältniß der von diesen beiden krummen Flächen auf einer stets zu einer gegebenen Axe parallel bleibenden beweglichen Geraden abgeschnittenen Längen annehmen kann.

Wenn man in der Gleichung (120) $\mathfrak{F}(x)=1$ setzt, so findet man:

$$\int_{x_0}^{X} \mathfrak{F}(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} dx = X - x_0,$$

und folglich:

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx = (X - x_0)\,F(\xi).$$

Nun drückt aber die Länge $X - x_0$ offenbar die lineäre Projection des Volumens (19) auf die Axe der x aus, während $F(\xi)$ eine mittlere Größe zwischen den Durchschnitten dieses Volumens mit auf derselben Axe senkrechten Ebenen ausdrückt. Da man nun eine beliebige Axe zur Axe der x nehmen kann, so führt die Formel (121) offenbar auf folgenden Lehrsatz:

Lehrsatz 15. Das Verhältniß zwischen einem Volumen und seiner Projection auf eine beliebige Axe ist eine mittlere Größe zwischen den Flächen der verschiedenen Durchschnitte dieses Volumens mit Ebenen, welche auf der Axe senkrecht sind.

Wenn man das durch die Gleichung (19) oder (29) bestimmte Volumen V nicht mehr auf eine Axe, sondern auf eine Ebene projicirt, so erhält man statt des Lehrsatzes 15 folgenden:

Lehrsatz 16. Das Verhältniß zwischen einem Volumen und seiner Projection auf eine beliebige Ebene ist eine mittlere Größe zwischen den verschiedenen Werthen, welche die Summe der von der Oberfläche dieses Volumens auf einer stets auf einer gegebenen Ebene senkrechten, beweglichen Secante abgeschnittenen Längen annehmen kann.

Beweis. Zum Beweise dieses Satzes braucht man nur die auf die Formel (34) in Vorlesung 25 angewandten Schlüsse und vermittelst welcher wir den Lehrsatz 2 auf Seite 381 bewiesen haben, auf die Formel (29) anzuwenden.

Inhaltsverzeichniß.

Vorerinnerungen.

Seite

Ableitung einiger Formeln der analytischen Geometrie 1

Erste Vorlesung.

Neigung einer ebenen Curve in einem gegebenen Punkte. — Gleichungen der Tangente und Normale an dieser Curve 26

Zweite Vorlesung.

Von den Längen, welche Subtangenten, Subnormalen, Tangenten und Normalen der ebenen Curven genannt werden 36

Dritte Vorlesung.

Mittelpunkte, Durchmesser, Axen und Asymptoten der ebenen Curven . . 43

Vierte Vorlesung.

Verschiedene Eigenschaften der ebenen Curven, welche sich aus den Gleichungen derselben ergeben. Singuläre (besonders merkwürdige) Punkte . 50

Fünfte Vorlesung.

Differenzial des Bogens einer ebenen Curve, Winkel, welche die Tangente an dieser Curve mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet. Von den ebenen Curven, welche sich in einem gegebenen Punkte schneiden oder berühren 60

Sechste Vorlesung.

Von der Krümmung einer ebenen Curve in einem gegebenen Punkte. — Krümmungshalbmesser, Krümmungsmittelpunkt und Krümmungskreis 69

Siebente Vorlesung.

Analytische Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes einer ebenen Curve. — Theorie der Evoluten und Evolventen 80

Achte Vorlesung.

Von den ebenen Curven, welche einander in einem gegebenen Punkte osculiren 93

Neunte Vorlesung.

Seite

Ueber die verschiedenen Ordnungen der Berührung ebener Curven 98

Zehnte Vorlesung.

Ueber die verschiedenen Arten der Berührung, welche zwei ebene Curven darbieten können, die durch zwei Gleichungen ausgedrückt sind, wovon die eine eine willkührliche Constanten enthält. Berührungspunkte, in welchen zwei Curven einander durchschneiden, oder sie sich berühren 113

Elfte Vorlesung.

Ueber den Gebrauch der Polarcoordinaten zum Ausdrücken und Auffinden verschiedener Eigenschaften ebener Curven 122

Zwölfte Vorlesung.

Anwendung der Polarcoordinaten zur Bestimmung der Neigung, des Bogens, des Krümmungshalbmessers, u. s. f. einer ebenen Curve 137

Dreizehnte Vorlesung.

Von der Tangente und den Berührungsebenen, den Normalen und der Normalebene in einem gegebenen Punkte einer beliebigen Curve. Asymptoten und singuläre Punkte der im Raume beschriebenen Curven . . 151

Vierzehnte Vorlesung.

Von den Berührungsebenen und den Normalen der krummen Flächen . . 162

Funfzehnte Vorlesung.

Mittelpunkte und Durchmesser der krummen Flächen und der im Raume beschriebenen Curven. Axen der krummen Flächen 186

Sechszehnte Vorlesung.

Differenzial des Bogens einer beliebigen Curve. — Von den krummen Linien und Flächen, welche sich in einem gegebenen Punkte schneiden und berühren 222

Siebzehnte Vorlesung.

Von der Krümmungsebene einer beliebigen Curve und ihren beiden Krümmungen. Krümmungshalbmesser, Krümmungsmittelpunkt und Krümmungskreis 235

Achtzehnte Vorlesung.

Analytische Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes einer beliebigen Curve. — Von den Evoluten einer beliebigen Curve und der Fläche, welche der geometrische Ort dieser Evoluten ist. Von den Curven, welche sich in einem gegebenen Punkte osculiren 249

Neunzehnte Vorlesung.

Krümmungshalbmesser der mit Normalebenen in eine krumme Fläche gemach-

Seite

ten Schnitte. — Hauptkrümmungshalbmesser. Durchschnitte, deren Krümmungen in dem Falle Null sind, wo die Hauptkrümmungshalbmesser nach entgegengesetztem Sinne gerichtet sind 268

Zwanzigste Vorlesung.

Krümmungshalbmesser der verschiedenen Curven, welche man auf einer gegebenen krummen Fläche beschreiben kann. — Von den krummen Flächen, welche einander in einem gemeinschaftlichen Punkte osculiren 291

Ein und zwanzigste Vorlesung.

Ueber die verschiedenen Ordnungen der Berührung im Raume beschriebener Curven 300

Zwei und zwanzigste Vorlesung.

Ueber die verschiedenen Ordnungen der Berührung krummer Flächen . . . 315

Drei und zwanzigste Vorlesung.

Rectification ebener Curven, oder der Curven von doppelter Krümmung . 324

Vier und zwanzigste Vorlesung.

Quadratur ebener Flächen 347

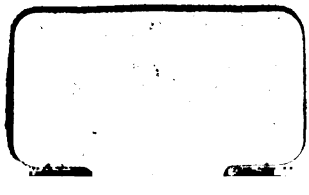
Fünf und zwanzigste Vorlesung.

Quadratur krummer Flächen 371

Sechs und zwanzigste Vorlesung.

Kubatur der Körper 401

Verbesserung.

Seite 111 Zeile 7 von unten ist nach dem Punkte der Satz »Nichtsdestoweniger könnte in gewissen besondern Fällen das Gegentheil stattfinden« einzuschalten.

APR 2 6 1938